УДК 534.22.094.1

АНАЛИЗ ВОЛНОВОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛАСТОКИНЕТИКИ СРЕДЫ КОССЕРА В СЛУЧАЕ ПЛОСКИХ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН

М. А. Кулеш, В. П. Матвеенко, М. В. Улитин, И. Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mails: kma@icmm.ru, mvp@icmm.ru

Исследуются волны в среде Коссера, деформированное состояние которой характеризуется независимыми векторами перемещения и поворота. Рассматривается задача о распространении объемных продольных и поперечных волн. Волновые решения ищутся в виде волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы. Показано, что если решение ищется в виде трех компонент вектора перемещения и трех компонент вектора поворота, зависящих от времени и продольной координаты, то исходная система распадается на две, одна из которых описывает продольную волну, а другая — поперечную. Для волн обоих типов получены дисперсионные соотношения и аналитические решения в перемещениях. Дисперсионные характеристики полученных решений отличаются от дисперсионных характеристик соответствующих решений в классической теории упругости.

Ключевые слова: плоские волны, дисперсия, среда Коссера, аналитические решения.

Введение. Существует большое количество работ, в которых рассматриваются линейные модели несимметричной теории упругости, в частности модель среды Коссера. Тем не менее до сих пор отсутствует четкое понимание роли данной теории в механике деформируемого твердого тела. Важность моментной теории позволит определить корректно поставленный эксперимент с использованием современных экспериментальных устройств. Примерами таких устройств являются механические [1] или лазерные [2] сенсоры, с помощью которых можно непосредственно измерять скорости поворотов в трех перпендикулярных направлениях. В настоящее время эти устройства применяются (хотя и не очень широко) в сейсмических и геофизических исследованиях. На рис. 1 показана экспериментальная шестикомпонентная сейсмограмма, полученная при детонации подземного неядерного заряда мощностью приблизительно 1 кт на глубине 390 м и на расстоянии от эпицентра 1 км. На сейсмограмме приведены три компоненты вектора ускорения, а также независимо измеренные компоненты вектора скорости вращения грунта в точке установки сенсора [1].

Во многих работах предполагается, что компоненты векторов поворотов и перемещений связаны соотношением, которое соответствует либо классической теории упругости, либо несимметричной теории упругости со стесненным вращением, например теории псев-

Работа выполнена при финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) в рамках программы “Фундаментальные исследования и высшее образование” (грант № Y2-P-09-04), а также Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-96029-р Урал-а).

