

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ**

Ю. П. Емец, И. И. Рена

(Киев)

В гидродинамическом приближении рассматриваются сильные нелинейные волны потенциала и дрейфовой скорости в неравновесной среде, в которой частота столкновений носителей тока зависит от электрического поля.

Дифференциальный оператор, описывающий электрическое поле в нелинейной среде, при определенных условиях изменяет свой тип [1]. В этом случае могут возникнуть колебания поля, линейная теория которых оказывается неправильной, поскольку в установившемся режиме изменения первоначально невозмущенных величин немалы.

Последовательное рассмотрение структуры волн электрического поля большой амплитуды предполагает использование, помимо уравнений поля, кинетического уравнения для носителей тока. Такое изучение колебаний весьма подробно, но чрезвычайно сложно в математическом отношении. Точное решение задачи легко получить на основе уравнений динамики плазмы в гидродинамическом приближении.

Исходными в задаче будут уравнения движения и неразрывности для электронов и уравнение Пуассона для электростатического потенциала. Рассматриваются условия, когда можно пренебречь собственным магнитным полем тока и градиентом давления зарядов.

1. В одномерном нестационарном случае и неподвижном ионном фоне имеем систему уравнений (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{u}{\tau} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4\pi e}{\varepsilon} (n_0 - n)$$

где u , e , m и τ — направленная скорость, заряд, масса и время столкновения электрона соответственно; φ — электростатический потенциал; n и n_0 — плотность электронов и ионов; ε — диэлектрическая проницаемость.

Нелинейность системы (1.1) обусловлена наличием в уравнении движения инерционного члена udu/dx и зависимостью времени релаксации τ от скорости u . Для общего исследования (1.1) достаточно, не конкретизируя зависимость $\tau = \tau(u)$, потребовать, чтобы функция $\tau(u)$ была гладкой, непрерывной и возрастающей.

Рассмотрим решение (1.1) в системе координат, перемещающейся с постоянной скоростью U относительно исходной ($\xi = x - Ut$). В этой системе

$$(u - U)u' + \frac{e}{m}\varphi' + \frac{u}{\tau} = 0, \quad (u - U)n = \text{const} = (u_0 - U)n_0$$

$$\varphi'' = \frac{4\pi e}{\varepsilon}(n_0 - n) \tag{1.2}$$

где штрихи означают производные по ξ .

Исключая из первого уравнения потенциал, получаем нелинейное уравнение второго порядка для скорости

$$(u - U)u'' + (u')^2 + \frac{1 - \Lambda_\tau^2}{\tau}u' + \omega_0^2 \frac{u - u_0}{u - U} = 0$$

$$\Lambda_\tau = \frac{u}{U}, \quad U\tau^2 = u\tau \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m\varepsilon} \tag{1.3}$$

Здесь ω_0 — плазменная частота, Λ_τ — безразмерное число, U_τ — локальная скорость распространения возмущений в нелинейной среде; U_τ и Λ_τ — характеризуют соответственно абсолютную и сравнительную степень нелинейности среды, обусловленную зависимостью τ от u .

Если U_τ принимает значения $U_\tau < u$ ($\Lambda_\tau > 1$), то для принятых условий из

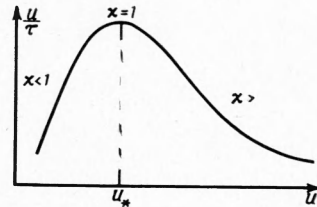
$$1 - \Lambda_\tau^2 = 1 - \frac{u}{\tau} \frac{d\tau}{du} = \tau \frac{d}{du} \frac{u}{\tau} \quad (1.4)$$

следует, что коэффициент динамического трения u/τ увеличивается с ростом u , пока последняя не достигнет критической скорости u_* , соответствующей значению безразмерного числа $\Lambda_\tau = 1$, и при дальнейшем увеличении скорости будет уменьшаться (фиг. 1).

