

УДК 532.5:532.517.4

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА.

1. НЕВЯЗКАЯ ЗАДАЧА

Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

* Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008 Новосибирск

E-mails: grigor@ict.nsc.ru, i_ershov@ngs.ru

В рамках линейной теории исследована устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа с параболическим профилем статической температуры. Для невязких возмущений, описываемых системой линеаризованных уравнений двухтемпературной газовой динамики, в явном виде получен ряд асимптотических оценок. Показано, что для неустойчивых мод выполняется первое условие (теорема) Рэлея и справедлива классификация невязких мод на четные и нечетные. Получено обобщенное условие наличия точки перегиба на профиле скорости, необходимое для развития неустойчивостей. Уточнено достаточное условие в теореме о полукруге. Выполнены численные расчеты комплексных фазовых скоростей двумерных четных и нечетных невязких мод в зависимости от числа Маха, степени возбуждения колебательных уровней энергии и характерного времени релаксации. Отмечено, что в отличие от случая свободного сдвигового слоя в задаче Куэтта с увеличением числа Маха инкремент нарастания наиболее неустойчивой моды Π возрастает, стремясь к некоторому пределу, для которого получена асимптотика в форме обыкновенного дифференциального уравнения. Результаты расчетов показывают, что в рассмотренном диапазоне параметров течения четко выражен эффект уменьшения инкрементов нарастания на фоне релаксационного процесса.

Ключевые слова: линейная теория устойчивости, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной аэродинамики, невязкие моды возмущений.

Введение. В работах [1, 2] устойчивость плоского дозвукового течения Куэтта термически неравновесного молекулярного газа рассматривалась на основе нелинейной энергетической теории. Проведенное в этих работах обобщение теории на случай сжимаемых течений позволило получить критические числа Рейнольдса Re_{cr} , в том числе для слабо-неравновесного газа. Найденные значения Re_{cr} по порядку величины совпадают с критическими числами Рейнольдса, полученными в аналогичной постановке для несжимаемого течения [3]. Этот результат подтверждает известное представление о том, что дозвуковое течение Куэтта можно считать практически несжимаемым. Вместе с тем в обоих случаях экспериментально полученные значения Re_{cr} превышают расчетные значения на несколько порядков. При этом для несжимаемой жидкости в настоящее время отсутствуют подходы, позволяющие сблизить данные теории и эксперимента. До последнего времени единственной альтернативой энергетической теории была классическая линейная теория

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00064).

© Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., 2014

устойчивости, в рамках которой плоское течение Куэтта несжимаемой жидкости изучалось во многих работах (см. [4]). В [5] показана абсолютная устойчивость этого течения при всех числах Рейнольдса и произвольных длинах волн возмущений.

Для случая течения Куэтта сжимаемого газа к настоящему времени сложилась не столь определенная ситуация. Приложению линейной теории устойчивости к исследованию плоского течения Куэтта с учетом сжимаемости посвящено значительно меньшее число работ. В ранних публикациях (см. работу [4] и библиографию к ней) рассматривались упрощенные модели, более общие результаты получены в работах [4, 6] и сравнительно недавно изданной работе [7], объединенных общей постановкой задачи. Результаты асимптотических исследований устойчивости в невязком пределе, а также при больших, но конечных числах Рейнольдса представлены только в работе [4]. При этом для нахождения асимптотики спектра собственных мод для конечных чисел Рейнольдса использовался метод возмущений, отличающийся от традиционного подхода, применяемого в линейной теории [8]. В частности, не рассматривалось асимптотическое построение кривой нейтральной устойчивости.

В работах [4, 6, 7] основные результаты численных расчетов получены методом колокаций с использованием QZ-алгоритма для нахождения спектра фазовых скоростей возмущений. Тем не менее результаты работ [6, 7] противоречат более ранним результатам [4]. В [4] выявлены сильное стабилизирующее влияние вязкости и отсутствие растущих вязких мод вплоть до значений числа Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^6$ при числах Маха $M_\infty \leq 5$. Отсутствие растущих вязких мод было зафиксировано также на основе асимптотических поправок к результатам исследований, полученным в невязком пределе. В то же время в численных расчетах [6, 7] найдены неустойчивые вязкие моды при близких числах Рейнольдса, хотя большинство результатов получено для гиперзвуковых чисел Маха $M_\infty = 8 \div 12$. Более того, в [6] обнаружено, что в некотором диапазоне длин волн, чисел Рейнольдса и Маха вязкость оказывает дестабилизирующее воздействие, в частности возникает неустойчивость выделенной моды, устойчивой в невязком пределе.

Возможной причиной указанного различия является несовершенство реализации численного метода в работе [4], в которой использовалась авторская разработка, в отличие от работ [6, 7], в которых применялось профессиональное математическое обеспечение (в [6] оно дополнительно тестировалось на основе альтернативного конечно-разностного метода). Однако в [6, 7] не рассматривалась невязкая задача и отсутствуют какие-либо асимптотические оценки, подтверждающие результаты численных расчетов.

Общие характеристики линейной устойчивости плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного газа рассматривались в работе [9], в которой показано значительное стабилизирующее воздействие релаксационного процесса. Линейная устойчивость течения Куэтта в условиях его существенного отклонения от термодинамического равновесия до последнего времени не исследовалась. Следует отметить, что в работах [4, 6, 7] влияние объемной вязкости, отражающей слабую неравновесность внутренних степеней свободы молекул газа, исключалось с помощью соотношения Стокса. Поэтому представляет интерес использование линейной теории с целью исследования влияния термической неравновесности на характеристики устойчивости классического течения. Результаты, полученные на основе линейной теории для невозбужденного газа, свидетельствуют о возможности достижения лучшего соответствия по порядку величины расчетных и экспериментальных критических чисел Рейнольдса по сравнению с результатами [1, 2], по крайней мере для сверхзвуковых чисел Маха. Кроме того, целью данной работы является устранение противоречия результатов работ [4] и [6, 7], а также получение корректных асимптотических оценок характеристик устойчивости для невязкого и вязкого случаев течения невозбужденного газа.

