

УДК 629.7

КОЛЕБАНИЯ БЕСКАРКАСНОЙ ПЛЕНОЧНОЙ МЕМБРАНЫ, СТАБИЛИЗИРУЕМОЙ СИЛОЙ АМПЕРА, В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

В. М. Сорокин, А. К. Яценко

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
им. Н. В. Пушкова РАН, 142190 Троицк
E-mails: sova@izmiran.ru, alex@izmiran.ru

Рассмотрена динамика в условиях невесомости круглой пленочной мембраны, на которой расположены проводники с электрическим током. Найдены уравнения колебаний мембраны, стабилизируемой силой Ампера. Проведены расчеты спектра собственных колебаний, вычислены соответствующие им величины деформаций. Рассмотрены вынужденные колебания мембраны. Исследовано влияние геомагнитного поля на устойчивость мембраны и демпфирование ее колебаний при нестационарных режимах воздействия механических сил в условиях невесомости.

Ключевые слова: пленочная мембрана, проводник с током, сила Ампера, собственные колебания мембраны, демпфирование колебаний.

Введение. В настоящее время в космических технологиях применяются бескаркасные гибкие пленочные конструкции [1]. Важнейшими среди таких конструкций являются солнечные батареи, которые могут быть установлены как на малых космических аппаратах, так и на мощных орбитальных электростанциях и межпланетных аппаратах. При использовании тонкой пленки с нанесенным на нее аморфным силиконом удельная мощность солнечной батареи увеличивается более чем в 10 раз [2, 3]. В качестве силы, обеспечивающей раскрытие пленочной конструкции в космосе, предполагается использовать инерционные силы, возникающие при вращении космического аппарата [4, 5]. В работах [6, 7] предложено также использовать силу взаимодействия магнитного поля токов, протекающих в тонких проводниках, расположенных на поверхности пленочной конструкции.

При проектировании гибких крупногабаритных космических конструкций помимо задачи их раскрытия возникает задача поддержания их заданной формы в процессе эксплуатации. Одним из способов стабилизации заданной формы пленочных конструкций является размещение на их поверхности проводников с электрическим током, имеющих форму концентрических окружностей. При пространственной переориентации пленочной конструкции на нее наряду со стационарным полем сил Ампера действуют нестационарные силы инерции, что приводит к возникновению колебаний пленочной конструкции. При практически полном отсутствии внешних демпфирующих воздействий эти колебания могут существовать в течение длительного времени. В данной работе исследованы колебательные процессы пленочной конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект № 2620).

© Сорокин В. М., Яценко А. К., 2013

1. Вынужденные колебания тонкой мембраны, стабилизируемой силой Ампера. Рассмотрим вынужденные колебания плоской круглой мембраны радиусом R и толщиной h , объемную плотность материала которой обозначим ρ . Радиальное напряжение в мембране создает сила Ампера, возникающая в результате взаимодействия концентрических проводников с током, расположенных на ее поверхности. Поперечное отклонение элемента поверхности мембраны w в полярной системе координат (r, θ) удовлетворяет уравнению поперечных колебаний [8]

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_{\theta\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = F(r, \theta, t), \quad (1)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ — радиальная и тангенциальная компоненты тензора напряжений мембраны; F — объемная плотность силы, направленной по нормали к плоскости мембраны.

На поверхности мембраны расположены тонкие проводники с постоянной силой тока I_i , имеющие форму концентрических окружностей радиусом r_i . Индекс i принимает значения $i = 1, 2, \dots, N$. Радиусы окружностей возрастают с увеличением их номера. Наибольший радиус проводника совпадает с радиусом мембраны: $r_N = R$. Согласно закону Ампера индукция магнитного поля \mathbf{B} проводников с током приводит к появлению сил их взаимодействия [9], которые определяют напряжения в мембране. Расчет величин деформации и напряжения в мембране проведен в работе [7]. Компоненты тензора напряжений определяются формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left((1 + \sigma)k_i - (1 - \sigma) \frac{p_i}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left((1 + \sigma)k_i + (1 - \sigma) \frac{p_i}{r^2} \right),$$

$$r_i < r < r_{i+1},$$

где E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона; коэффициенты k_i , p_i определяются выражениями

$$k_n = \frac{g_N}{1 + \sigma} + \frac{1 - \sigma}{2(1 + \sigma)R^2} \sum_{i=1}^{N-1} g_i r_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{N-1} g_i,$$

$$p_0 = 0, \quad p_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i r_i^2, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

