УДК 532.5

ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ БИНАРНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПОДВИЖНЫМИ ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ

Д. В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mail: dvk5@yandex.ru

Получен класс точных решений уравнений гидродинамики с добавочными напряжениями Кортевега, характеризуемый линейной зависимостью части компонент скорости от одной пространственной переменной. В рамках этого класса найдены точные решения двух задач о течении бинарной жидкости между движущимися плоскими твердыми границами. Получено семейство частных точных решений задачи о течении вязкой жидкости между плоскостями, сближающимися или удаляющимися друг от друга по специальному закону.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, напряжения Кортевега, точные решения.

При рассмотрении совместного движения двух или более различных жидкостей в гидродинамике, как правило, допустимо полагать, что зоной контакта сред является поверхность, обладающая собственной энергией. Эта энергия возникает в результате микроскопического взаимодействия молекул контактирующих фаз, учитываемого в макроскопических условиях на границе раздела движущихся жидкостей в виде сил поверхностного натяжения. В ряде случаев, например при движении легко смешивающихся жидкостей, область контакта не может быть заменена поверхностью нулевой толщины. При этом капиллярные силы не исчезают, а "размываются", создавая (аналогично силам вязкого трения) дополнительные внутренние напряжения во всей диффузионной подобласти, заполненной смесью жидкостей. Теоретическое моделирование этих дополнительных напряжений обычно основывается на предположении о зависимости той или иной термодинамической величины от квадрата градиента концентрации [1–3]. Первые шаги в указанном направлении были сделаны Д. Кортевегом [4]. Некоторые трудности, возникающие при использовании подхода Д. Кортевега, и способы их преодоления обсуждались в работе [5].

Согласно [6] точные решения уравнений гидродинамики с добавочными напряжениями Кортевега, по-видимому, отсутствуют. Исключением является работа [7], в которой для двумерного случая найден класс точных решений с линейной зависимостью части компонент скорости от двух координат. С использованием решений этого класса в бездиссипативном приближении рассмотрен пример уединенной бегущей волны, распространяющейся в бинарной жидкости. В настоящей работе обобщенный на трехмерный случай класс точных решений, полученных в [7], применяется для описания течений бинарной жидкости между подвижными плоскими границами.

1. Класс точных решений уравнений гидродинамики с дополнительными напряжениями Кортевега. Изотермическое течение несжимаемой бинарной жидкости

Работа выполнена в рамках совместного проекта СО РАН, УрО РАН, ДВО РАН № 116/09-С-1-1005 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00305).

в предположении о близости плотностей ее компонентов (используются принятые в работах [8, 9] допущения, упрощающие модель) будем описывать уравнениями гидродинамики с добавочными напряжениями Кортевега

$$D_t\boldsymbol{v} = -\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{v} - K^2\nabla C\,\Delta C, \qquad D_tC = D\,\Delta C, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости бинарной жидкости; P — давление, отнесенное к постоянной плотности; C — массовая концентрация одного из веществ, составляющих смесь; K — положительная постоянная с размерностью коэффициентов диффузии D и кинематической вязкости ν; $D_t = \partial/\partial t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$ — оператор полной производной по времени t.

В работе [7] показано, что система (1) допускает класс точных решений с линейной зависимостью концентрации и части компонент скорости от двух пространственных переменных. Общее представление решений этого типа в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) имеет вид (аналог [10, 11])

$$\begin{gathered} v_1 = x_1u_{11}(t,x_3) + x_2u_{12}(t,x_3) + u_{13}(t,x_3),\\ v_2 = x_1u_{21}(t,x_3) + x_2u_{22}(t,x_3) + u_{23}(t,x_3),\\ v_3 = u_{33}(t,x_3), \qquad C = x_1c_1(t,x_3) + x_2c_2(t,x_3) + c_3(t,x_3),\\ P = \Pi(t,x_3) - K^2[x_1c_1'c_3' + x_2c_2'c_3' + (x_1c_1' + x_2c_2')^2/2] \end{gathered} \tag{2}$$