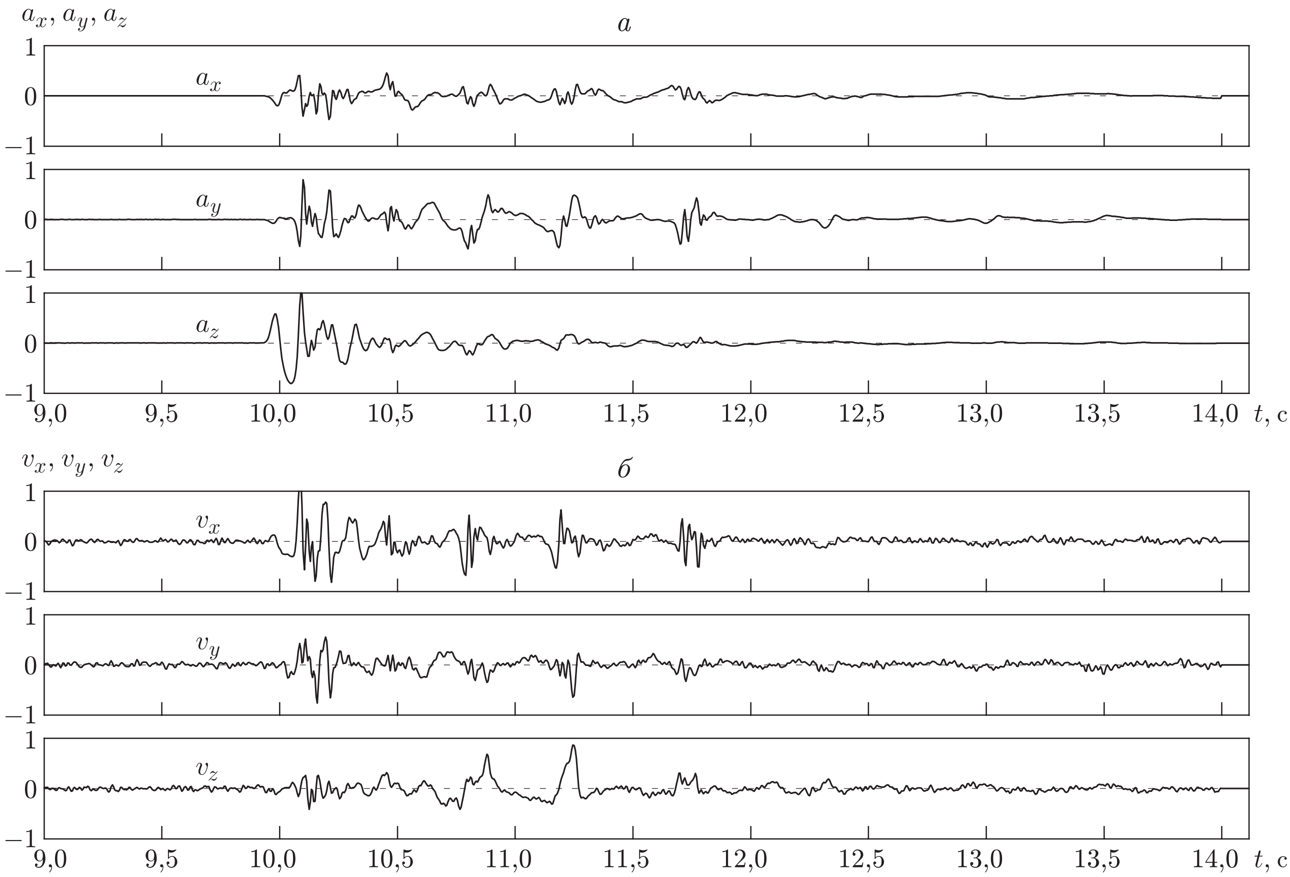

Рис. 1. Результаты экспериментальных измерений компонент векторов ускорений (*а*) и скоростей вращения (*б*) при подземном взрыве мощностью приблизительно 1 кт на глубине 390 м и на расстоянии от эпицентра 1 км [1]

досреды Коссера (см., например, [3]):

$$\boldsymbol{\omega} = (1/2)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}.$$

Аналогичная зависимость, но с другим коэффициентом получается в некоторых динамических задачах для редуцированной среды Коссера [4]. В полной линейной теории среды Коссера [5] векторы поворота $\boldsymbol{\omega}$ и перемещения $\boldsymbol{u}$ являются кинематически независимыми. С одной стороны, это приводит к увеличению количества необходимых материальных параметров. С другой стороны, с физической точки зрения полная теория является более реалистичной, чем, например, теория псевдосреды Коссера [5]. Однако до сих пор отсутствуют экспериментальные данные о характере связи векторов перемещения и поворота, хотя из сейсмограммы, представленной на рис. 1, следует принципиальная возможность подобных исследований.

Таким образом, волновые эксперименты, особенно в геологических средах, позволяют получить информацию для идентификации моделей несимметричных сред. Подобные эксперименты проводились; в частности, результаты ультразвуковых исследований однородных сред использовались в [6] для идентификации моделей Леру и псевдосреды Коссера, а также в [7, 8] для идентификации модели линейной среды Коссера. Геологические среды являются более сложным объектом для изучения, так как в них, как правило, одновременно возбуждается и регистрируется несколько типов волн: продольные и поперечные прямые и отраженные объемные волны, волны Рэлея, а также волны Лява, Лэмба и Стоунли.

