УДК 532.59

СВЕРХКРИТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ИЗ-ПОД ЩИТА

В. И. Налимов

(Новосибирск)

Теория движений идеальной несжимаемой тяжелой жидкости со свободными границами — своеобразный раздел классической гидромеханики. Интерес к таким течениям обусловливается, во-первых, их большой практической важностью и, во-вторых, богатством, своеобразием и трудностью возникающих при математическом описании их задач. К настоящему времени опубликовано довольно много работ, посвященных точным решениям стационарных уравнений движения безвихревой жидкости со свободными границами.

Доказательство существования бегущих волн впервые дано А. И. Некрасовым в 1921 г. и независимо от него Т. Леви-Чивита в 1925 г. для бесконечно глубокой жидкости. Несколько позднее Дж. Струиком, а затем А. И. Некрасовым установлены аналогичные теоремы для жидкости конечной глубины. В работах указанных авторов предполагалось, что течение докритическое, т. е. скорость основного потока меньше скорости распространения волн бесконечно малой амплитуды. В пятидесятых годах появился ряд исследований о стационарных сверхкритических течениях. В работах Р. Жербе, Н. Н. Моисеева, А. М. Тер-Крикорова были доказаны теоремы существования сверхкритических волн над неровным периодическим дном. Ссылки на упомянутые и другие работы по данной тематике можно найти в [1, 2]. В 1982 г. установлено существование докритических течений над неровным непериодическим дном [3].

Существование уединенной волны впервые строго доказано М. А. Лаврентьевым [4] в 1946 г. с помощью созданных им вариационных принципов теории конформных и квазиконформных отображений. Другой метод доказательства предложен в [5]. Оба доказательства основаны на принципах нелинейной теории мелкой воды и показывают, что эту теорию можно применять для асимптотических представлений точных решений задачи об уединенной волне.

Если допустить возможность контакта свободной поверхности и твердых границ, то соответствующие нелинейные краевые условия сильно усложняются. В данной работе изучается двумерная задача о вытекающем из-под плоской горизонтальной крыши потоке тяжелой безвихревой идеальной жидкости над ровным горизонтальным дном. Течение предполагается сверхкритическим: $U > \sqrt{gh_0}$, однако характерная скорость потока U считается мало отличающейся от критической скорости $\sqrt{gh_0}$ (g — ускорение силы тяжести, h_0 — характерная глубина жидкости). Здесь найдена приближенно форма свободной поверхности и излагается схема доказательства существования отличных от равномерного потока течений. Тем самым обосновывается приближенное решение.

Сформулированная задача сильно отличается от задачи об уединенной волне. Тем не менее метод исследования ее, который представлен ниже, имеет много общего с методом, предложенным К. О. Фридрихсом и Д. Г. Хайерсом [5].

1. Постановка задачи. Для описания течения жидкости в качестве независимых переменных выбираются [1] безразмерные потенциал скорости φ и функция тока ψ. Такой выбор переменных позволяет работать не в частично неизвестной области течения, а в фиксированной полосе между двумя линиями тока $\psi = \text{const}$. Как известно, комплексный потенциал скорости $\chi = \varphi + i\psi$ является аналитической функцией переменного $z = x + iy$. Сопряженная комплексная скорость $\overline{w} = d\chi/dz$ — также аналитическая функция z. После представления $w = \exp\{-i(\theta + i\tau)\}$ задача о течении жидкости сводится [1] к отысканию аналитической в единичной горизонтальной полосе функции $\theta + i\tau$ переменного χ с краевым условием $\theta_\psi - \lambda \exp\{-3\tau\} \sin\theta = 0$ на «свободной» поверхности $\psi = 1$, $\varphi > 0$ с постоянной $\lambda = gh_0U^{-2}$ (без потери общности предполагается, что точка контакта свободной поверхности и крышки переходит в точку $\varphi = 0$, $\psi = 1$). Так как на дне и крышке угол наклона скорости потока должен совпадать с углом наклона касательной, то $\theta = 0$ при $\psi = 0$ и $\psi = 1$, $\varphi \leqslant 1$.