(штрих обозначает дифференцирование по переменной x_3). Новые неизвестные удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_{ji}}{\partial t} + u_{j1}u_{1i} + u_{j2}u_{2i} + u_{33}u_{ji}' = \nu u_{ji}'' - K^2(c_jc_i'' - c_j'c_i'), \qquad u_{33}' + u_{11} + u_{22} = 0,\\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + u_{1i}c_1 + u_{2i}c_2 + u_{33}c_i' = Dc_i'', \qquad \Pi = \nu u_{33}' + \frac{u_{33}^2 + K^2c_3'^2}{2} - \int \frac{\partial u_{33}}{\partial t}\,dx_3,\\ i = 1,2,3, \qquad j = 1,2. \end{gathered}$$

Используем класс (2) для решения двух задач о плоском течении бинарной жидкости между подвижными плоскими стенками. Следует отметить, что представление (2), удовлетворяющее уравнениям (1) при любых x_1, x_2, с физической точки зрения справедливо при условии, что характерный линейный масштаб течения L в этих направлениях значительно превышает масштаб движения l вдоль оси x_3. Таким образом, используемая далее идеализация — замена стенок неограниченными плоскостями — означает, что расстояние между стенками существенно меньше их собственной протяженности. Это замечание относительно класса (2) принципиально важно также вследствие естественного ограничения на величину концентрации $0 \leqslant C \leqslant 1$.

2. Плоское течение Куэтта — Пуазейля бинарной жидкости. Рассмотрим плоское установившееся течение бинарной жидкости между твердыми плоскостями $y = 0$, $y = H$ под действием параллельного им однородного градиента давления. Плоскость $y = H$ перемещается вдоль оси x с постоянной скоростью V. На твердых стенках выполняются условия прилипания и отсутствия нормального диффузионного потока:

$$y = 0\colon \quad v_x = v_y = \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \qquad y = H\colon \quad v_x = V, \quad v_y = \frac{\partial C}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Здесь v_x, v_y — компоненты скорости в декартовых координатах (x, y). Решение системы (1) с граничными условиями (3) будем искать в виде

$$v_x = Vv(y_*), \quad v_y = 0, \quad C = c(y_*) + sx_*, \quad P = V^2\Big[px_* - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\mathrm{Kw}\,\mathrm{Re}}\,\frac{\partial c}{\partial y_*}\Big)^2\Big], \tag{4}$$

где $x_* = x/H$, $y_* = y/H$ — безразмерные координаты (далее индекс “$*$” опускается); $\mathrm{Re} = VH/\nu$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Kw} = \nu/K$. Константы p, s — безразмерные величины продольных градиентов давления и концентрации. Представление (4), очевидно, является частным случаем (2).

Для новых безразмерных неизвестных c, v имеем линейную систему уравнений

$$\frac{v''}{\mathrm{Re}} = \frac{sc''}{(\mathrm{Re}\,\mathrm{Kw})^2} + p, \qquad \frac{c''}{\mathrm{Sc}\,\mathrm{Re}} = sv \tag{5}$$

с граничными условиями, следующими из (3):

$$y = 0\colon \quad v = c' = 0, \qquad y = 1\colon \quad v = 1, \quad c' = 0 \tag{6}$$

(штрих обозначает дифференцирование по переменной y; $\mathrm{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта).