Из сказанного выше следует, что получение и анализ волновых решений для различных микроструктурных моделей является актуальной задачей. В настоящей работе продолжено изучение полной модели среды Коссера [5]. Для этой модели ранее обнаружен ряд новых закономерностей. Выявлена дисперсия упругих поверхностных волн Рэлея [9, 10] (в классической теории упругости волны Рэлея не обладают дисперсией). Выполнен подробный анализ компонент векторов перемещений и поворотов рэлеевских волн [11]. Обнаружен эффект, вызванный распространением поверхностной поперечной волны с горизонтальной поляризацией. Геометрически такая волна подобна волне Лява, однако согласно классической теории упругости само существование волны Лява как поверхностной волны обусловлено наличием слоя на полупространстве. При стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. В [12] показано, что в среде Коссера поперечная горизонтально поляризованная волна, затухающая с увеличением глубины, существует и в отсутствие плоского слоя. В [13] получено еще одно решение, не имеющее аналогов в классической теории упругости. Это решение описывает распространяющуюся в пластине волну с одной поперечной компонентой вектора перемещения и двумя компонентами вектора поворота. Данная волна имеет большее количество мод, чем волна Лэмба, все моды обладают дисперсией, перемещения во всех модах зависят от глубины.

В настоящей работе рассмотрено общее уравнение движения для плоских волн в среде Коссера и получено еще одно частное решение, описывающее распространение объемных продольных и поперечных волн перемещения и поворота. Решения уравнений движения получены для случая немонохроматической волны и описывают распространение волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы. Выбор немонохроматического представления обусловлен тем, что оно является наиболее подходящим для сравнения с экспериментальными данными, полученными в результате сейсмических измерений. В работе также приводятся основные уравнения среды Коссера и общее уравнение плоских волн. Построено частное решение для объемных волн и проведено его сопоставление с решениями, полученными в [11–13].

1. Постановка задачи. Рассматривается пространство, заполненное упругой изотропной средой, описываемой моделью континуума Коссера [5]. Массовые силы и моменты отсутствуют. Используется декартова система координат, в которой в направлении оси x распространяется плоская волна. Основные соотношения имеют следующий вид:

— уравнения движения:
$$\nabla\cdot\tilde\sigma+\boldsymbol{X}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}},\qquad \tilde\sigma^{\mathrm{T}}:\tilde E+\nabla\cdot\tilde\mu+\boldsymbol{Y}=j\ddot{\boldsymbol{\omega}};\tag{1.1}$$
— геометрические соотношения:
$$\tilde\gamma=\nabla\boldsymbol{u}-\tilde E\cdot\boldsymbol{\omega},\qquad \tilde\chi=\nabla\boldsymbol{\omega};\tag{1.2}$$
— физические уравнения:
$$\tilde\sigma=2\mu\tilde\gamma^{(S)}+2\alpha\tilde\gamma^{(A)}+\lambda I_1(\tilde\gamma)\tilde e,\qquad \tilde\mu=2\gamma\tilde\chi^{(S)}+2\varepsilon\tilde\chi^{(A)}+\beta I_1(\tilde\chi)\tilde e.\tag{1.3}$$

С учетом (1.1)–(1.3) уравнения движения для вектора перемещения $\boldsymbol{u}$ и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ записываются в виде
$$\begin{gathered}(2\mu+\lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-(\mu+\alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{X}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}},\\ (\beta+2\gamma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}-(\gamma+\varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{u}-4\alpha\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{Y}=j\ddot{\boldsymbol{\omega}}.\end{gathered}\tag{1.4}$$
В (1.1)–(1.4) $\boldsymbol{X}$ — вектор удельной плотности объемных сил; $\boldsymbol{Y}$ — вектор удельной плотности объемных моментов; $\tilde\gamma$, $\tilde\chi$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde\sigma$, $\tilde\mu$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ — постоянные Ламе; α, β, γ, ε — физические постоянные материала для упругой среды Коссера; ρ — плотность; j — плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\boldsymbol{E}$ — тензор Леви-Чивиты третьего

ранга; $(\,\cdot\,)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\,\cdot\,)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\,\cdot\,)$ — набла-оператор; $I_1(\,\cdot\,)$ — первый инвариант тензора; $\tilde{e}$ — единичный тензор [14]. В данной модели тензоры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ являются несимметричными.