$$g_i = \frac{\mu_0(1 - \sigma^2)}{4\pi E h} I_i \left[\frac{I_i}{r_i} \left(\ln \frac{8r_i}{a} - \frac{3}{4} \right) + 2 \sum_{j \neq i} I_j \left(\frac{1}{r_j + r_i} K(\lambda_{ij}) + \frac{1}{r_j - r_i} E(\lambda_{ij}) \right) \right],$$

$$\lambda_{ij} = \frac{4r_i r_j}{(r_i + r_j)^2},$$

$K(x)$, $E(x)$ — полные эллиптические интегралы Лежандра [10]; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; a — радиус поперечного сечения проводников, расположенных на мембране. Следует отметить, что непрерывность зависимости напряжения от радиуса нарушается при значениях радиуса $r = r_i$.

Уравнение (1) с переменными коэффициентами решается с граничными условиями в центре мембраны $r = 0$ и на окружности $r = R$, ограничивающей мембрану:

$$\frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=R} = 0. \quad (2)$$

При $r = r_i$ смещение w непрерывно, а производная $\partial w / \partial r$ имеет разрыв, величина которого определяется путем интегрирования уравнения (1) по r в окрестности радиуса $r = r_i$.

Полагаем, что при $t < 0$ сила $F = 0$ и колебания мембраны отсутствуют. Начальные условия для поперечного смещения и условия на окружностях $r = r_i$ имеют вид

$$\begin{aligned} w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0, \\ \left[\sigma_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_i} = 0, \quad [w] \Big|_{r=r_i} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[\cdot]$ — разрыв соответствующей функции при $r = r_i$.

Предположим, что плотность внешней силы, действующей на мембрану, выражается в виде ряда

$$F(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t) \cos(n\theta).$$

Тогда решение уравнения (1) можно представить в виде

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, t) \cos(n\theta). \quad (4)$$

Для безразмерных функций $U_n = u_n/R$ из (1) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \tau^2} + \hat{L}_n(U_n) = \tilde{f}_n(\xi, \tau), \quad \hat{L}_n(U_n) = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi s_1(\xi) \frac{\partial U_n}{\partial \xi} \right) + \frac{n^2}{\xi^2} s_2(\xi) U_n, \\ s_1(\xi) = \sigma_{rr}(\xi) \frac{1 - \sigma^2}{E}, \quad s_2(\xi) = \sigma_{\theta\theta}(\xi) \frac{1 - \sigma^2}{E}, \quad \tilde{f}_n = f_n \frac{R(1 - \sigma^2)}{E}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\xi = r/R$, $\tau = t/t_0$, $t_0 = R\sqrt{\rho(1 - \sigma^2)/E}$ — безразмерные переменные.

Решение уравнений (5) будем искать в виде разложений неизвестных U_n по системам собственных функций операторов \hat{L}_n :

$$U_n(\xi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}(\tau) u_{mn}(\xi).$$

Ортогональные функции $u_{mn}(\xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi s_1(\xi) \frac{du_{mn}}{d\xi} \right) + \left(\lambda_{mn}^2 \xi - \frac{n^2 s_2(\xi)}{\xi} \right) u_{mn} = 0 \quad (6)$$

и граничным условиям (2) в центре мембраны и на ограничивающей ее окружности. Коэффициенты разложения $a_{mn}(\tau)$ удовлетворяют уравнениям и начальным условиям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_{mn}}{d\tau^2} + \lambda_{mn}^2 a_{mn} = b_{mn}(\tau), \\ b_{mn}(\tau) = \int_0^1 \xi \tilde{f}_n(\xi, \tau) u_{mn}(\xi) d\xi, \quad a_{mn}(0) = \frac{da_{mn}(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения λ_{mn} определяют собственные частоты и периоды колебаний мембраны: $\omega_{mn} = \lambda_{mn}/t_0$, $T_{mn} = 2\pi t_0/\lambda_{mn}$.

Задача (6) на собственные функции и собственные значения решалась численно методом стрельбы [11]. Поскольку безразмерные компоненты тензора напряжений $s_{1,2}(\xi)$,

входящие в (6), при $\xi = \xi_i = r_i/R$ имеют разрыв, уравнение (6) решалось последовательно на интервалах $\xi_i < \xi < \xi_{i+1}$ начиная с центра мембраны $\xi_0 = 0$ с использованием условий (3) на границах этих интервалов.