1. Основные уравнения. Рассматривается задача линейной устойчивости плоско-го сжимаемого течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. В координатной плоскости поток ограничен двумя бесконечными параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно h . Считается, что плоскость $y = 0$ покоится, а граница $y = h$ движется равномерно в собственной плоскости со скоростью U_0 . Течение описывается в рамках модели двухтемпературной аэродинамики [10, 11]. В качестве характерных величин для обезразмеривания были выбраны ширина канала h , скорость границы U_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения на движущейся границе канала, время $t_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. В безразмерных переменных система уравнений двухтемпературной аэродинамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{\rho \gamma_v (T_v - T)}{\tau} + \\ + \frac{\gamma(\gamma - 1) M^2}{2 \text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right], \quad (1) \\ \gamma_v \rho \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial T_v}{\partial x_j} \right) = \frac{20}{33} \frac{\gamma \gamma_v}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T_v}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}, \\ \gamma M^2 p = \rho T, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В уравнениях системы (1) $\alpha_1 = \eta_b/\eta$ — отношение объемной вязкости к сдвиговой; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты; $c_v = c_{v,t} + c_{v,r}$, $c_p = c_v + R$ — соответственно удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении, представленные в виде суммы теплоемкостей, обусловленных поступательным и вращательным движением молекул; $\gamma_v = c_{v,v}/(c_{v,t} + c_{v,r})$ — параметр, характеризующий степень неравновесности колебательной моды; $c_{v,v}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме, соответствующая релаксирующей колебательной моде; τ — характерное время релаксации колебательной моды; R — газовая постоянная; $\text{Re} = \rho_0 h U_0 / \eta$ и $M = U_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ — соответственно числа Рейнольдса и Маха несущего потока; $\text{Pr} = \eta c_v / \lambda$ — число Прандтля; $\lambda = \lambda_t + \lambda_r$ — теплопроводность, определяемая поступательными и вращательными степенями свободы молекул.

Предполагается, что в невозмущенном стационарном потоке все параметры зависят только от поперечной координаты y . Принимается, что статическая T_s и колебательная $T_{v,s}$ температуры равны: $T_s(y) = T_{v,s}(y)$. Для исходного течения ставятся следующие граничные условия:

$$U_s(0) = 0, \quad U_s(1) = 1, \quad \left. \frac{dT_s}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad T_s(1) = 1.$$

При этом точное решение системы (1) задается соотношениями

$$U_s(y) = y, \quad T_s(y) = T_{v,s}(y) = 1 + \frac{(\gamma - 1) \text{Pr} M^2}{2} (1 - y^2), \quad \rho_s(y) = \frac{1}{T_s(y)}, \quad p_s(x_2) = \frac{1}{\gamma M^2}. \quad (2)$$

Мгновенные значения полей возмущенного потока представляются в виде суммы исходных значений (2) и малых пульсаций, зависящих от времени и обеих координат в плоскости течения:

$$u_1 = U_s + \hat{u}_x, \quad u_2 = \hat{u}_y, \quad \rho = \rho_s + \hat{\rho}, \quad T = T_s + \hat{T}, \quad T_v = T_{v,s} + \hat{T}_v, \quad p = p_s + \hat{p}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в систему (1) и линеаризуя ее относительно стационарного решения (2), в первом приближении получаем систему уравнений для малых возмущений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \rho_s \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) + \hat{u}_y \frac{\partial \rho_s}{\partial y} = 0, \\
& \rho_s \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial x \partial y} \right), \\
& \rho_s \left(\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial y^2} \right), \\
& \rho_s \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) + \gamma(\gamma - 1) M^2 p_s \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) = \\
& \quad = \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} \right) + \frac{\gamma v \rho_s (\hat{T}_v - \hat{T})}{\tau} + \frac{2\gamma(\gamma - 1) M^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right) \frac{dU_s}{dy}, \\
& \gamma v \rho_s \left(\frac{\partial \hat{T}_v}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{T}_v}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_{v,s}}{\partial y} \right) = \frac{20}{33} \frac{\gamma \gamma v}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_v}{\partial y^2} \right) - \frac{\gamma v \rho_s (\hat{T}_v - \hat{T})}{\tau}, \\
& \gamma M^2 \hat{p} = \rho_s \hat{T} + \hat{p} T_s.
\end{aligned} \tag{4}$$

Предполагается, что на границах канала при $y = 0$ и $y = 1$ все возмущения обращаются в нуль и периодичны по продольной координате x .

2. Необходимые условия неустойчивости невязких мод. Периодические по x возмущения рассматривались в виде бегущих плоских волн:

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}_0(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \mathbf{q}(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{\rho}, \hat{T}, \hat{T}_v, \hat{p}), \quad \mathbf{q}_0(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_v, p). \tag{5}$$

Здесь α — волновое число; $c = c_r + ic_i$ — комплексная фазовая скорость; i — мнимая единица.

Подставляя (5) в уравнения системы (4), для вектора амплитуд $\mathbf{q}_0(y)$ получаем систему уравнений, в которой при рассмотрении невязких возмущений опущены диссипативные слагаемые, что эквивалентно нулевому приближению в асимптотическом разложении решения (5) по степеням малого параметра Re^{-1} . Полученная таким образом система имеет вид

$$\begin{aligned}
& D\rho + \alpha \rho'_s v + \rho_s \sigma = 0, \quad \rho_s D u + \alpha \rho_s v U'_s + i\alpha p = 0, \quad \alpha \rho_s D v + p' = 0, \\
& \rho_s D \theta + \alpha \rho_s v T'_s + (\gamma - 1)\sigma - \frac{\gamma v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) = 0, \quad \rho_s D \theta_v + \alpha \rho_s v T'_s + \frac{\rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) = 0, \tag{6} \\
& \gamma M^2 p = \rho_s \theta + \rho T_s, \quad D = i\alpha(U_s - c), \quad \sigma = \alpha(v' + iu)
\end{aligned}$$

(штрихи означают дифференцирование по переменной y). На стенках канала амплитудные функции принимают нулевые значения.