Найдем решение краевой задачи (5), (6)

$$v = A_1 \operatorname{sh}(\sigma y) + A_2(\operatorname{ch}(\sigma y) - 1),$$

$$c - c_0 = \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Kw}\sqrt{\mathrm{Sc}}}{\sigma}\Big(A_1(\operatorname{sh}(\sigma y) - \sigma y) + A_2 \operatorname{ch}(\sigma y) - \frac{q}{2}\,y^2\Big), \tag{7}$$

$$A_1 = \frac{\sigma^2 + (1 - \operatorname{ch}(\sigma))q}{\sigma^2 \operatorname{sh}(\sigma)}, \qquad A_2 = \frac{q}{\sigma^2},$$

существующее при условии, что $\sigma = s\sqrt{\mathrm{Sc}}/\mathrm{Kw}$ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$F(\sigma) = (1 + \sigma^2/(2q)) \operatorname{sh}(\sigma/2) - (\sigma/2) \operatorname{ch}(\sigma/2) = 0, \tag{8}$$

содержащему в качестве параметра безразмерный комплекс $q = p\,\mathrm{Re}$.

Поскольку в граничные условия (3) и уравнения (1) входят только производные от C, поле концентрации определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной c_0 (см. (7)), для нахождения которой достаточно знать концентрацию примеси в одной точке области течения.

При любом значении q уравнение (8) имеет тривиальное решение $\sigma = 0$, что эквивалентно $s = 0$, $c = c_0$, т. е. однородному распределению компонентов смеси, не оказывающему влияния на картину течения, описываемую, как и в случае “чистой” жидкости, параболическим профилем скорости

$$v = qy^2/2 + (1 - q/2)y, \qquad C = c_0. \tag{9}$$

Начиная со значения параметра $q = 6$, соответствующего течению (9) с нулевым расходом, функция $F(\sigma)$ становится немонотонной, а тривиальное решение уравнения (8) — неединственным. Возникает пара новых решений, которые в силу нечетности функции $F(\sigma)$ различаются лишь знаком, т. е. направлением продольного градиента концентрации. Для поля скорости (4), (7) ответвляющихся решений, как и в точке бифуркации, расход равен нулю, поскольку в отсутствие объемных и поверхностных источников примеси поддержание стационарного продольного градиента концентрации возможно лишь в условиях замкнутого потока. Данный результат обусловлен конкуренцией сдвигового (со скоростью V) и динамического (с безразмерным продольным градиентом p) воздействий на жидкость, что соответствует положительным значениям параметра $q = pVH/\nu$.

Вследствие действия напряжений Кортевега профиль скорости становится более плоским по сравнению с профилем (9) (при $q = 6$) и движение жидкости замедляется. При достаточно больших значениях параметра σ (σ — решение (8) при $q \gg 6$), характеризующего степень влияния сил Кортевега, течение представляет собой почти однородный поток, направленный в сторону падения давления. Влияние вязкости локализовано вблизи твердых границ, перемещение одной из которых обусловливает сдвиговое противотечение, обеспечивающее нулевой расход.

3. Течение между нормально движущимися плоскостями. Рассмотрим задачу о нестационарном течении бинарной жидкости между неподвижной плоскостью $y = 0$ и плоскостью, движущейся в перпендикулярном к себе направлении по закону $y = H(t)$. На твердых стенках выполняются условия прилипания и отсутствия нормального диффузионного потока:

$$y = 0:\quad v_x = v_y = \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \qquad y = H(t):\quad v_x = \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad v_y = \frac{dH}{dt}. \tag{10}$$

Решение плоской задачи будем искать в рамках класса (2), полагая

$$\begin{gathered} v_x = -xw'(t,y), \qquad v_y = w(t,y), \qquad C = c_0 \pm xc(t,y), \\ P = \nu w' - \frac{w^2}{2} - \int \frac{\partial w}{\partial t}\,dy + \bigl(p(t) - (Kc')^2\bigr)\,\frac{x^2}{2} \end{gathered} \tag{11}$$

(штрих обозначает дифференцирование по переменной y; c_0 — константа). Три неизвестные функции w, c, p удовлетворяют системе двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + ww'' - w'w' = \nu w''' + K^2(cc'' - c'c') + p, \qquad \frac{\partial c}{\partial t} + wc' - w'c = Dc'' \tag{12}$$