На рис. 1 приведены результаты расчета зависимости собственных функций поперечных колебаний мембраны от радиуса при $n = 1$, $m = 0, 1, 2, 3$ и соответствующие им формы поверхности мембраны $u_{m1}(\xi) \cos \theta$. Номерам гармоник с $m = 0, 1, 2, 3$ соответствуют периоды колебаний $T = 80,0; 40,0; 27,8; 20,9$ с. Расчет проведен для мембраны с тремя концентрическими кольцевыми проводниками. Значения силы тока выбраны с учетом условия обращения в нуль полного магнитного момента токов с целью минимизации воздействия на мембрану внешнего магнитного поля. Из результатов расчета следует, что период основной гармоники колебаний составляет 80 с. Его величина определяется значениями силы тока в проводниках.

2. Возбуждение колебаний мембраны, стабилизируемой силой Ампера. Исследуем возбуждение колебаний круглой мембраны относительно фиксированной оси. Ось вращения расположена в плоскости мембраны и проходит через ее центр. Колебания возникают в результате поворота мембраны с переменной угловой скоростью $\Omega(t)$ относительно оси ее вращения. Плоскость мембраны совпадает с плоскостью (x, y) декартовой системы координат, начало которой совпадает с ее центром. Ось вращения направлена вдоль оси y . Угол θ отсчитывается от оси x . Радиус-вектор \mathbf{r} расположен в плоскости (x, y) . Вращение приводит к появлению силы инерции $\Delta \mathbf{f}$, которая действует на каждый элемент мембраны массой $\Delta m = \rho h \Delta S$ с площадью поверхности ΔS . Найдем поперечную компоненту объемной плотности силы инерции $F = \Delta f_{\perp} / (h \Delta S)$, обуславливающую поперечные смещения w мембраны. Сила инерции, действующая на малый элемент мембраны, определяется выражением (см., например, [12])

$$\Delta \mathbf{f} = -\Delta m [(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))].$$

В этом выражении второе и третье слагаемые представляют собой силу Кориолиса и центробежную силу, действующие в плоскости мембраны. Первое слагаемое описывает силу инерции вращения, направленную перпендикулярно плоскости мембраны. С использованием нормальной компоненты этого слагаемого можно получить поперечную компоненту действующей на единицу объема силы, которая возникает при повороте мембраны вокруг оси y с переменной угловой скоростью $\Omega(t)$:

$$F = \rho r \frac{d\Omega}{dt} \cos \theta. \quad (7)$$

Для анализа поперечных колебаний мембраны использованы уравнения (1) и граничные условия (2), (3). Если поворот плоскости мембраны вокруг неподвижной оси происходит с переменной угловой скоростью $\Omega(t)$, то на нее действует сила инерции (7). Подставляя (7) в (1), получаем уравнение гиперболического типа, начальные и граничные условия для определения функции $u(r, t)$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r^2} u = f(t)r, \quad f(t) = \rho \frac{d\Omega(t)}{dt}, \\ u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u|_{r=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{R} \right) \right] \Big|_{r=R} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) является частным случаем системы (2), (3), (5), точное решение которой было получено в п. 1 методом разложения по собственным функциям. Однако для рассматриваемой линейной зависимости внешней силы от радиуса этот метод оказывается малоприменимым вследствие очень медленной сходимости соответствующего ряда. В то