После частичного исключения зависимых переменных система (6) сводится к двум уравнениям для амплитудных функций возмущений поперечной скорости и давления:

$$\begin{aligned}
& v' - \frac{v U'_s}{W} - \frac{ip T_s}{W} \left(1 - \frac{M^{*2} W^2}{T_s} \right) = 0, \quad p' + \frac{i\alpha^2 W}{T_s} v = 0, \\
& v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0, \quad p|_{y=0} = p|_{y=1} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$W = U_s - c, \quad M^{*2} = m^2 M^2, \quad m^2 = m_r^2 + im_i^2,$$

$$m_r^2 = \frac{R_1(1 + \gamma_v + \alpha\tau c_i) + \Delta^2}{R_1^2 + \Delta^2}, \quad m_i^2 = -\frac{\gamma_v(\gamma - 1)\Delta}{\gamma(R_1^2 + \Delta^2)},$$

$$R_1 = 1 + \gamma_v/\gamma + \alpha\tau c_i, \quad \Delta = \alpha\tau W_r, \quad W_r = U_s - c_r.$$

Из (7) путем дифференцирования получаются замкнутые уравнения для v и p .

В самосопряженной форме уравнение для амплитудной функции возмущения давления записывается в виде (ср. [9])

$$\left(\frac{T_s p'}{W^2}\right)' - \alpha^2\left(\frac{T_s}{W^2} - M^{*2}\right)p = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим квадратичную форму для (8), которая получается в результате умножения уравнения на комплексно-сопряженную функцию \bar{p} и интегрирования по y в интервале $[0, 1]$ с граничными условиями (7). После интегрирования по частям эта форма принимает вид

$$A \equiv \int_0^1 \left[\frac{T_s}{W^2} |p'|^2 + \alpha^2 \left(\frac{T_s}{W^2} - M^{*2} \right) |p|^2 \right] dy = 0. \quad (9)$$

Действительная часть (9) есть

$$\text{Real}(A) \equiv A_r = \int_0^1 [W_r^2 - c_i^2] Q dy - K = 0, \quad K = \alpha^2 M^2 \int_0^1 m_r^2 |p|^2 dy, \quad (10)$$

а мнимая часть определяется выражением

$$\text{Imag}(A) \equiv A_i = \int_0^1 W_r [2c_i Q + \alpha^2 M^2 Q_1 |p|^2] dy = 0. \quad (11)$$

В (10), (11) введены следующие обозначения:

$$Q = \frac{T_s(|p'|^2 + \alpha^2 |p|^2)}{|W|^4}, \quad Q_1 = \frac{\gamma_v(\gamma - 1)\alpha\tau}{\gamma(R_1^2 + \Delta^2)}.$$

Для данной постановки представляет интерес проверка выполнения первого и второго необходимых условий (теорем) Рэля существования возрастающих невязких возмущений, а также теоремы о полукруге [9, 12–14], поскольку в [12], а также в [9] эти условия были получены для постоянных профилей исходных термодинамических параметров $T_s = \rho_s = 1$, а профиль скорости не конкретизировался.

Для проверки первого условия Рэля достаточно заметить, что выражение в квадратных скобках в (11) неотрицательно. Поэтому для возрастающих возмущений при $c_i > 0$ мнимая часть $A_i = 0$ тогда и только тогда, когда разность $W_r = U_s - c_r$ меняет знак в поле течения. Следовательно, для рассматриваемого течения Куэтта с параболическим профилем температуры первое условие Рэля сохраняет обычную форму

$$\min U_s \equiv u < c_r < U \equiv \max U_s,$$

т. е. для любого возрастающего невязкого возмущения значения комплексной фазовой скорости s должны находиться в верхней полуплоскости $c_i > 0$ в полуполосе $[u, U]$ (в данном случае — в интервале $[0, 1]$).

Второе условие Рэля (обобщенное условие точки перегиба [13, 14]) в [9] получено при рассмотрении квадратичной формы (9) в труднообозримом виде. В качестве альтернативы

можно использовать уравнение для амплитуды возмущения v , которое представляется в дивергентной форме

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{Wv' - vU'_s}{\chi} \right) = \frac{\alpha^2 W}{T_s} v, \quad (12)$$

$$v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0, \quad \chi = T_s - M^{*2} W^2.$$

Если умножить уравнение (12) на комплексно-сопряженную функцию \bar{v} и вычесть из него комплексно-сопряженное уравнение, умноженное на v , то получится уравнение

$$\bar{v} \frac{d}{dy} \left(\frac{v'}{\chi} \right) - v \frac{d}{dy} \left(\frac{\bar{v}'}{\bar{\chi}} \right) = \frac{|v|^2}{|W|^2} \left[\bar{W} \frac{d}{dy} \left(\frac{U'_s}{\chi} \right) - W \frac{d}{dy} \left(\frac{U'_s}{\bar{\chi}} \right) \right], \quad (13)$$

где $\bar{\chi} = T_s - \overline{M^{*2} W^2}$.