с шестью граничными условиями, следующими из (10):

$$y = 0:\quad w = w' = c' = 0, \qquad y = H(t):\quad \frac{dH}{dt} = w, \quad w' = c' = 0. \tag{13}$$

При заданных начальном состоянии жидкости и законе перемещения подвижной плоскости $H(t)$ система (12), (13) полностью описывает течение вида (11). Эта задача трудноразрешима в силу ряда особенностей класса точных решений (11) и исследуемой проблемы. Чтобы показать эти особенности, рассмотрим обратную задачу: задав вид поля скорости, удовлетворяющий (12), найдем закон движения плоскости $y = H(t)$.

Решение (12) будем искать в виде

$$w = A(t)y + B(t)\sin(\omega(t)y), \qquad c = a(t) + b(t)\cos(\omega(t)y), \tag{14}$$

задающем пространственную структуру потока, в том числе в начальный момент времени $t = 0$. С учетом краевых условий (13) неизвестные A, a, b, ω удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d\omega}{dt} + A\omega = 0, \qquad \frac{dA}{dt} - 2A^2 + \nu\omega^2 A - K^2\omega^2 ab = 0, \\ \frac{da}{dt} - (a-b)A = 0, \qquad \frac{db}{dt} + (a-b)A + D\omega^2 b = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Остальные величины находим по формулам

$$H = \frac{2\pi n}{\omega}, \qquad B = -\frac{A}{\omega}, \qquad p = \frac{dA}{dt} - 2A^2 + (K\omega b)^2, \tag{16}$$

где n — любое натуральное число.

Рассмотрим частный случай течения однородной по составу жидкости. При $K = a = b = 0$ система (15) сводится к элементарной квадратуре

$$t + C_2 = -2\int \frac{d\omega^2}{\nu\omega^4 + 4C_1}, \qquad A = \frac{\nu\omega^2}{4} + \frac{C_1}{\omega^2}. \tag{17}$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования, которые можно найти, задав начальное H_0 и конечное H_1 положения подвижной плоскости, а также ее скорость V при $t = 0$. Результат вычисления интеграла в (17) зависит от знака константы C_1.

При $C_1 \leqslant 0$ плоскость перемещается по закону

$$\frac{H}{H_1} = \sqrt{\frac{1 - h\exp(-\xi)}{1 + h\exp(-\xi)}}, \qquad \xi = \frac{4\nu \operatorname{Re} H_1^2}{H_1^4 - H_0^4}\, t, \qquad h = \frac{H_1^2 - H_0^2}{H_1^2 + H_0^2}, \tag{18}$$

причем ее начальное и конечное положения связаны соотношением

$$\Big(\frac{H_0}{H_1}\Big)^4 = 1 - \frac{\operatorname{Re}}{(\pi n)^2} \tag{19}$$

(n — натуральное число). Формула (19) определяет бесконечный дискретный спектр чисел Рейнольдса $\operatorname{Re} = VH_0/\nu$, при которых плоскость может быть перемещена из одного заданного положения H_0 в другое заданное положение H_1 счетным количеством подобных друг другу способов (18). Расстояние между плоскостями уменьшается при отрицательных значениях числа Рейнольдса и увеличивается при положительных.

Соотношения (18), (19) применимы также в случае первоначально сомкнутых плоскостей ($H_0 = 0$). Тогда спектр чисел Рейнольдса задается формулой $\operatorname{Re} = (\pi n)^2$, не зависящей от конечного положения плоскости H_1. В тот момент, когда сомкнутые плоскости начинают расходиться, жидкость мгновенно заполняет образующийся зазор, т. е. ее скорость оказывается бесконечной (при конечном Re), что является одним из отмеченных выше осложнений, возникающих при прямом численном решении задачи (12), (13).

Следует отметить, что спектру $\operatorname{Re} = (\pi n)^2$ принадлежит решение задачи

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{1 + 2\operatorname{Re}\,\frac{\nu t}{H_0^2}}, \tag{20}$$

являющееся предельным случаем (18), (19), при H_1, стремящемся к бесконечности.