Предполагается, что $\lambda = 1 - \varepsilon^2\mu_0^2/3$ (ε — малый параметр, $\mu_0 > 0$). Другими словами, основное течение предполагается сверхкритическим и мало отличающимся от критического. Целесообразно сделать принятую в теории мелкой воды замену независимых переменных $x = \varepsilon\varphi$, $y = \psi$ и положить

$$F(u, v, \varepsilon) = \varepsilon^{-5}\left(1 - \varepsilon^2\mu_0^2/3\right)\left(\exp\{-3\varepsilon^2 v\} \sin \varepsilon^3 u - \varepsilon^3 u\right) = -3uv + \varepsilon^2 F_1(u, v, \varepsilon) \tag{1.1}$$

с функцией

$$F_1(u, v, \varepsilon) = 3\mu_0^2 uv + u(\exp\{-3\varepsilon^2 v\} + 3\varepsilon^2 v - 1) + \\ + \varepsilon^{-7}(1 - \varepsilon^2\mu_0^2/3)\exp\{-3\varepsilon^2 v\}(\sin\varepsilon^3 u - \varepsilon^3 u).$$

В новых обозначениях исходная задача формируется как задача об отыскании в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 < y < 1$ пары функций (u, v) из системы

$$u_y + v_x = 0, \quad \varepsilon^2 u_x - v_y = 0 \tag{1.2}$$

с краевыми условиями на «твердых стенках»

$$u = 0 \ (y = 0); \quad u = 0 \ (y = 1, \ x \leqslant 0) \tag{1.3}$$

и с условием на «свободной границе»

$$u_y - (1 - \varepsilon^2\mu_0^2/3)u = \varepsilon^2 F(u, v, \varepsilon) \quad (y = 1, \ x > 0). \tag{1.4}$$

Так как «сопряженная» к u функция v находится с точностью до произвольной постоянной, то для ее однозначного определения необходимо дополнительное условие. Предполагается, что

$$v(x, y) \to 0 \quad (x \to \infty). \tag{1.5}$$

По заданной функции $\varphi(x) = u(x, 1)$ из системы (1.2) с краевым условием $u(x, 0) = 0$ и условием на бесконечности (1.5) однозначно восстанавливаются функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Поэтому в дальнейшем решением задачи (1.2)—(1.5) будет именоваться функция $\varphi(x)$ (или пара $\varphi(x)$, $\psi(x) = v(x, 1)$).

2. Приближенное решение. В [6] изучена краевая задача (1.2), (1.3) с краевым условием

$$u_y - (1 - \varepsilon^2\mu_0^2/3)u = \varepsilon^2 f(x, \varepsilon) \quad (y = 1, \ x > 0) \tag{2.1}$$

и для функций $\varphi(x) = u(x, 1)$, $\psi(x) = v(x, 1)$ получены при $0 < \alpha \leqslant 1/2$ представления

$$\varphi(x) = Af(x, 0) + A(f(x, \varepsilon) - f(x, 0)) + \varepsilon^{1-\alpha}N(\varepsilon)f(x, \varepsilon), \\ \psi(x) = -D^{-1}\varphi(x) + \varepsilon^{1-\alpha}K(\varepsilon)\varphi(x). \tag{2.2}$$

В этих формулах учтено условие на бесконечности (1.5) и использовано обозначение

$$D^{-1}\varphi(x) = -\int_x^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Функция $w = Ah$ при $x > 0$ является решением краевой задачи

$$-w''(x) + \mu_0^2 w(x) = 3h(x), \quad w(0) = w(\infty) = 0 \tag{2.3}$$

и обращается в нуль при $x \leqslant 0$. Интегральные операторы N и K действуют в индуцированных задачей (1.2), (1.3), (2.1) пространствах функций, определение которых дается ниже.