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, следует заметить, что при $c_i \rightarrow 0$ можно положить

$$\chi \approx \tilde{\chi} = \tilde{\chi}_r + i\tilde{\chi}_i = T_s - \tilde{m}_r^2 M^2 W_r^2 - i\tilde{m}_i^2 M^2 W_r^2 = T_s - \tilde{m}_r^2 M^2 W_r^2 \left(1 + i \frac{\tilde{m}_i^2}{\tilde{m}_r^2} \right), \quad (14)$$

где

$$\tilde{m}_r^2 = \frac{\tilde{R}_1(1 + \gamma_v) + \Delta^2}{\tilde{R}_1^2 + \Delta^2}, \quad \tilde{m}_i^2 = -\frac{\gamma_v}{\gamma} \frac{(\gamma - 1)\Delta}{\tilde{R}_1^2 + \Delta^2}, \quad \tilde{R}_1 = 1 + \frac{\gamma_v}{\gamma}.$$

В рассматриваемых условиях течения Куэтта двухатомного газа имеет место оценка

$$\frac{|\tilde{m}_i^2|}{\tilde{m}_r^2} = \frac{\gamma_v}{\gamma} \frac{(\gamma - 1)\Delta}{(1 + \gamma_v)(1 + \gamma_v/\gamma) + \Delta^2} \leq \frac{\gamma_v}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{(1 + \gamma_v)(1 + \gamma_v/\gamma)} \approx 5 \cdot 10^{-2}.$$

Это позволяет в первом приближении пренебречь мнимой частью в (14). В результате (13) преобразуется к виду

$$\frac{d\tilde{H}}{dy} = \frac{2ic_i|v|^2}{|W|^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{U'_s}{\tilde{\chi}_r} \right), \quad \tilde{H}(y) = \frac{\bar{v}v' - v\bar{v}'}{\tilde{\chi}_r}. \quad (15)$$

Из последнего уравнения следует, что непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{H}(y)$ на границах интервала определения $0 \leq y \leq 1$ принимает нулевые значения. Поэтому согласно известной теореме математического анализа ее производная (левая часть (15)) должна обращаться в нуль в некоторой внутренней точке \tilde{y} интервала $[0, 1]$. Для возрастающих возмущений $c_i > 0$ это достигается, если

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{U'_s}{\tilde{\chi}_r} \right) \Big|_{y=\tilde{y}} = 0. \quad (16)$$

Полученное соотношение является очевидным обобщением второго условия (теоремы) Рэлея о необходимости наличия точки перегиба на неустойчивом профиле в идеальной жидкости. (В работе [6] обобщенное условие наличия точки перегиба ошибочно трактуется как необходимое для нейтральной устойчивости.)

Следует отметить, что в случае идеального газа при анализе уравнения, соответствующего (15), в [4] была допущена ошибка. Для невозбужденного газа $M^* = M$ и при $c_i \rightarrow 0$ уравнение (13) принимает вид (15), где $\tilde{\chi}_r = T_s - M^2 W_r^2$. Отсюда на основе аналогичных рассуждений следует условие вида (16) (ср. (5.11) в [4]). В частности, при заданных распределениях T_s, U_s (2) для идеального газа нетрудно показать, что обобщенная точка перегиба определяется выражением

$$\tilde{y} = c_r \left(1 + \frac{(\gamma - 1)\text{Pr}}{2} \right)^{-1}$$

и с учетом первого условия Рэлея для c_r действительно находится в интервале $0 \leq y \leq 1$.

При доказательстве теоремы о полукруге в качестве исходного соотношения рассматривается неравенство [9, 14]

$$\int_0^1 (U_s - u)(U_s - U)Q dy = I_2 - (U + u)I_1 + uUI_0 \leq 0. \quad (17)$$

С учетом заданного линейного профиля скорости интегралы в (17) определяются выражениями

$$I_0 = \int_0^1 Q dy, \quad I_1 = \int_0^1 yQ dy, \quad I_2 = \int_0^1 y^2 Q dy.$$

Кроме того, эти интегралы выражаются из (10), (11) в виде

$$I_1 = c_r I_0 - \frac{J}{2c_i}, \quad J = \alpha^2 M^2 \int_0^1 (y - c_r) Q_1 |p|^2 dy, \quad I_2 = 2c_r I_1 - (c_r^2 - c_i^2) I_0 + K.$$

Подстановка этих выражений в неравенство (17) позволяет преобразовать его к виду

$$\left[\left(c_r - \frac{1}{2} \right)^2 + c_i^2 - \frac{1}{4} \right] I_0 + \frac{1}{c_i} \left(\frac{1}{2} - c_r \right) J + K \leq 0.$$

Очевидно, что при условии

$$\left(\frac{1}{2} - c_r \right) J + c_i K \geq 0 \quad (18)$$

для любой неустойчивой невязкой моды при $c_i > 0$ значения комплексной фазовой скорости лежат в верхней полуплоскости в полукруге радиусом $r_0 = 1/2$ с центром в точке $c_r = 1/2$, т. е. условие (18) является достаточным для справедливости теоремы о полукруге.

В случае идеального газа $J = 0$, $c_i K \geq 0$ и теорема о полукруге, доказанная в [12], справедлива также для течения Куэтта с параболическим профилем температуры. В [9] отмечено, что в силу непрерывности неравенство (18) выполнено также при малых степенях возбуждения для $\gamma_v \rightarrow 0$, но в общем случае в [9] неравенство (18) было включено в формулировку теоремы в качестве достаточного условия.