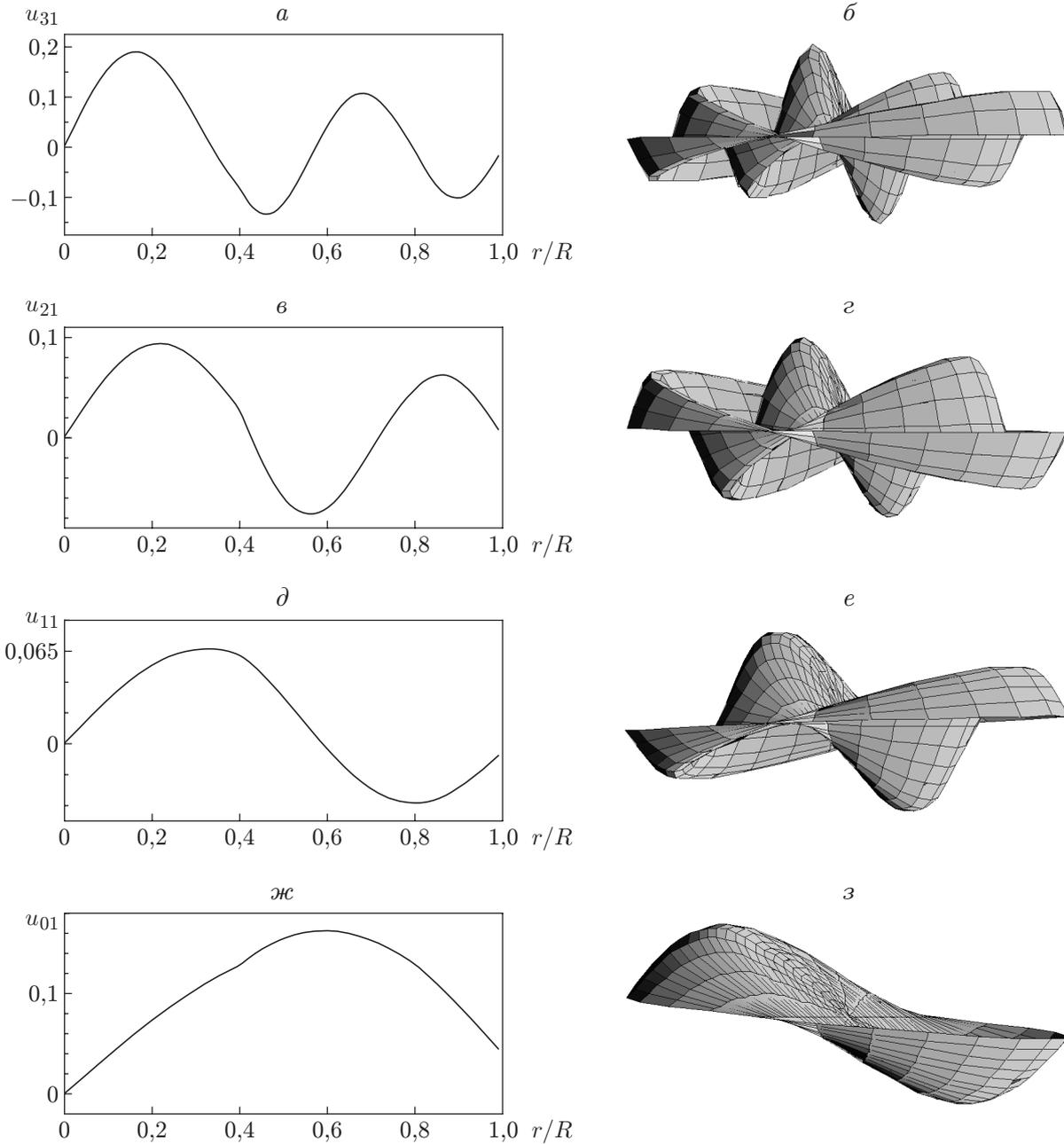


Рис. 1. Результаты расчета собственных функций поперечных колебаний мембраны для четырех гармоник ($E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\sigma = 0,3$, $h = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $a = 10^{-4}$ м, $R = 1$ м, $r_1 = 0,4$ м, $r_2 = 0,8$ м, $r_3 = 1,0$ м, $I_1 = 1,0$ А, $I_2 = 2,0$ А, $I_3 = -1,44$ А):

$a, в, д, ж$ — зависимость смещения элемента поверхности мембраны от радиуса, $б, г, е, з$ — формы поверхности мембраны; $a, б$ — $m = 3, \lambda = 96$, $в, г$ — $m = 2, \lambda = 72$, $д, е$ — $m = 1, \lambda = 48$, $ж, з$ — $m = 0, \lambda = 25$

же время результаты прямого численного моделирования показывают, что функция $u(r, t)$ с высокой степенью точности может быть представлена в виде линейной функции. Поэтому предположим, что

$$u(r, t) = g(t)r. \quad (9)$$

В этом случае граничные условия при $r = 0$, $r = R$ автоматически выполняются. Далее необходимо определить $g(t)$. Подстановка (9) в уравнение системы (8) невозможна, так как эта функция не является решением. Для определения $g(t)$ подставим (9) в интеграл энергии (см., например, [13]), который является следствием уравнения (8). Для этого умножим уравнение (8) на $r \partial u / \partial t$ и проинтегрируем его по r . После интегрирования по частям с учетом граничного условия получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^R W r dr &= \int_0^R [r f(t)] \frac{\partial u}{\partial t} r dr + R \sigma_{rr} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}, \\ W &= \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sigma_{rr} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta} u^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенство (10) определяет баланс плотности механической энергии W колеблющейся мембраны. Первое слагаемое в правой части представляет собой работу внешней силы в единицу времени, а второе слагаемое определяется краевыми условиями. Подставим аппроксимацию решения (9) в равенство (10). Интегрируя полученное равенство, находим