В отличие от известных работ [9, 10], в которых рассматриваются только монохроматические волны, следуя методике, описанной, например, в [15], общее решение системы (1.4) представим в виде фурье-интегралов относительно всех компонент вектора перемещения $u_n(x,z,t)$ и вектора поворота $\omega_n(x,z,t)$:

$$u_n(x,z,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U_n(z)\,\mathrm{e}^{i(kx+ft)}\,\hat{S}_0(f)\,df,\qquad \omega_n(x,z,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_n(z)\,\mathrm{e}^{i(kx+ft)}\,\hat{S}_0(f)\,df. \tag{1.5}$$

Здесь индекс n принимает значения x,y,z; i — мнимая единица; k — волновое число; f — круговая частота (связанная с физической частотой p, измеряемой в герцах, соотношением $f=2\pi p$); t — время; $U_n(z)$, $W_n(z)$ — амплитудные функции, зависящие от глубины; $\hat{S}_0(f)$ — комплексная спектральная функция, соответствующая фурье-спектру сигнала-источника и определяющая форму волнового пакета. Физический смысл здесь имеют только вещественные части компонент векторов перемещения и поворота.

Немонохроматическое представление (1.5) в виде ограниченного во временном и фурье-пространствах волнового пакета произвольной формы выбрано с целью исследования дисперсионных свойств волн и сопоставления как самих решений, так и дисперсионных кривых с результатами экспериментов, аналогичными приведенным на рис. 1.

В данном случае оправданно выполнение непрерывного фурье-преобразования уравнений движения (1.4) и представления (1.5). Отсюда следует система уравнений относительно фурье-образов искомых компонент векторов перемещения и поворота (предполагается, что массовые силы и моменты отсутствуют):

$$\begin{aligned}(2\mu+\lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{u}}-(\mu+\alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}+2\alpha\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{\omega}}+\rho f^2\hat{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0},\\ (\beta+2\gamma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{\omega}}-(\gamma+\varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{\omega}}+2\alpha\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}-(4\alpha-jf^2)\hat{\boldsymbol{\omega}}=\mathbf{0}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Фурье-преобразование представления (1.5) имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\{U_x(z),U_y(z),U_z(z)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{ikx}\,\hat{S}_0(f),\qquad \hat{\boldsymbol{\omega}}=\{W_x(z),\,W_y(z),\,W_z(z)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{ikx}\,\hat{S}_0(f). \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.6), получим две несвязанные системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих продольную волну, относительно функций $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$:

$$\begin{aligned}(\mu+\alpha)U_x''(z)+(\rho f^2-k^2(\lambda+2\mu))U_x(z)+ik(\lambda+\mu-\alpha)U_z'(z)-2\alpha W_y'(z)=0,\\ (\lambda+2\mu)U_z''(z)+(\rho f^2-k^2(\mu+\alpha))U_z(z)+ik(\lambda+\mu-\alpha)U_x'(z)+2ik\alpha W_y(z)=0,\\ (\gamma+\varepsilon)W_y''(z)+(jf^2-k^2(\gamma+\varepsilon)-4\alpha)W_y(z)+2\alpha U_x'(z)-2ik\alpha U_z(z)=0,\end{aligned} \tag{1.8}$$

а также две несвязанные системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих поперечную волну, относительно $U_y(z)$, $W_x(z)$, $W_z(z)$:

$$\begin{aligned}(\gamma+\varepsilon)W_x''(z)+(jf^2-k^2(\beta+2\gamma)-4\alpha)W_x(z)+ik(\beta+\gamma-\varepsilon)W_z'(z)-2\alpha U_y'(z)=0,\\ (\beta+2\gamma)W_z''(z)+(jf^2-k^2(\gamma+\varepsilon)-4\alpha)W_z(z)+ik(\beta+\gamma-\varepsilon)W_x'(z)+2ik\alpha U_y(z)=0,\\ (\mu+\alpha)U_y''(z)+(\rho f^2-k^2(\mu+\alpha))U_y(z)+2\alpha W_x'(z)-2ik\alpha W_z(z)=0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Системы (1.8) и (1.9) допускают решения трех типов. Выбирая граничные условия, можно получить решения для волны Рэлея в полупространстве, затухающей по мере увеличения глубины [11, 12], волны Лэмба в пластине, не затухающей с увеличением глубины [13], а также решения для плоских объемных волн с не зависящей от глубины (постоянной по глубине) амплитудой. В данной работе изучаются решения третьего типа с целью интерпретации величин, входящих в решения первого и второго типов.

2. Построение и анализ решения. Решения для объемных продольных волн получаются из условий $U_x(z) = U_x$, $U_y(z) = 0$, $U_z(z) = 0$, $W_x(z) = W_x$, $W_y(z) = 0$, $W_z(z) = 0$. Подставляя данные условия в уравнения (1.8) и (1.9), получаем два независимых дисперсионных уравнения, первое из которых соответствует продольной волне перемещений, а второе — продольной волне поворотов:

$$(\rho f^2 - k^2(\lambda + 2\mu))U_x(z) = 0, \qquad (jf^2 - k^2(\beta + 2\gamma) - 4\alpha)W_x(z) = 0.$$

Из этих уравнений следуют две дисперсионные зависимости:

$$k_1(f) = f\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \qquad k_2(f) = \sqrt{\frac{jf^2}{\beta + 2\gamma} - \frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma}}.$$

В данном случае оправдан переход к безразмерным переменным с использованием безразмерных параметров C_1 и C_5:

$$\begin{gathered} k_1(f) = f/C_1, \quad k_2(f) = \sqrt{f^2/C_5^2 - k_0^2}, \quad f_1(f) = C_1 k, \quad f_2(k) = \sqrt{C_5^2 k^2 + w_0^2}, \\ C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_5^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{j X_0^2 f_0^2}, \quad w_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{j}}, \quad k_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + 2\gamma}}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь X_0 — некоторый характерный размер; f_0 — некоторая характерная частота. Таким образом, помимо скорости продольной волны C_1 необходимо ввести параметр C_5, зависящий от скорости продольной волны поворотов. Кроме того, для продольной волны поворотов существует запрещенная зона частот, характеризуемая частотой отсечки w_0. Из рассматриваемого решения также следует, что волна поворотов обладает дисперсией, но при достаточно больших частотах ее дисперсионная кривая описывается асимптотической зависимостью $k_r(f) = f/C_5$. Параметр C_5 использовался в работах [11–13] для получения решений, соответствующих волнам Рэлея и Лэмба. Из приведенных выше результатов следует его физический смысл — предельная скорость распространения объемной продольной волны поворотов.

Приведем зависимости волнового числа и фазовой скорости от частоты (2.1) для следующих значений материальных параметров: $\lambda = 2{,}8 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu = 4 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 10^5$ кг/м^3, $\alpha = 2 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\beta = 10^8$ Н, $\gamma = 1{,}936 \cdot 10^8$ Н, $\varepsilon = 3{,}0464 \cdot 10^9$ Н, $j = 10^4$ кг/м, $X_0 = 1$ м, $W_0 = 1$ рад/с.

На рис. 2,*а* приведены зависимости $k_1(f)$ и $k_2(f)$. Помимо продольной волны перемещений с известной дисперсионной кривой $k_1(f)$ в среде возникает независимая диспергирующая волна поворотов с волновым числом $k_2(f)$, имеющая нижнюю частоту w_0. На рис. 2,*б* представлены соответствующие зависимости фазовых скоростей от частоты. Видно, что скорость C_5 является предельной для волны поворотов.