При заданных исходных профилях скорости и температуры можно получить более корректную оценку условия (18). Для возрастающих возмущений первое условие Рэлея в данном случае определяется неравенством $0 < c_r < 1$, поэтому условие (18) следует рассмотреть отдельно для $0 < c_r < 1/2$ и $1/2 \leq c_r < 1$. При $0 < c_r < 1/2$ из (18) можно получить оценку снизу

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - c_r \right) J + c_i K &= \left(\frac{1}{2} - c_r \right) \alpha^2 M^2 \int_0^1 \frac{\gamma_v (\gamma - 1) \alpha \tau}{\gamma (R_1^2 + \Delta^2)} (y - c_r) |p|^2 dy + \\ &+ \alpha^2 M^2 c_i \int_0^1 \frac{R_1 (1 + \gamma_v + \alpha \tau c_i) + \Delta^2}{R_1^2 + \Delta^2} |p|^2 dy \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - c_r \right) \alpha^4 M^2 \tau^2 c_i \int_0^1 \frac{|p|^2}{R_1^2 + \Delta^2} \left[\left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma_v (\gamma - 1)}{\gamma \alpha \tau} + \frac{R_1 c_i}{\alpha \tau} \right] dy. \end{aligned}$$

Из последнего интеграла следует, что неравенство (18) выполнено, если квадратный трехчлен в подынтегральном выражении не имеет действительных корней в интервале $0 \leq y \leq 1/2$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$y^2 + ry + q \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1/2,$$

где

$$r = \frac{\gamma_v(\gamma - 1)}{\gamma\alpha\tau} - 1, \quad q = \frac{1}{4} - \frac{\gamma_v(\gamma - 1)}{2\gamma\alpha\tau} + \frac{R_1 c_i}{\alpha\tau}.$$

Условие комплексной сопряженности (кратности) корней выражается неравенствами

$$\frac{\gamma_v(\gamma - 1)}{\gamma\alpha\tau} < 1, \quad \frac{R_1}{\alpha\tau} < 1. \quad (19)$$

После исключения из (19) комплекса $\alpha\tau$ получается неравенство

$$\gamma_v(1 - 2/\gamma) < 1,$$

которое при рассматриваемых степенях возбуждения всегда выполнено.

При $1/2 \leq c_r < 1$ для (18) оценка снизу получается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - c_r\right)J + c_i K &= \left(\frac{1}{2} - c_r\right)\alpha^2 M^2 \int_0^1 \frac{\gamma_v(\gamma - 1)\alpha\tau}{\gamma(R_1^2 + \Delta^2)} (y - c_r) |p|^2 dy + \\ &+ \alpha^2 M^2 c_i \int_0^1 \frac{R_1(1 + \gamma_v + \alpha\tau c_i) + \Delta^2}{R_1^2 + \Delta^2} |p|^2 dy \geq \\ &\geq \left(c_r - \frac{1}{2}\right)\alpha^4 M^2 \tau^2 c_i \int_0^1 \frac{|p|^2}{R_1^2 + \Delta^2} \left[(y - c_r)^2 - (y - c_r) \frac{\gamma_v(\gamma - 1)}{\gamma\alpha\tau} + \frac{R_1 c_i}{\alpha\tau}\right] dy. \end{aligned}$$

В данном случае для выполнения неравенства (18) достаточно, чтобы выделенный в подынтегральном выражении квадратный трехчлен не обращался в нуль на интервале $1/2 < y \leq 1$. Из условия комплексной сопряженности (кратности) корней этого трехчлена также следуют неравенства (19), не налагающие строгие ограничения на комплекс $\alpha\tau$, так как при $\alpha\tau \rightarrow 0$ неравенство (18) будет выполнено. Кроме того, из (19) не следует ограничения на степень возбуждения γ_v . Можно добавить, что в данном случае доказательство теоремы о полукруге имеет скорее престижный характер, так как расчетные значения мнимой составляющей комплексной скорости (инкремента нарастания) для растущих мод имеют порядок 10^{-4} .

3. Спектральная задача. Система (6) с однородными граничными условиями представляет собой спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c = c_r + ic_i$, а число Маха M и волновое число α служат параметрами. Для расчета собственных значений $c = c_r + ic_i$ невязких мод спектральная задача (6) с однородными граничными условиями решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций [15], ранее примененный в работах [1, 2]. Следует отметить, что в работах [4, 6, 7], посвященных исследованию линейной устойчивости течения Куэтта в невозбужденном совершенном газе, также использовался метод коллокаций. В данном случае спектральная задача записывалась в матричном представлении:

$$A\varphi' + B\varphi = cK\varphi, \quad \varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=1} = 0. \quad (20)$$

Здесь $\varphi = (\rho, u, v, \theta, \theta_v)$; A, B, K — матрицы размером 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -iU_s & -i\rho_s & -\rho'_s & 0 & 0 \\ -i a_1 & -i\rho_s U_s & -\rho_s U'_s & -i b_1 & 0 \\ -i a'_1 & 0 & -\alpha a_2 & -i b'_1 & 0 \\ 0 & -i c_1 & -c_2 & -(a_2 + b_2) & b_2 \\ 0 & 0 & -\gamma v c_2 & b_2 & b + \gamma v a_2 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha^2 \rho_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\alpha \gamma v \rho_s \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{T_s}{\gamma M^2}, \quad a_2 = i\alpha \rho_s U_s, \quad b_1 = \frac{\rho_s}{\gamma M^2}, \quad b_2 = \frac{\gamma v \rho_s}{\tau}, \quad c_1 = \alpha(\gamma - 1), \quad c_2 = \alpha \rho_s T'_s.$$

В качестве узлов коллокации выбирались точки Гаусса — Лобатто

$$y_n = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

в которых полином Чебышева N -й степени $T_N(x_2)$ имеет экстремумы на отрезке $y \in [0, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данной сетке матрицей коллокационных производных D_N^1 [15] размером $(N+1) \times (N+1)$.

Построенная таким образом дискретная аппроксимация позволяет свести задачу (20) к обобщенной задаче на собственные значения относительно спектрального параметра s :

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{ij} - cF_{ij})z_j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5N+4. \quad (21)$$

Здесь вектор неизвестных \mathbf{z} размером $5(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{z} = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N, u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

матрицы G, F размером $5(N+1) \times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A \otimes D_N^1 + B \otimes I_N, \quad F = K \otimes I_N,$$

знак “ \otimes ” обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [16]; I_N — единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$.