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega_0^2 g = \frac{d\Omega(t)}{dt}, \quad \omega_0 = \frac{4}{\rho R^4} \left(\int_0^R (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) r dr - R^2 \sigma_{rr}(R) \right). \quad (11)$$

Уравнение (11) совпадает с уравнением колебаний гармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 под действием внешней силы $d\Omega/dt$. Величина $g(t)$ представляет собой максимальный угол отклонения мембраны в момент времени t . Выполним расчет вынужденных колебаний для зависимости угловой скорости от времени вида

$$\Omega(t) = 2\Omega_0 \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right].$$

В этом случае полный угол поворота оси равен $\Phi = \Omega_0 \tau$, а характерное время поворота составляет $t \approx 2\tau$. Собственная частота равна $\omega_0 = 0,18 \text{ с}^{-1}$, что соответствует периоду колебаний $T = 2\pi/\omega = 34 \text{ с}$. Результаты расчета вынужденных колебаний мембраны приведены на рис. 2. Значения силы тока выбраны с учетом условия обращения в нуль полного магнитного момента системы с целью минимизировать воздействие на нее геомагнитного поля. Из рис. 2 следует, что максимальное значение угла отклонения мембраны не превышает 1° , а его установившееся значение несколько меньше.

3. Электродинамическое демпфирование колебаний гибкой солнечной батареи. Гибкая энергетическая установка в виде пленочной конструкции, работающая в космосе, состоит из элементов солнечных батарей, расположенных на тонкой пленке и соединенных в замкнутую цепь. В процессе полета космический аппарат ориентирует плоскость солнечной батареи в направлении к Солнцу. В результате вектор нормали к плоскости батареи направлен под углом к геомагнитному полю. В замкнутой цепи элементов солнечной батареи течет электрический ток, который формирует ее магнитный момент. Вектор магнитного момента солнечной батареи направлен по нормали к ее плоскости под углом к геомагнитному полю. Состоянию с наименьшей энергией соответствует ориентация вектора магнитного момента вдоль геомагнитного поля. Следовательно, магнитный момент

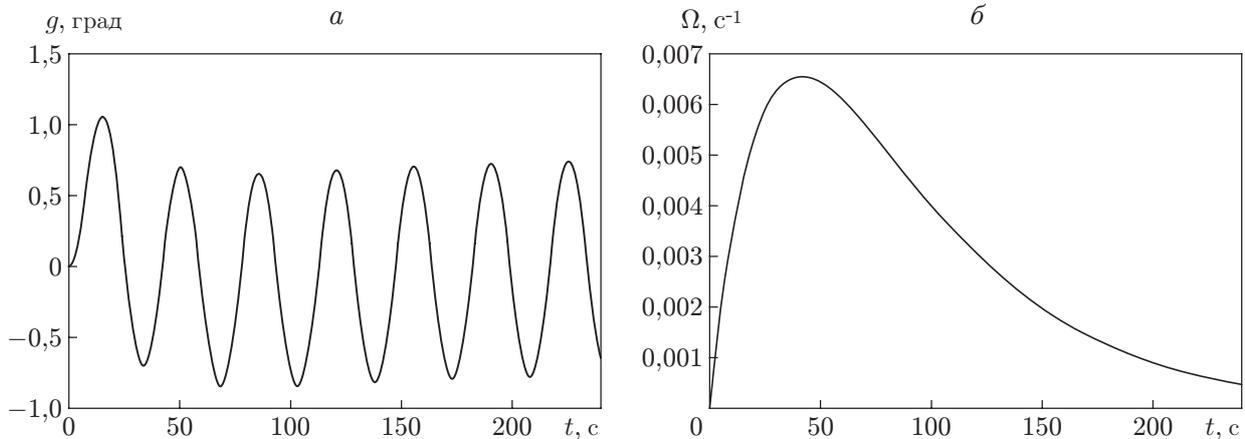


Рис. 2. Зависимости максимального угла отклонения мембраны (а) и угловой скорости (б) от времени при $\Phi = \pi/2$, $\tau = 60$ с, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\sigma = 0,3$, $h = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $a = 10^{-4}$ м, $R = 1$ м, $r_1 = 0,4$ м, $r_2 = 0,8$ м, $r_3 = 1,0$ м, $I_1 = 4,0$ А, $I_2 = 8,0$ А, $I_3 = -5,76$ А, $\omega_0 = 0,18$ с⁻¹