В случае $C_1 > 0$ интеграл (17) также легко вычисляется, но получающиеся решения становятся сингулярными за конечное время δt. В течение этого промежутка времени подвижная плоскость проходит "бесконечное" расстояние, т. е. расстояние H, значительно превышающее характерный линейный размер L стенки, замененной бесконечной плоскостью. Однако в силу замечания, приведенного в конце п. **1**, область применимости класса (2) ограничивается противоположным случаем $H \ll L$, поэтому случай $C_1 > 0$ в данной работе подробно не рассматривается.

В рамках класса (11), (14) удается построить нетривиальный пример точного решения уравнений Эйлера, удовлетворяющего условиям прилипания (10). Принимая в (17) $\nu = 0$, получаем закон движения плоскости

$$\frac{H}{H_0} = \Big(1 - 2\,\frac{Vt}{H_0}\Big)^{-1/2},$$

согласно которому расстояние между плоскостями H уменьшается ($V < 0$) от конечной величины H_0 до нуля за бесконечное время, что согласно (18) невозможно в вязкой жидкости. Так же как и в случае вязкой жидкости, решение перестает существовать за конечное время, равное $H_0/(2V)$, если подвижная плоскость удаляется от покоящейся с начальной скоростью $V > 0$.

Заметим, что в случае однокомпонентной вязкой жидкости для неизвестной w возможно представление, обобщающее (14) [12, 13], которое также может служить решением задачи о течении между сближающимися или удаляющимися плоскостями.

Рассмотрим движение бинарной жидкости. Ограничимся анализом двух семейств решений системы (15), (16), зависящих от натурального параметра n. Первое из этих семейств описывает "медленное" перемещение плоскости на бесконечность:

$$\begin{gathered}\frac{H}{H_0}=\sqrt{1+2\,\mathrm{Re}\;\frac{\nu t}{H_0^2}},\qquad \mathrm{Re}=\frac{8(\pi n)^2}{3\,\mathrm{Sc}},\\ A=\frac{\nu\,\mathrm{Re}}{H^2},\qquad a=\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{2\,\mathrm{Sc}}\Big(\mathrm{Sc}-\frac{8}{3}\Big)}\,\frac{\mathrm{Kw}}{H},\qquad a=\sqrt{\frac{2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Sc}}\Big(\mathrm{Sc}-\frac{8}{3}\Big)}\,\frac{\mathrm{Kw}}{H}.\end{gathered}\tag{21}$$

Как и в случае рассмотренного выше течения Куэтта — Пуазейля, влияние напряжений Кортевега на течение имеет пороговый характер: при значениях числа Шмидта, меньших 8/3, решения (21) не существует. В случае строгого равенства $\mathrm{Sc}=8/3$ выражения (21) дают решение (20) для однокомпонентной жидкости.

Второе семейство решений системы (15), (16) существует, если $\mathrm{Sc}=3$. Закон движения плоскости $H(t)$ задается в неявном виде

$$\begin{gathered}\eta=\ln\Big(\frac{1-(H/H_1)^3}{(1-H/H_1)^3}\Big)+\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{2+H/H_1}{\sqrt{3}\,H/H_1}\Big)-\frac{\pi}{9},\\ \eta=\frac{8\nu(H_1^3-H_0^3)}{27\,\mathrm{Re}\,H_1^5}\,(t+t_0),\qquad \mathrm{Re}=\frac{H_1^3-H_0^3}{18(\pi n)^2H_1^3}.\end{gathered}\tag{22}$$