Однородные граничные условия для уравнения (21) учитываются неявно через оператор D_N^1 [15] и на дискретном уровне реализуются заменой матрицы D_N^1 на окаймленную матрицу размером $(N-1) \times (N-1)$. Последняя получается при выполнении условий

$$D_{0,j}^1 = D_{N,j}^1 = 0, \quad D_{i,0}^1 = D_{i,N}^1 = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N.$$

Для нахождения всех собственных значений и соответствующих собственных функций обобщенной спектральной задачи (21) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм, который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений числа Маха M , степени неравновесности

Максимальные значения инкрементов роста ω^{\max}
и соответствующие им значения волновых чисел α

M	$\gamma_v = 0$			$\gamma_v = 0,667, \tau = 1$		
	α	$c_i^{\max} \cdot 10^4$	$\omega^{\max} \cdot 10^3$	α	$c_i^{\max} \cdot 10^4$	$\omega^{\max} \cdot 10^3$
0	12,9870	0,0248	0,0322	12,9760	0,0198	0,0257
0,5	8,5405	0,1296	0,1107	8,5476	0,1102	0,0942
1	6,4498	0,4112	0,2652	6,4504	0,3485	0,2248
2	4,9681	1,5962	0,7930	4,9713	1,4002	0,6961
3	4,3550	4,2418	1,8473	4,3575	3,3785	1,4722
4	3,9102	6,7012	2,6203	3,9186	5,8698	2,3001
5	3,5973	8,8636	3,1885	3,6017	8,3005	2,9896
10	3,1250	14,2480	4,4525	3,1295	13,9480	4,3650
20	3,0055	16,2490	4,8836	2,9918	16,0490	4,8016
30	2,9690	16,5490	4,9134	2,9710	16,2490	4,8476
40	2,9644	16,6980	4,9499	2,9698	16,3980	4,8699
∞	2,9555	17,0000	5,0244	2,9585	16,5000	4,8815

колебательной энергии γ_v , времени колебательной релаксации τ и волнового числа α получался набор $N + 1$ собственных значений $c = c_r + ic_i$.

В предварительных расчетах число узлов коллокации на интервале $y \in [0, 1]$ изменялось от $N + 1 = 30$ до $N + 1 = 250$. Отмечено, что при $N + 1 < 60$ варьирование параметра γ_v не влияет на значения мнимой фазовой скорости c_i . Однако при $N + 1 \geq 60$ варьирование значений γ_v приводит к изменению значений c_i , при этом $c_i \sim 10^{-4}$ (см. таблицу). В дальнейших расчетах число узлов коллокации на интервале $y \in [0, 1]$ принималось равным $N + 1 = 152$.

Для проверки точности используемого метода проведены расчеты собственных значений с помощью метода “стрельбы”. Для этого уравнения (7) заменялись уравнениями и граничными условиями для вещественных и мнимых частей функций v и p . Полученная таким образом система при фиксированных наборах параметров $M, \text{Pr}, \gamma_v, \tau$ интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге — Кутты четвертого порядка на интервалах $y \in [0; 0,5]$ и $y \in [0,5; 1,0]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Точкой “прицеливания” служила середина канала ($y = 0,5$). Значения c_r и c_i подбирались таким образом, чтобы вычисленные “слева” и “справа” в точке $y = 0,5$ значения функций v_r, p_r, v_i, p_i совпадали с точностью до 10^{-8} . Соответствующее такому совпадению значение c принималось в качестве собственного значения при заданном наборе параметров $M, \text{Pr}, \gamma_v, \tau$. Сравнение результатов, полученных с помощью методов коллокаций и “стрельбы”, показало, что различия значений $c = c_r + ic_i$ наблюдаются лишь в шестом-седьмом десятичных знаках после запятой. Таким образом была обеспечена необходимая точность вычисления инкрементов (декрементов) возмущений.

4. Результаты расчетов. Параметрические расчеты спектральной задачи показали, что изменение значений времени колебательной релаксации в диапазоне $10^{-2} \leq \tau \leq 10$ оказывает слабое влияние на поведение кривых $c_r(\alpha, \gamma_v, M)$ и $c_i(\alpha, \gamma_v, M)$. Поэтому ниже расчетные данные приведены для одного значения характерного времени $\tau = 1$.

Классификация невязких мод на четные и нечетные и характер их поведения в случае идеального газа [4, 6, 7] сохраняются и для колебательно-возбужденного газа [11]. Характерные графики зависимостей $c_r(\alpha)$ для мод обоих семейств приведены на рис. 1. Видно, что для нечетных мод при $\alpha \rightarrow 0$ $c_r > 1$ и для всех мод, кроме моды I, $c_r \rightarrow \infty$. В то же время для четных мод при $\alpha \rightarrow 0$ $c_r < 0$ и для всех мод, за исключением моды II, $c_r \rightarrow -\infty$. Выделенные моды I и II при $\alpha = 0$ имеют конечные пределы. Для этих пределов