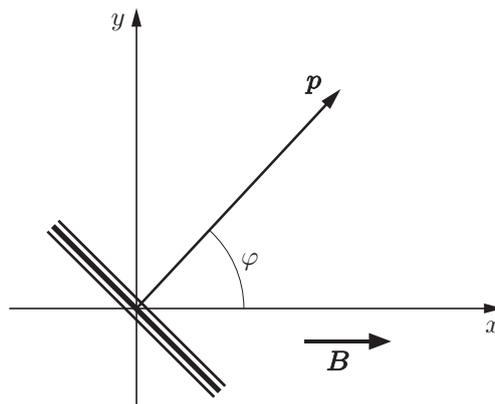


Рис. 3. Система координат в задаче о демпфировании колебаний мембраны

стремится повернуть солнечную батарею в такое положение, в котором ее плоскость будет расположена по нормали к геомагнитному полю. Для сохранения ориентации на Солнце к батарее приложен компенсирующий момент сил. В случае возмущения этого момента, например в процессе коррекции орбиты, возникают механические колебания батареи, которые необходимо демпфировать. Ниже рассмотрен электродинамический механизм такого демпфирования.

Для оценки характеристик колебаний будем полагать, что солнечная батарея представляет собой круглую тонкую мембрану радиусом r , вдоль края которой расположена замкнутая цепь солнечных энергетических элементов. По кольцу, образованному этими элементами, течет электрический ток I . На противоположной стороне непроводящей мембраны вдоль ее края расположен кольцевой замкнутый проводник толщиной h и шириной l . Введем декартову систему координат x, y, z , направление оси x которой совпадает с направлением вектора геомагнитного поля \mathbf{B} . Вектор магнитного момента батареи \mathbf{p} расположен в плоскости x, y под углом φ к оси x (рис. 3.) Вектор момента механических сил \mathbf{M} , компенсирующего взаимодействие магнитного момента с геомагнитным полем, направлен вдоль оси z . Уравнение, описывающее вращательное движение батареи отно-

сительно оси z , имеет вид

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M - pB \sin \varphi, \quad (12)$$

где J — момент инерции батареи. Обозначим через M_1 малое возмущение момента относительно его равновесного значения M_0 . Возмущение момента приводит к незначительному изменению угла φ_1 и магнитного момента p_1 . Подставляя выражения

$$M = M_0 + M_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1$$

в уравнение (12) и сохраняя слагаемые первого порядка малости по возмущениям, получаем

$$M_0 - p_0 B \sin \varphi_0 = 0, \quad J \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = M_1 - (p_0 B \cos \varphi_0) \varphi_1 - B \sin \varphi_0 p_1. \quad (13)$$

Вращательные колебания мембраны относительно оси z приводят к возмущению магнитного потока Φ и возбуждению ЭДС индукции в кольцевом проводнике. Возникающий при этом электрический ток создает возмущение модуля магнитного момента:

$$p_1 = -\frac{S}{R_w} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BS^2 \sin \varphi_0}{R_w} \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (14)$$

(S — площадь, ограниченная кольцом; R_w — сопротивление кольцевого проводника). Подставляя равенство (14) во второе уравнение (13), получаем уравнение колебаний мембраны относительно оси z

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\varphi_1}{dt} + \Omega^2 \varphi_1 = \frac{M_1}{J}, \quad \tau = \frac{R_w J}{(BS \sin \varphi_0)^2}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{p_0 B \cos \varphi_0}{J}}. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$\varphi_1(t) = \frac{i}{\omega_1 - \omega_2} \int_{-\infty}^t dt' A(t') \{ \exp [i\omega_1(t - t')] - \exp [i\omega_2(t - t')] \}, \quad (16)$$

$$\omega_1 = -\frac{i}{2\tau} + \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\tau^2}}, \quad \omega_2 = -\frac{i}{2\tau} - \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\tau^2}},$$

где $A(t) = M_1(t)/J$.

Будем полагать, что расположенный на поверхности мембраны проводник имеет форму кольца с радиусом R , равным радиусу мембраны, а радиус сечения проводника равен a . Если удельное сопротивление материала равно $1/\sigma_w$, где σ_w — его проводимость, то сопротивление проводника равно $R_w = 2R/(\sigma_w a^2)$. Момент инерции мембраны относительно оси, совпадающей с ее диаметром, равен $J = mR^2/4$. Будем также полагать, что масса проводника превышает массу мембраны. Обозначив через ρ_w плотность материала проводника, получаем $m = 2\pi^2 \rho_w R a^2$. Подставляя эти величины в (15), имеем

$$\tau = \frac{\rho_w}{\sigma_w (B \sin \varphi_0)^2}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2IB \cos \varphi_0}{\pi \rho_w R a^2}}.$$

Время релаксации колебаний не зависит от размеров конструкции.