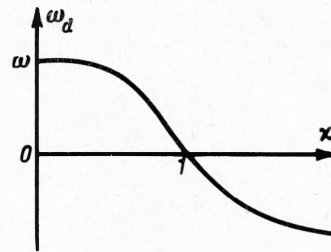
В целом коэффициент

$$\omega_d = \frac{1 - \Lambda_\tau^2}{\tau} = \frac{d}{du} \frac{u}{\tau}$$

при u' в (1.3) представляет собой дифференциальную частоту, которая положительна при $\Lambda_\tau < 1$ и принимает отрицательные значения, когда $\Lambda_\tau > 1$ (фиг. 2). Соотношение величин трех частот: плазменной ω_0 , дифференциальной ω_d и столкновений $\omega = 1/\tau$ — определяет характер нелинейных колебаний дрейфовой скорости, плотности электронов и электростатического потенциала.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. На фазовой плоскости u, u' уравнение (1.3) имеет одно простое состояние равновесия $(u_0, 0)$; корни характеристического уравнения даются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{u_0 - U} \left[-\frac{1 - \Lambda_\tau^2}{2\tau} \pm \left(\frac{1 - 2\Lambda_\tau^2 + \Lambda_\tau^4}{4\tau^2} - \omega_0^2 \right)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{1}{u - U} \left[-\frac{\omega_d}{2} \pm \left(\frac{\omega_d^2}{4} - \omega_0^2 \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Возможно семь типов особых точек:

- а) простой устойчивый узел $0.5\omega_d > \omega_0$,
- б) вырожденный устойчивый узел $0.5\omega_d = \omega_0$,
- в) устойчивый фокус $0.5\omega_d < \omega_0$,
- г) центр $\omega_d = 0$,
- д) неустойчивый фокус $-0.5\omega_d < \omega_0$,
- е) неустойчивый вырожденный узел $-0.5\omega_d = \omega_0$,
- ж) простой неустойчивый узел $-0.5\omega_d > \omega_0$.

Полная диаграмма разбиения плоскости $\omega_* = 1/\tau\omega_0, \Lambda_\tau$ на области существования типа особой точки приведена на фиг. 3. Здесь 1 и 2 — об-

ласти устойчивого узла и фокуса, 3 и 4 — области неустойчивого фокуса и узла соответственно. На границах областей узла и фокуса имеем вырожденные узлы, а на границе областей устойчивого и неустойчивого фокусов — центр.

Таким образом, если направленная скорость электронов u больше скорости U_τ ($\Lambda_\tau > 1$), в среде возникают неустойчивые колебания. Это связано с тем, что сила трения mu/τ с ростом u уменьшается. При $u < U_\tau$ ($\Lambda_\tau < 1$) с увеличением u трение возрастает (фиг. 1), поэтому колебания скорости всегда затухают. Когда $u = U_\tau$ ($\Lambda_\tau = 1$), изменение силы трения равно нулю, или, точнее, она не зависит от скорости ($\tau = \alpha u$, $\alpha = \text{const}$), в среде вследствие наличия инерции движения электронов возникает периодическое колебание u .

В этом случае первый интеграл уравнения (1.3) имеет вид

$$(u - U)u' = \omega_0 [C^2 - (u - u_0)^2]^{1/2} \quad (2.2)$$

где постоянная C определяет амплитуду колебания. Интегрируя (2.2), получаем

$$(u_0 - U) \arcsin \frac{u - u_0}{C} - [C^2 - (u - u_0)^2]^{1/2} = \omega_0 (x - Ut) \quad (2.3)$$

Как видно, периодические колебания скорости в нелинейной среде имеют частоту, равную плазменной частоте ω_0 .

Последовательно интегрируя уравнение Пуассона, находим

$$-\frac{e}{m} \varphi' = -\alpha - \omega_0 [C^2 - (u - u_0)^2]^{1/2} \quad (2.4)$$

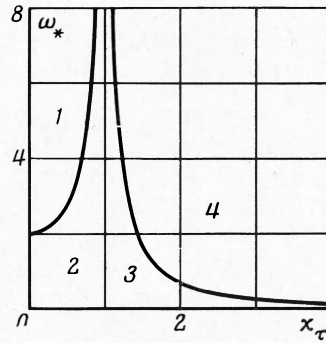
$$(u_0 - U) \arcsin \left[\frac{1}{C} \left(\sqrt{2\alpha\xi + 2\frac{e}{m}\varphi - u_0 + U} \right) \right] - \\ - \left[C^2 - \left(\sqrt{2\alpha\xi + 2\frac{e}{m}\varphi - u_0 + U} \right)^2 \right]^{1/2} = \omega_0 \xi$$

Отсюда следует, что линейное изменение потенциала по ξ модулировано колебаниями плазменной частоты. При $\alpha = 0$ (отсутствуют столкновения) из (2.4) получаем формулы, полученные А. И. Ахиезером и Г. Я. Любарским при рассмотрении нелинейных колебаний бесстолкновительной холодной плазмы [2].

Поступила 18 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Е м е ц Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, № 6, стр. 1077—1080.
2. А х и е з е р А. И., Л ю б а р с к и й Г. Я. К нелинейной теории колебаний электронной плазмы. Докл. АН СССР, 1951, т. 80, стр. 193—195.



Фиг. 3