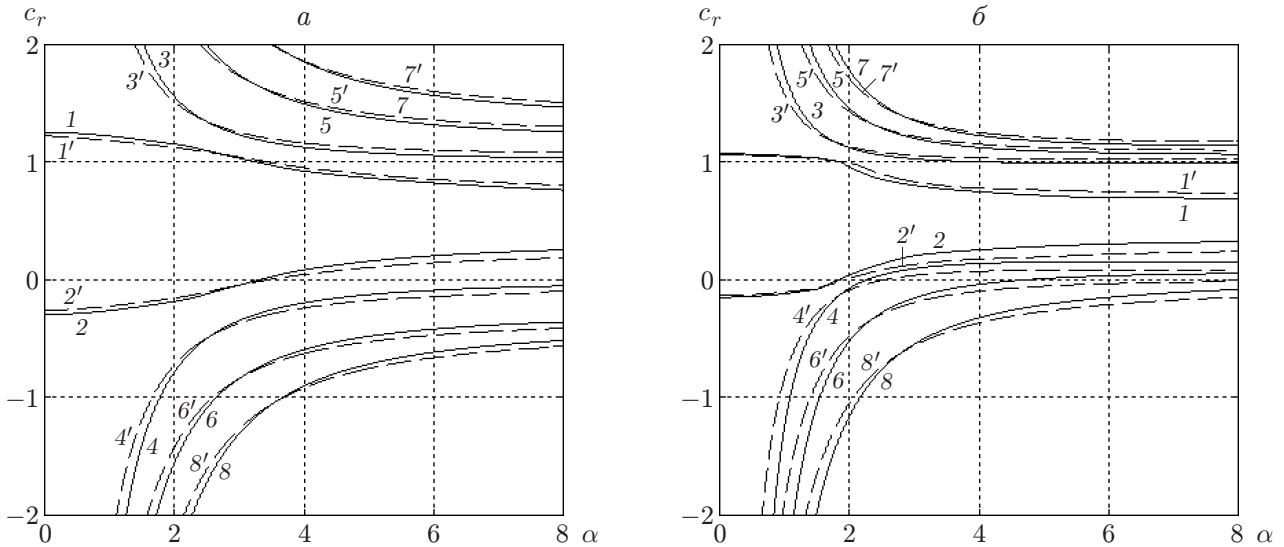


Рис. 1. Зависимость $c_r(\alpha)$ для чисел Маха $M = 2$ (а) и $M = 5$ (б):
 1, 1' — мода I, 2, 2' — мода II, 3, 3' — мода III, 4, 4' — мода IV, 5, 5' — мода V, 6, 6' — мода VI, 7, 7' — мода VII, 8, 8' — мода VIII; сплошные линии — $\gamma_v = 0$, штриховые — $\gamma_v = 0,667$, $\tau = 1$

можно получить алгебраическое уравнение, которое позволяет вычислить их значения, не решая спектральную задачу. Действительно, при $\alpha = 0$ уравнение (12) переходит в однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{Wv' - vU_s'}{\chi} \right) = 0,$$

имеющее очевидный первый интеграл в форме уравнения первого порядка, которое легко интегрируется. В результате для амплитуды поперечных пульсаций получается выражение

$$v = CW \int_0^y \left(\frac{T_s}{W^2} - M^2 \frac{1 + \gamma_v}{1 + \gamma_v/\gamma} \right) dy,$$

где профили U_s и T_s задаются соотношениями (2); C — константа интегрирования. При $y = 0$ нулевое граничное условие (7) для v выполнено. Для того чтобы граничное условие (7) выполнялось при $y = 1$, аналогично [4] необходимо положить

$$\int_0^1 \frac{T_s}{W^2} dy = M^2 \frac{1 + \gamma_v}{1 + \gamma_v/\gamma}. \tag{22}$$

Для заданных профилей скорости и температуры (2) интеграл в левой части (22) вычисляется в явном виде. В результате получается нелинейное алгебраическое уравнение для значения c при $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{c(c-1)} - \frac{(\gamma-1)\text{Pr}M^2}{2} \left(\frac{1}{c} + 2c \ln \left| \frac{c-1}{c} \right| \right) = M^2 \left(\frac{1 + \gamma_v}{1 + \gamma_v/\gamma} + (\gamma-1)\text{Pr} \right).$$

Корни этого уравнения находятся методом Ньютона. При $M = 2$, $\gamma_v = 0$

$$c_r^I = 1,2464, \quad c_i^I = -0,074\,490 \cdot 10^{-10} \quad \text{и} \quad c_r^{II} = -0,2935, \quad c_i^{II} = -0,864\,249 \cdot 10^{-10},$$

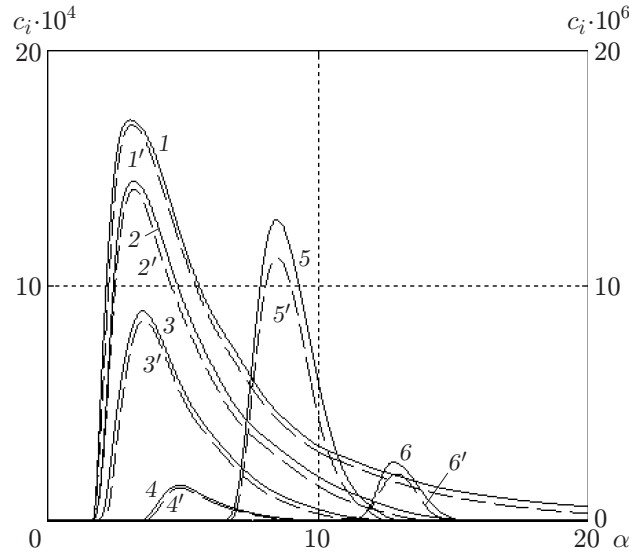


Рис. 2. Зависимость $c_i(\alpha)$ для наиболее неустойчивой моды II:
 1, 1' — $M = \infty$, 2, 2' — $M = 20$, 3, 3' — $M = 10$, 4, 4' — $M = 5$, 5, 5' — $M = 2$, 6, 6' —
 $M = 0,5$, 7, 7' — $M = 0$; сплошные линии — $\gamma_v = 0$, штриховые — $\gamma_v = 0,667$, $\tau = 1$

при $\gamma_v = 0,667$

$$c_r^I = 1,2211, \quad c_i^I = -0,181863 \cdot 10^{-10} \quad \text{и} \quad c_r^{II} = -0,2663, \quad c_i^{II} = -0,685248 \cdot 10^{-10}.$$