Множество экспоненциально убывающих с показателем $\rho \geqslant 0$ функций, определенных на всей оси R и имеющих конечную гельдерову C^α-норму ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), обозначится через $E_\alpha(\rho)$, норма в нем вводится равенством

$$\|u(x)\|_{E_\alpha(\rho)} = \|u(x)\exp\{\rho|x|\}\|_{C^\alpha(R)}, \tag{2.4}$$

$E_\alpha^+(\rho)$ — множество гельдеровых и экспоненциально убывающих на положительной полуоси R^+ функций, у которых конечна норма (2.4) с R^+ вместо R, $\mathring{E}_\alpha^+(\rho)$ — множество функций из $E_\alpha^+(\rho)$, равных нулю при $x = 0$. Ясно, что $\mathring{E}_\alpha^+(\rho)$ можно отождествить с подпространством функций из $E_\alpha(\rho)$, равных нулю при $x \leqslant 0$.

В [6] показано, что при $0<\rho<\mu_0$, $0<\alpha\leqslant 1/2$ и достаточно малых ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0(\mu_0, \rho)$, оператор $N(\varepsilon)$ действует из пространства $E_\alpha^+(\rho)$ в пространство $\mathring{E}_\alpha^+(\rho)$ и равномерно по ε норма его ограничена постоянной, зависящей только от μ_0 и ρ. Сингулярный интегральный оператор $K(\varepsilon)$ при $0<\alpha<1$ действует при указанных ε и $\rho<\pi/\varepsilon-\delta$ из пространства $E_\alpha(\rho)$ в себя. Норма его равномерно ограничена константой, зависящей только от $\delta>0$, α и ε_0. Поэтому ниже предполагается, что $0<\alpha\leqslant 1/2$, $0<\rho<\mu_0$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и число ε_0 выбрано так, что выполнены перечисленные свойства операторов $N(\varepsilon)$ и $K(\varepsilon)$.

Оператор A не зависит от ε. Он действует из пространства $E_\alpha^+(\rho)$ при $0<\rho<\mu_0$ в пространство $\mathring{E}_\alpha^+(\rho)$ и ограничен. Норма его зависит от μ_0 и ρ.

Если через V обозначить одно из введенных пространств, то легко проверить оценку произведения $\|uv\|_V\leqslant C(\rho)\|u\|_V\|v\|_V$, что позволяет оценивать нормы целых аналитических сложных функций типа (1.1) во введенных пространствах. Точнее, если $F(0)=0$ и ряд $\sum\limits_{|\alpha|>0} A_\alpha t^\alpha = F(t)$ сходится для всех $t=(t_1, \ldots, t_m)$, то для сложной функции

$$\|F(v)\|_V\leqslant \sum_{|\alpha|>0} C^{|\alpha|}(\rho)\,|A_\alpha|\,X^\alpha, \quad X=(\|v_1\|_V, \ldots, \|v_m\|_V). \tag{2.5}$$

Пусть, далее, φ есть решение задачи (1.2)—(1.5) и $\varphi(x)=u(x, 1)\in \mathring{E}_\alpha^+(\rho)$. На основании сказанного выше из представления (2.2) следует равенство $v(x, 1)=-D^{-1}\varphi(x)+o(\varepsilon)$, и поэтому при $y=1$ $F(u, v, \varepsilon)=3\varphi D^{-1}\varphi+o(\varepsilon)$. Снова из представления (2.2) $\varphi(x)=3A(\varphi D^{-1}\varphi)+o(\varepsilon)$. Ясно, что приближенное решение $\varphi_0(x)$ задачи (1.2)—(1.5) должно находиться из интегрального нелинейного уравнения $\varphi_0(x)=3A(\varphi_0 D^{-1}\varphi_0)$ или эквивалентной ему краевой задачи (2.3)

$$-\varphi_0''+\mu_0^2\varphi_0=3\varphi_0 D^{-1}\varphi_0, \quad \varphi_0(0)=\varphi_0(\infty)=0. \tag{2.6}$$

Написанное уравнение совпадает с уравнением уединенных волн. Решение его хорошо известно:

$$\varphi_0(x)=-\mu_0^2\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_0 x}{2}\Big/\mathrm{ch}^3\,\frac{\mu_0 x}{2}. \tag{2.7}$$

Оно находится из задачи (2.6) после замены $D^{-1}\varphi_0=w$.