Здесь t_0 — постоянная, связанная с начальным расстоянием между плоскостями H_0 соотношениями (22) для момента времени $t=0$. Остальные величины вычисляются по формулам

$$A=\frac{\nu\,\mathrm{Re}\,H}{H_1^3-H_0^3}\Big[\Big(\frac{H_1}{H}\Big)^3-1\Big],\quad a=\frac{2\pi n\,\mathrm{Kw}}{9H}\Big[1+2\Big(\frac{H}{H_1}\Big)^3\Big],\quad b=\frac{4\pi n\,\mathrm{Kw}}{9H}\Big[1-\Big(\frac{H}{H_1}\Big)^3\Big].$$

В случае если параметр H_1 положителен, он имеет смысл расстояния, на котором окажутся диски за бесконечное время при их монотонном сближении ($\mathrm{Re}<0$) или удалении ($\mathrm{Re}>0$), в том числе из первоначально сомкнутого положения $H_0=0$. При $H_1<0$, $\mathrm{Re}>0$ решение (22) существует в течение конечного промежутка времени, за который подвижная плоскость переместится на бесконечность.

Заключение. В работе показано, что уравнения гидродинамики с добавочными напряжениями Кортевега допускают существование класса точных решений с линейной зависимостью концентрации и части компонент скорости от двух пространственных переменных. В рамках этого класса применительно к бинарной жидкости рассмотрены задача Куэтта — Пуазейля и задача о течении между монотонно сближающимися или удаляющимися по заданному закону плоскостями. Показано, что частные решения этих задач существуют лишь при условии достижения определяющими параметрами критических значений. Например, решение задачи Куэтта — Пуазейля для двухкомпонентной смеси существует, только когда воздействие на жидкость продольного градиента давления компенсируется перемещением твердой границы, в результате чего расход равен нулю. Последнее обстоятельство является необходимым условием для поддержания стационарного продольного градиента концентрации в отсутствие ее объемных и поверхностных источников.

Использование известного решения уравнений Навье — Стокса типа (11), (14) позволило получить выраженное в элементарных функциях частное решение задачи о течении между сближающимися или удаляющимися плоскостями, на которых выполняются условия прилипания независимо от вязкости жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cahn J. W., Hilliard J. E.** Free energy of a nonuniform system. 1. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28, N 2. P. 258–267.
2. **Старовойтов В. Н.** Модель движения двухкомпонентной жидкости с учетом капиллярных сил // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 85–92.
3. **Antanovskii L. K.** A phase-field model of capillarity // Phys. Fluids. 1995. V. 7. P. 747–753.
4. **Korteweg D. J.** Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais connues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité // Arch. Néerland. Sci. Exact. Naturell. 1901. V. 6. P. 1–24.
5. **Dunn J. E., Serrin J. B.** On the thermomechanics of interstitial working // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 95–133.
6. **Anderson D. M., McFadden G. B., Wheeler A. A.** Diffuse interface methods in fluid mechanics // Ann. Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 139–165.
7. **Aristov S., Bessonov N., Gaponenko Yu., Volpert V.** Interfacial waves in binary fluids // Proc. of the Intern. conf. “Paterns and waves: theory and applications”, Saint Petersburg (Russia), 8–12 July 2002. St. Petersburg: AcademPrint, 2003. P. 79–97.
8. **Гапоненко Ю. А., Вольперт В. А., Зеньковская С. М., Пойман Д. А.** Влияние высокочастотной вибрации на конвекцию в смешивающихся жидкостях // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 49–59.
9. **Pojman J. A., Chekanov Yu., Wyatt V., et al.** Numerical simulations of convection induced by Korteweg stresses in a miscible polymer-monomer system: effects of variable transport coefficients, polymerization rate and volume changes // Microgravity Sci. Technol. 2009. V. 21. P. 225–237.
10. **Lin C. C.** Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 391–395.
11. **Сидоров А. Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач м.с.с. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1981. С. 101–117.
12. **Кузнецов В. В., Пухначев В. В.** Новое семейство точных решений уравнений Навье — Стокса // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 1. С. 40–44.
13. **Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.** Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.

Поступила в редакцию 11/III 2010 г.