Решения для объемных поперечных волн получаются из условий $U_x(z) = 0$, $U_y(z) = U_y$, $U_z(z) = U_z$, $W_x(z) = 0$, $W_y(z) = W_y$, $W_z(z) = W_z$. При этом из уравнений (1.8), (1.9) получаем две независимые системы уравнений относительно волнового числа и частоты для горизонтально и вертикально поляризованных поперечных волн соответственно:

$$\begin{aligned} &(\rho f^2 - k^2(\mu + \alpha))U_z + 2ik\alpha W_y = 0, \qquad ((\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha - jf^2)W_y + 2ik\alpha U_z = 0, \\ &(\rho f^2 - k^2(\mu + \alpha))U_y - 2ik\alpha W_z = 0, \qquad ((\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha - jf^2)W_z - 2ik\alpha U_y = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

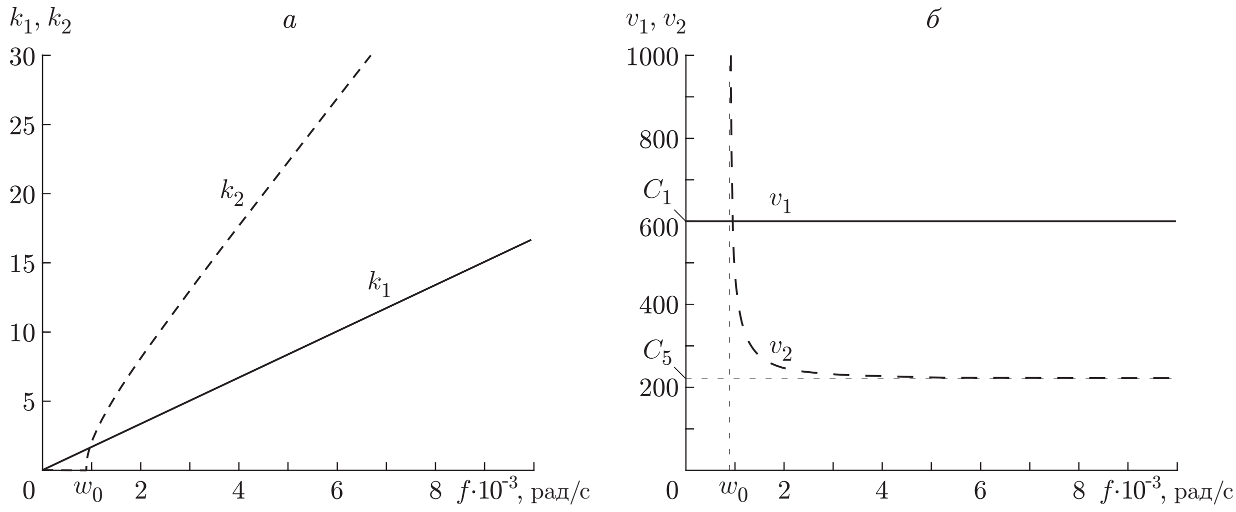

Рис. 2. Зависимости волнового числа (*а*) и фазовой скорости (*б*) от частоты для продольных волн перемещения и поворота в среде Коссера

В силу изотропности среды система уравнений инвариантна относительно поворота системы координат на угол, равный 90°, поэтому из обеих систем получаем одно и то же дисперсионное уравнение

$$(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)k^4+(4\alpha\mu-(j(\mu+\alpha)+\rho(\gamma+\varepsilon))f^2)k^2+j\rho f^4-4\alpha\rho f^2=0,$$

которое можно записать в безразмерном виде:

$$k^4+\Big(4A^2-\frac{C_3^2+C_4^2}{C_3^2C_4^2}\,f^2\Big)k^2+\frac{f^4}{C_3^2C_4^2}-\frac{4A^2}{C_2^2}\,f^2=0,$$

$$A^2=X_0^2\,\frac{\mu\alpha}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)},\qquad C_2^2=\frac{\mu}{\rho X_0^2f_0^2},\qquad C_3^2=\frac{\mu+\alpha}{\rho X_0^2f_0^2},\qquad C_4^2=\frac{\gamma+\varepsilon}{jX_0^2f_0^2}.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$k_3(f)=\sqrt{A_p},\qquad k_4(f)=\sqrt{A_m}. \tag{2.3}$$