Абсолютное отклонение найденных корней от соответствующих собственных значений, полученных при решении спектральной задачи (6), не превышает величины 10^{-8} . Для других значений параметров получены отклонения того же порядка. Это подтверждает точность расчета собственных значений. Из рис. 1 следует, что в диапазоне волновых чисел $0 \leq \alpha < 3,4$ при $M = 2$ и в диапазоне $0 \leq \alpha < 2$ при $M = 5$ значения c_r для всех мод находятся вне интервала $[0, 1]$, в котором в соответствии с первым условием Рэлея возможно развитие неустойчивости. Устойчивость всех мод в этом диапазоне волновых чисел подтверждается соответствующими отрицательными расчетными значениями c_i . Вместе с тем в данном случае $|c_i| \ll |c_r|$, что делает устойчивость этих мод близкой к нейтральной. Тем не менее расчеты показали, что моды I и II в диапазоне $0 \leq \alpha < 3,4$ не являются нейтрально-устойчивыми, как утверждалось в [4, 6].

При $c_r < 1$ мода II становится неустойчивой во всем диапазоне чисел Маха (рис. 2). Следует отметить, что в отличие от работы [4] в данном случае в области волновых чисел $\alpha = 8 \div 10$ на расчетных кривых отсутствуют пики, не имеющие физического смысла. Четные моды с большими номерами также имеют положительные значения $c_i > 0$, которые, однако, являются величинами второго порядка малости по отношению к моде II. Нечетные моды I, III и т. д. при выполнении для них первого условия Рэлея $0 < c_r < 1$ остаются устойчивыми. При этом для фиксированных чисел Маха в области волновых чисел α , в которой достигаются максимальные значения $c_i > 0$ для моды II, имеют место соотношения $c_i^{II} \simeq |c_i^I|$.

Расчеты линейной устойчивости свободного сдвигового слоя по отношению к невязким возмущениям в идеальном [12] и колебательно-возбужденном [9] газах показали, что возрастание числа Маха приводит к уменьшению значений мнимой части фазовой скорости c_i (инкрементов нарастания $\omega = \alpha c_i$). В то же время в [4] для течения Куэтта идеального газа установлено, что инкременты наиболее неустойчивой моды II, наоборот, увеличиваются с возрастанием сжимаемости, асимптотически стремясь к определенному

конечному пределу при $M \rightarrow \infty$. В случае колебательно-возбужденного газа наблюдается аналогичное поведение инкрементов роста (см. рис. 2). На рис. 2 шкала значений c_i при $M = 0,5$; 0 расположена справа.

В предельных случаях $M \rightarrow \infty$ и $M = 0$ спектральная задача (12) упрощается. При больших значениях M выражение для профиля температуры приближенно представляется в виде

$$T_s \rightarrow M^2 \tilde{T}_s(y), \quad \tilde{T}_s(y) = \frac{(\gamma - 1)\text{Pr}}{2} (1 - y^2).$$

При $M \rightarrow \infty$ из (12) следует

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{Wv' - vU_s'}{\tilde{T}_s - m^2W^2} \right) = \frac{\alpha^2 W}{\tilde{T}_s} v, \quad v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0. \quad (23)$$

При $M = 0$ в случае идеальной несжимаемой жидкости из (12) получается вариант уравнения Рэлея [17] для амплитуды возмущения поперечной скорости

$$(Wv' - vU_s')' - \alpha^2 Wv = 0, \quad v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0. \quad (24)$$

Полученные из (23), (24) предельные значения инкрементов нарастания также приведены на рис. 2.

На рис. 2 видно, что наличие колебательной неравновесности, описываемой параметром γ_v , приводит к уменьшению значений мнимых частей фазовых скоростей $c_i(\alpha, \gamma_v)$ по сравнению со значениями $c_i(\alpha)$ для идеального газа ($\gamma_v = 0$). В таблице приведены максимальные значения мнимых частей фазовой скорости c_i^{\max} и инкрементов роста $\omega^{\max} = \alpha c_i^{\max}$ в широком диапазоне чисел Маха M при $\gamma_v = 0$; 0,667 и $\tau = 1$. Заметим, что при больших значениях числа Маха $M \geq 20$, при которых существенны эффекты реального газа и обе модели не имеют физического смысла, полученные данные являются качественными. Вместе с тем полученные результаты показывают, что в течении Куэтта четко выражен эффект понижения инкрементов нарастания неустойчивых невязких мод на фоне релаксационного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю. Н., Ершов И. В. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 5. С. 59–67.
2. Григорьев Ю. Н., Ершов И. В. Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 57–73.
3. Гольдштик М. А. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
4. Duck P. W., Erlebacher G., Hussaini M. Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 131–165.
5. Романов В. А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 5. С. 1049–1051.
6. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. Fluids. 1998. V. 10, N 3. P. 709–729.
7. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Phys. Rev. E. 2008. V. 77, iss. 3. P. 036322(15).
8. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

9. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно-возбужденного двухатомного газа // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 45, вып. 4. С. 581–593.
10. **Нагнибеда Е. А.** Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов / Е. А. Нагнибеда, Е. В. Кустова. СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 2003.
11. **Григорьев Ю. Н.** Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.
12. **Blumen W.** Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // J. Fluid Mech. 1970. V. 40, pt 4. P. 769–781.
13. **Drazin P. G., Howard L. N.** Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // Adv. Appl. Mech. V. 9 / Ed. by G. G. Chernyi et al. N. Y.: Acad. Press, 1966.
14. **Howard L. N.** Note on a paper of John W. Miles // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 509–512.
15. **Canuto C.** Spectral methods in fluid dynamics / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
16. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973.
17. **Michalke A.** On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. P. 543–556.

Поступила в редакцию 24/V 2013 г.