3. Точное решение. Задача (1.2)—(1.5) сильно отличается от задачи об уединенной волне. Прямолинейное разложение по степеням ε, применяемое в методе узких полос для построения асимптотического решения, здесь не проходит, ибо решение заведомо не будет гладким в точке $x=0$, $y=1$. Поэтому для обоснования приближенного решения (2.6) необходимо доказать существование точного решения, обладающего нужными свойствами. Легко видеть, что функция φ_0, продолженная нулем на отрицательную полуось, кусочно-гладкая и принадлежит пространству $\mathring{E}_{1/2}^+(\mu_0)$. Поэтому число α, участвующее в рассуждениях предыдущего пункта, в дальнейшем будет полагаться равным 1/2.

С учетом представления (2.2) решение φ, ψ задачи (1.2)—(1.5) имеет вид

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varepsilon^{1/2}\eta(x), \quad \psi(x)=-D^{-1}\varphi(x)+\varepsilon^{1/2}K(\varepsilon)\varphi(x).$$

Если подставить эти выражения в краевые условия (1.4) и воспользоваться представлением (2.2), то задача (1.2)—(1.5) сведется к отысканию решения $\eta\in\mathring{E}_{1/2}^+(\rho)$, $\rho<\mu_0$, нелинейного интегрального уравнения

$$\eta=3A(\eta D^{-1}\varphi_0+\varphi_0 D^{-1}\eta)+F_2(\varphi_0, \varepsilon)+\varepsilon^{1/2}F_3(\eta, \varphi_0, \varepsilon), \tag{2.8}$$

где $F_2(\varphi_0, \varepsilon)=3A(-\varphi_0 K(\varepsilon)\varphi_0+N(\varepsilon)(\varphi_0 D^{-1}\varphi_0))$;

$$F_3(\varphi_0, \varepsilon)=3A(\eta D^{-1}\eta-\eta K(\varepsilon)\varphi-\varphi_0 K(\varepsilon)\eta)+\varepsilon^{-1/2}AN(\varepsilon)\times$$
$$\times(F(\varphi, \psi, \varepsilon)-3\varphi_0 D^{-1}\varphi_0)+\varepsilon A F_1(\varphi, \psi, \varepsilon).$$

Уравнение (2.8) можно записать в более удобной интегральной форме, если в нем обратить линейную по η часть. Для этой цели нужно рассмотреть дифференциальное уравнение $-w'' + \mu_0^2 w = 3wD^{-1}\varphi_0$. При $x > 0$ функция $\varphi_0(x)$ является его решением. С помощью известного приема понижения порядка можно найти второе его решение $\varphi_1(x)$ и такое, что $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_1'\varphi_0 - \varphi_1\varphi_0' = 1$. По функциям φ и φ_1 строится оператор

$$Mg(x) = \varphi_0'(x)\int_0^x \varphi_1(t)\,D^{-1}\varphi_0(t)\,D^{-1}g(t)\,dt + \varphi_1'(x)\int_x^\infty \varphi_0(t)\,D^{-1}\varphi_0(t)\,D^{-1}g(t)\,dt.$$

Как показано в [6], функции вида Ah и $N(\varepsilon)h$ обращаются в нуль при $x = 0$. Отправляясь от определения (2.3) оператора A, можно уравнение (2.8) записать в эквивалентной форме

$$\eta = MF_2(\varphi_0, \varepsilon) + \varepsilon^{1/2}MF_3(\eta, \varphi_0, \varepsilon) \quad (x \geqslant 0). \tag{2.9}$$