Здесь

$$A_p=\frac{C_4^2+C_3^2}{2C_3^2C_4^2}\,f^2-2A^2+\sqrt{f^4\,\frac{C_3^4+C_4^4-2C_4^2C_3^2}{4C_3^4C_4^4}-2f^2\,\frac{A^2(C_3^2C_2^2+C_4^2C_2^2-2C_4^2C_3^2)}{C_3^2C_4^2C_2^2}+4A^4},$$

$$A_m=\frac{C_4^2+C_3^2}{2C_3^2C_4^2}\,f^2-2A^2-\sqrt{f^4\,\frac{C_3^4+C_4^4-2C_4^2C_3^2}{4C_3^4C_4^4}-2f^2\,\frac{A^2(C_3^2C_2^2+C_4^2C_2^2-2C_4^2C_3^2)}{C_3^2C_4^2C_2^2}+4A^4}.$$

Данное решение имеет следующую интерпретацию.

1. В случае среды Коссера поперечная волна имеет две волновые моды с волновыми числами $k_3(f)$ и $k_4(f)$ (в силу изотропии среды горизонтально и вертикально поляризованные поперечные волны неразличимы, поэтому по две волновые моды имеет каждая из них). В этом состоит отличие решений (2.3) от классического случая, когда имеется лишь одна волновая мода. При этом величины A_p и A_m, входящие в решения для волны Рэлея, поверхностной поперечной волны и волны Лэмба [11, 13], являются квадратами волновых чисел двух мод поперечной объемной волны.

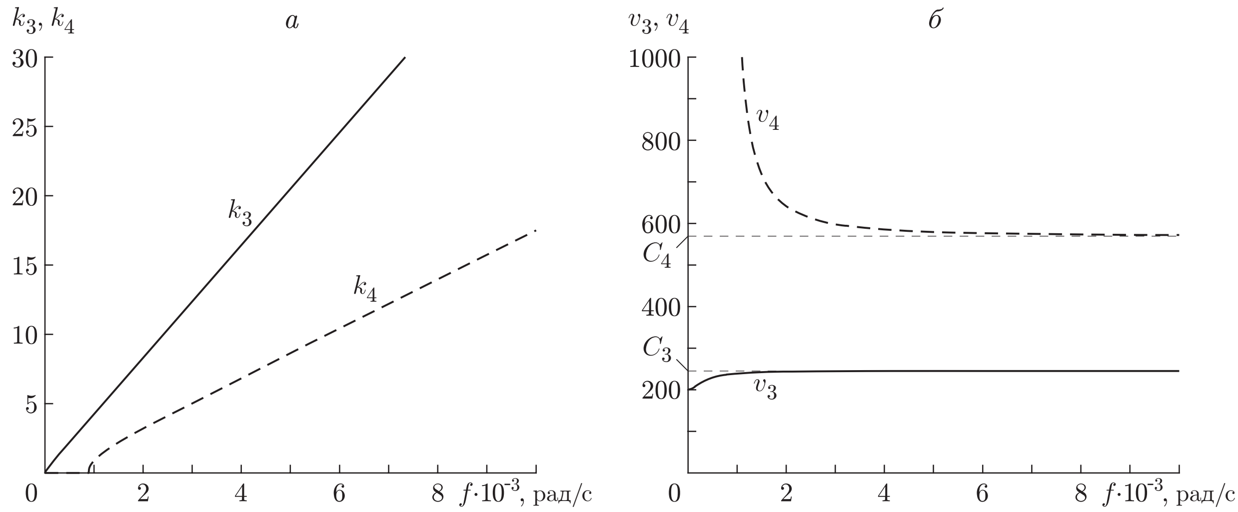

Рис. 3. Зависимости волнового числа (a) и фазовой скорости ($б$) от частоты для поперечных объемных волн в среде Коссера

2. В поперечной волне компоненты векторов перемещений и поворотов связаны между собой:

$$W_y = iU_z \frac{\rho f^2 - k^2\mu - k^2\alpha}{2k\alpha}, \qquad W_z = iU_y \frac{-\rho f^2 + k^2\mu + k^2\alpha}{2k\alpha}$$

(величины U_z, U_y могут принимать любые значения). Раздельное существование этих компонент возможно лишь при $\alpha = 0$, что следует из системы уравнений (2.2).