Рассмотрим колебания мембраны, возникающие в результате воздействия на нее момента сил, вызванного, например, включением корректирующих двигателей. Если длительность включения меньше периода колебаний, то зависимость возмущения момента сил

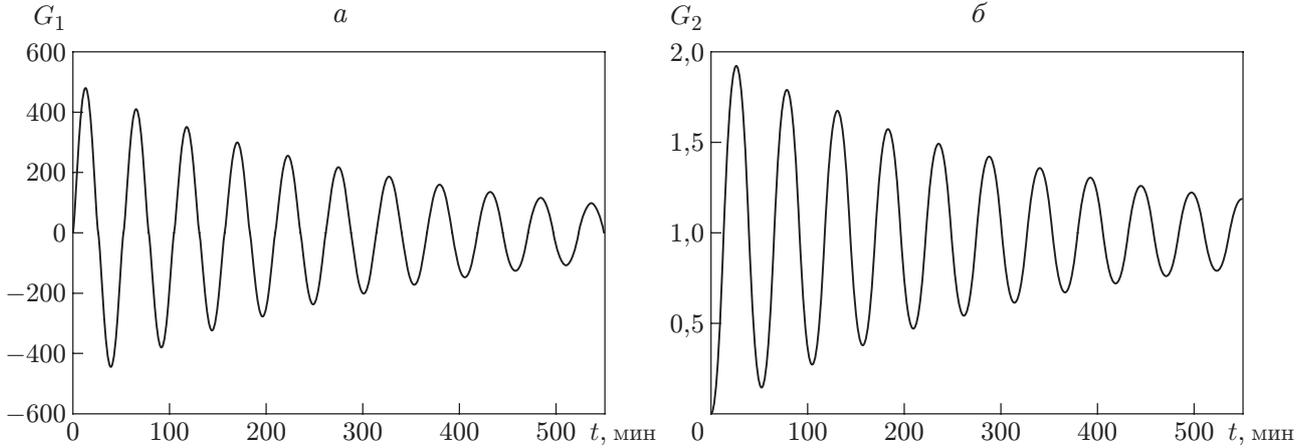


Рис. 4. Расчетная зависимость угла поворота мембраны от времени при ее вращательных колебаниях ($1/\sigma_w = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $\rho_w = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $B = 10^{-4}$ Тл, $\varphi_0 = \pi/4$, $R = 10$ м, $a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\Omega = 2 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, $\tau = 10^4$ с):

a — $A(t) = A_0\delta(t)$, $G_1(t) = \varphi(t)/A_0$; b — $A(t) = A_0\eta(t)$, $G_2(t) = \varphi(t)\Omega^2/A_0$

от времени можно представить в виде δ -функции: $A(t) = A_0\delta(t)$. Подставляя эту функцию в равенство (16), получаем

$$\varphi(t) = A_0 \frac{2\tau}{\sqrt{(2\tau\Omega)^2 - 1}} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \sin\left(\sqrt{(2\tau\Omega)^2 - 1} \frac{t}{2\tau}\right). \quad (17)$$

На рис. 4,а приведена зависимость $G_1(t) = \varphi(t)/A_0$, полученная с использованием формулы (17). Видно, что мембрана совершает затухающие колебания. Закономерности колебаний мембраны в переходном режиме можно определить, подставляя в (16) зависимость возмущения момента сил от времени в виде единичной функции Хевисайда $A(t) = A_0\eta(t)$. В результате получаем

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{\Omega^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \left[\cos\left(\sqrt{(2\tau\Omega)^2 - 1} \frac{t}{2\tau}\right) + \frac{1}{\sqrt{(2\tau\Omega)^2 - 1}} \sin\left(\sqrt{(2\tau\Omega)^2 - 1} \frac{t}{2\tau}\right) \right] \right\}. \quad (18)$$

На рис. 4,б приведена функция $G_2(t) = \varphi(t)\Omega^2/A_0$, полученная по формуле (18). Видно, что мембрана совершает затухающие колебания относительно равновесного значения угла поворота $\varphi_0 + A_0/\Omega^2$. Рассмотрим спектральные характеристики мембраны, совершающей вращательные колебания. Используя в (16) разложение функций в интеграл Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \varphi(\omega), \quad A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) A(\omega),$$

получаем

$$G(\omega) = \frac{|\varphi(\omega)|}{|A(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}.$$

На рис. 5 приведена зависимость функции G от частоты. Функция имеет максимум при частоте $\omega = 2 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, соответствующей периоду резонанса $T = 2\pi/\omega = 50$ мин.