Легко проверить, что $\varphi_0, D^{-1}\varphi_0 \sim \exp\{-\mu_0 x\}$, $\varphi_1 \sim \exp\{\mu_0 x\}$ при $x \to \infty$. Поэтому оператор M, как следует из [6], действует из пространства $E_{1/2}^{-}(\rho)$ при $\rho < \mu_0$ в пространство $\mathring{E}_{1/2}^{+}(\rho)$ и ограничен. Из оценок операторов A, $N(\varepsilon)$ и $K(\varepsilon)$, установленных в [6], и оценки сложной функции (2.5) вытекает равномерное по ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\mu_0, \rho))$ неравенство

$$\| MF_2(\varphi_0, \varepsilon)\|_{E_{1/2}^{+}(\rho)} \leqslant R < \infty.$$

Аналогично можно проверить, что для всех η, η_1 из шара

$$B_{2R} = \left\{\eta \in \mathring{E}_{1/2}^{+}(\rho) \,|\, \|\eta - MF_2(\varphi_0, \varepsilon)\|_{E_{1/2}^{+}(\rho)} \leqslant 2R\right\}$$

функции $MF_3(\eta, \varphi_0, \varepsilon)$ равномерно по ε ограничены: $\|MF_3(\eta, \varphi_0, \varepsilon)\|_{E_{1/2}^{+}(\rho)} \leqslant$ $\leqslant C_1(R)$, а также удовлетворяют условию Липшица

$$\|MF_3(\eta, \varphi_0, \varepsilon) - MF_3(\eta_1, \varphi_0, \varepsilon)\|_{E_{1/2}^{+}(\rho)} \leqslant C_2(R)\|\eta - \eta_1\|_{E_{1/2}^{+}(\rho)}.$$

Поэтому при достаточно малых ε отображение $\eta \to MF_2(\varphi_0, \varepsilon) + \varepsilon^{1/2}MF$ $(\eta, \varphi_0, \varepsilon)$ действует из шара B_{2R} в себя и является сжимающим. Согласно теореме о неподвижной точке, уравнение (2.9) имеет единственное решение. Потому справедлива

Теорема. *При достаточно малых* ε *задача* (1.2)—(1.5) *имеет нетривиальное решение и*

$$u(x, 1) \in \mathring{E}_{1/2}^{+}(\rho), \quad v(x, 1) \in E_{1/2}(\rho)$$

для $\rho < \mu_0$. *Приближенное решение дается формулой* (2.7). *Другими словами, с точностью до членов порядка* $\varepsilon^{1/2}O(1)$ *решение задачи* (1.2)—(1.5) *при* $y = 1$, $x = 0$ *ведет себя как начинающаяся от точки симметрии половина соответствующей уединенной волны.*

Так как решение задачи (1.2)—(1.5) принадлежит пространству Гельдера с показателем 1/2 и не более того, то форма свободной поверхности на физической плоскости непрерывно дифференцируема и производная от нее принадлежит тому же самому пространству Гельдера. Кривизна свободной поверхности имеет особенность в точке контакта со щитом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.
2. **Теория** поверхностных волн.— М.: ИЛ., 1959.
3. **Налимов В. И.** Стационарные поверхностные волны над неровным дном // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 58.
4. **Лаврентьев М. А.** До теорії довгих хвиль // Зб. Праць. Ін-т математики АН УССР.— 1946.— № 8.
5. **Фридрихс К. О., Хайерс Д. Г.** Существование уединенных волн // Теория поверхностных волн.— М.: ИЛ, 1959.

. **Налимов В. И.** Метод узких полос в краевой задаче с разрывными граничными условиями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1989.— Вып. 90.

Поступила 18/VIII 1988 г.