3. Обе волновые моды обладают дисперсией (рис. 3). Одна из мод имеет нижнюю критическую частоту (в данном случае эта частота определяется из уравнений (2.3) и не равна критической частоте w_0 продольной волны). Кроме того, безразмерные параметры C_3 и C_4, используемые при записи решений (2.3), в случае $f \to \infty$ являются асимптотическими скоростями объемных поперечных волновых мод (рис. 3,$б$).

Заключение. Основной результат, полученный в данной работе, состоит в следующем. Дана интерпретация параметров C_3, C_4, C_5, входящих в ранее полученные решения для поверхностных волн [11, 13]. Показано, что при $f \to \infty$ безразмерные параметры C_3 и C_4 являются асимптотическими скоростями мод объемных поперечных волн, в то время как скорость C_5 является предельной для продольной волны поворотов.

В отличие от классического случая, когда поперечная волна имеет только одну волновую моду, в решениях (2.1) и (2.3) получено четыре волновые моды, соответствующие продольной волне перемещений, продольной волне поворотов и поперечной волне, в которой направления перемещений перпендикулярны направлению распространения волны, а направления поворотов перпендикулярны направлению распространения волны и направлению перемещений. Данный результат в целом соответствует результатам [9]. В случае поперечной волны составляющая колебательного процесса, соответствующая перемещениям, существует одновременно с составляющей, характеризуемой вектором микровращений. В [9] это обстоятельство не учтено, что привело к ошибочному выводу о возможности раздельного существования двух поперечных волн перемещений и поворотов.

Обнаружено, что две из четырех указанных волновых мод имеют нижнюю критическую частоту. При частотах ниже этой частоты волна распространяться не может. В классическом случае и в случае поверхностных волн в среде Коссера такой эффект не наблюдается. Однако в [4] показано, что подобная нижняя критическая частота существует для волны Рэлея в рамках модели редуцированной среды Коссера при $\alpha = 0$. Отметим, что экспериментальных результатов, из которых следует наличие запрещенных зон частот для объемных волн, обнаружить не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nigbor R. L.** Six-degree-of-freedom ground-motion measurement // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1994. V. 84, N 5. P. 1665–1669.
2. **Igel H., Schreiber U., Flaws A., et al.** Rotational motions induced by the M8.1 Tokachi-oki earthquake, September 25, 2003 // Geophys. Res. Lett. 2005. V. 32. P. L08309.
3. **Савин Г. Н., Лукашов А. А., Лыско Е. М. и др.** Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением // Прикл. механика. 1970. Т. 6, № 6. С. 37–41.
4. **Kulesh M. A., Grekova E. F., Shardakov I. N.** Rayleigh wave in the isotropic and linear, reduced Cosserat continuum // Book of abstr. of Intern. summer school-conf. “Advanced problems in mechanics”, St. Petersburg (Russia), June 25 — July 1, 2006. St. Petersburg: Inst. for problems in mech. engng RAS, 2006. P. 53–54.
5. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
6. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999.
7. **Lakes R. S.** Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. by H. Muhlhaus. N. Y.: J. Wiley and Sons, 1995. Ch. 1. P. 1–22.
8. **Gauthier R. D., Jahsman W. E.** A quest for micropolar elastic constants. Pt 2 // Arch. Mech. 1981. V. 33, N 5. P. 717–737.
9. **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. V. 1. Foundation and solids. N. Y.: Springer-Verlag, 1999.
10. **Лялин А. Е., Пирожков В. А., Степанов Р. Д.** О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 6. С. 838–840.
11. **Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.** Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 116–124.
12. **Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.** О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 2. С. 227–235.
13. **Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.** Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 143–150.
14. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. СПб.: Изд-во “Лань”, 2003.
15. **Бхатнагар П.** Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 27/III 2007 г.