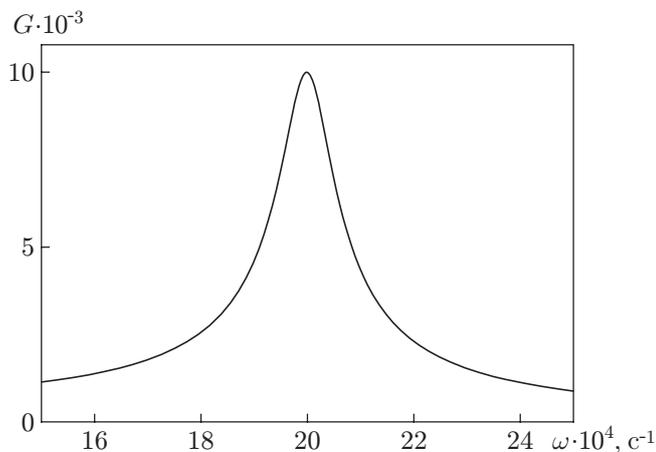


Рис. 5. Зависимость функции G от частоты ($1/\sigma_w = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $\rho_w = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $B = 10^{-4}$ Тл, $\varphi_0 = \pi/4$, $R = 10$ м, $a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\Omega = 2 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, $\tau = 10^4$ с)

Заключение. С использованием предлагаемого метода расчета колебаний бескаркасной пленочной мембраны, стабилизируемой силой Ампера, в условиях невесомости можно определить собственные частоты ее колебаний. Этот метод позволяет подобрать минимальное значение тока в проводниках, при котором период основной гармоники поперечных колебаний мембраны будет больше периода ее вращения. В этом случае форма мембраны меняется незначительно.

Анализ вынужденных колебаний мембраны показал, что при использовании рассматриваемого метода стабилизации пленочных конструкций в космосе с помощью силы Ампера паразитные колебания, возникающие при воздействии на пленку возмущающих сил, могут быть уменьшены. Поэтому предлагаемый метод является более предпочтительным по сравнению с методом стабилизации центробежными силами. Уменьшение амплитуды колебаний возможно при таком выборе параметров конструкции, при котором частота основной моды больше частоты вынуждающей силы. Влияние геомагнитного поля на движущуюся пленочную конструкцию обуславливает появление резонанса при колебательном вращении относительно оси, направление которой совпадает с направлением вектора момента механических сил, не допускающих изменения ориентации пленочной батареи на Солнце. Порядок величины периода резонансных колебаний может быть близок к порядку величины периода вращения пленочной батареи относительно Земли. Эти колебания затухают в результате возбуждения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре, расположенном на поверхности пленки, и выделения тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенов Ю. П., Соколов Б. А., Сенкевич В. П. и др. Перспективы большой космической энергетики // Конверсия в машиностроении. 2002. № 6. С. 11–16.
2. Guha S., Yang J., Benerjee A. Amorphous silicon alloy photovoltaic research — present and future // Progr. Photovolt. Phys. Appl. 2000. V. 8. P. 141–150.
3. Yang J., Benerjee A., Guha S. Amorphous silicon based photovoltaics — from earth to the “final frontier” // Solar Energy Materials Solar Cells. 2003. V. 78, N 1–4. P. 597–612.
4. Melnikov V. M. Large space structures formed by centrifugal forces / V. M. Melnikov, V. A. Koshelev. Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1998.

5. **Мельников В. М., Комков В. А., Кабдулин Г. В.** Бескаркасные космические солнечные батареи // Полет. 2005. № 7. С. 43–49.
6. **Sorokin V., Chmyrev V., Yaschenko A.** Electrodynamic mechanism for deployment and stabilization of thin film structures in space // Geophys. Res. Abstr. 2005. V. 7. 02137.
7. **Сорокин В. М., Чмырев В. М., Яценко А. К.** О напряженно-деформированном состоянии пленочных конструкций в космосе при электродинамическом раскрытии // Космич. исслед. 2007. Т. 45, № 6. С. 536–542.
8. **Ландау Л. Д.** Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
9. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.
10. **Абрамовиц М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
11. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.
12. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
13. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

*Поступила в редакцию 15/VI 2012 г.,
в окончательном варианте — 26/III 2013 г.*