УДК 532.62

ДИНАМИКА СВОБОДНЫХ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ

Л. К. Антановский

(Новосибирск)

1. Назовем слой вязкой несжимаемой жидкости, движущийся в другой кидкости или газе, свободной пленкой, если его толщина h, отсчитываемая доль нормали $\mathbf{n}$ к срединной поверхности Г, мала по сравнению с харак-ерным масштабом движения, причем градиенты скорости $\mathbf{v}$ и температуры в слое ограничены при $h \to 0$. Последнее будет выполнено, если коэффи-циенты вязкости и теплопроводности внешней жидкости не превосходят оответствующие характеристики материала пленки. Тогда в пер-ом приближении можно задавать положение пленки двумерной поверх-остью Г и описывать ее динамику распределенными на Г параметрами, читая $\mathbf{v}$ и θ всюду непрерывными функциями точки пространства $\mathbf{x}$ и ремени t (принцип локального термодинамического равновесия). В част-ости, определены совместные лагранжевы координаты пленки и объем-ющей фазы, что позволяет использовать феноменологический подход ри выводе уравнений движения Г [1]. Основные принципы термодина-ики и реологические соотношения приводят к замкнутой задаче динамики онких пленок жидкости, содержащей в себе при $h = 0$ задачу о термока-иллярной конвекции [2], причем термодинамические соотношения пре-ращаются в классические условия Гиббса — Дюгема на межфазной гра-ице. Уравнения движения изотермических свободных пленок вязких и пруговязких жидкостей выведены в [3].

Введем обозначение G для метрического (единичного) тензора прост-анства, тогда $G_\Gamma = G - \mathbf{nn}$ (умножение векторов — тензорное) является етрическим тензором поверхности Г, при помощи которого осуществляет-я операция проектирования на Г тензоров и дифференциальных опера-оров. Например, пространственный градиент ∇ преобразуется в поверх-остный градиент $\nabla_\Gamma = G_\Gamma \cdot \nabla$ (точкой обозначается внутреннее произве-ение), а тензор скоростей деформаций объема $D = (\nabla \mathbf{v})_{\text{sym}}$ порождает ензор скоростей деформаций поверхности $D_\Gamma = G_\Gamma \cdot D \cdot G_\Gamma = (\nabla_\Gamma \mathbf{v} \cdot G_\Gamma)_{\text{sym}}$. 'ак как след D_Γ равен поверхностной дивергенции полного вектора ско-ости, то для материального элемента площади J_Γ поверхности Г имеем ормулу $\dot{J}_\Gamma = J_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}$ (для материального элемента объема J справедли-о равенство $\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$). Здесь и ниже точка сверху обозначает полную роизводную по времени в частице. Заметим, что $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \operatorname{div}_\Gamma (G_\Gamma \cdot \mathbf{v}) + k \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ($k = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{n}$ — сумма главных кривизн Г). Справедлива также ажная формула $\operatorname{div}_\Gamma G_\Gamma = -k\mathbf{n}$. В самом деле, в евклидовом пространст-е тензор G постоянен, а тензор кривизн $\nabla_\Gamma \mathbf{n}$ не имеет нормальных компо-ент, поэтому $\operatorname{div}_\Gamma (G - \mathbf{nn}) = -\operatorname{div}_\Gamma (\mathbf{nn}) = -k\mathbf{n}$.

Пусть ρ, e, T, $\mathbf{q}$ — плотность массы, удельная внутренняя энергия, ензор напряжений и вектор потока тепла объемной фазы; ρ_Γ, e_Γ, T_Γ, $\mathbf{q}_\Gamma$ — аналогичные характеристики поверхностной фазы пленки. Тогда ифференциальные законы сохранения массы, импульса и энергии прини-ают вид [1]

$$\text{(1.1)} \qquad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}) = \operatorname{div} T,$$

$$\rho \dot{e} = T : \nabla \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} \ \text{вне } \Gamma;$$

$$\text{(1.2)} \qquad \dot{\rho}_\Gamma + \rho_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = 0, \quad \rho_\Gamma(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}) = \operatorname{div}_\Gamma T_\Gamma + \mathbf{n} \cdot [T],$$

$$\rho_\Gamma \dot{e}_\Gamma = T_\Gamma : \nabla_\Gamma \mathbf{v} - \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma - \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] \ \text{на } \Gamma,$$