

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 622.83+539.4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ГИДРОРАЗРЫВЕ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

А. М. Линьков

*Институт проблем машиноведения РАН, E-mail: voknilal@hotmail.com,
Большой проспект, В. О., 61, 199178, г. Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
ул. Политехническая, 29, 195251, г. Санкт-Петербург, Россия*

Решение задачи о гидроразрыве для модели Христиановича–Гиртсма–де Клерка получено на основе модифицированной постановки, в которой в отличие от традиционного подхода используется скорость частиц вместо потока. Это позволило дополнить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающую после дискретизации по пространственной переменной, уравнением скорости фронта. Полученная полная система решена методом Рунге–Кутты при произвольных начальных условиях. Установлено и численно исследовано затухающее влияние начальных условий на ключевые параметры трещины (раскрытие, длину) в конце гидроразрыва.

Гидравлический разрыв, уравнение скорости, асимптотический зонтик, начальные условия, неньютоновская жидкость, раскрытие, длина трещины

Метод гидроразрыва (ГР), ввиду его важного практического значения, был и остается предметом интенсивных исследований [1]. В традиционной постановке задачи о ГР в качестве одной из основных переменных используется поток, а продвижение трещины отслеживается с помощью уравнения глобального баланса жидкости [2–7]. Как показано в [8], при обычном пренебрежении отставанием фронта жидкости от контура трещины это ведет к некорректной математической задаче и необходимости ее регуляризации, если на шагах времени фиксировать положение фронта. Там же установлено фундаментальное значение уравнения скорости, которое хотя и было выявлено Л. Ф. Кемпом в 1990 г. [9], но оставалось незамеченным в течение двух последующих десятилетий. В свою очередь уравнение скорости вовлекает в рассмотрение скорость частиц как основную переменную, заменяющую традиционно используемый поток. Эти модификации позволили получить простые аналитические решения [10–12] классических задач и существенно повысить эффективность численного решения задач [1, 8, 11] для моделей Христиановича–Гиртсма–де Клерка (ХГД) [13–15] и Перкинса–Керна–Нордгрена (ПКН) [2, 16].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-00017).

Детальный анализ преимуществ модифицированной постановки задачи дан в работе [17], где показано, что использование скорости вместо потока устраняет ряд недоразумений и позволяет применить классические методы теории распространяющихся поверхностей [18] для отслеживания продвижения фронта. Кроме того, выявлена универсальная асимптотическая формула — универсальный асимптотический зонтик (УАЗ), который полностью определяет поведение решения около движущегося фронта и тем самым правую часть уравнения скорости.

Достоинства этих нововведений показаны в работе [1], где их использование позволило решить задачу ХГД с высокой (до пяти-шести верных значащих цифр) точностью при сравнительно небольшом числе узловых точек на полудлине трещины. При решении задачи авторы применили подход *ad hoc*, поскольку в этом случае имеется простая аналитическая зависимость для ядра оператора, обратного к гиперсингулярному оператору, выражающему давление через раскрытие. Важно, что ядро обратного оператора имеет не более чем логарифмическую особенность. Однако столь благоприятное обстоятельство отсутствует в общем случае трехмерной задачи ГР: приходится исходить из гиперсингулярного оператора, выражающего дифференциальное давление через раскрытие трещины [6, 19]. Кроме того, использование обратного оператора вовлекает итерации, уточняющие раскрытие при *фиксированном* положении фронта. Это вынуждает использовать регуляризацию и не позволяет свести задачу к динамической системе, решаемой методами типа Рунге–Кутты, Адамса и т. п. Затрудняется также исследование влияния начальных условий на решение, поскольку сходимость итераций, выполняемых на шагах времени, существенно зависит от того, как близко исходное приближение находится от точного решения. Выбор же подходящего исходного приближения, будучи очевидным для условий, принятых в работе [1] и отвечающих автотельному решению, становится отдельной задачей.

Поэтому, имея в виду преимущества модифицированной постановки в общем случае и зависимость решения от начальных условий, целесообразно разработать метод, в котором связь между давлением и раскрытием задается гиперсингулярным оператором.

Создание и применение такого метода составляет цель данной работы. В ней предложена конечно-разностная схема динамической задачи, обеспечивающая применимость метода Рунге–Кутты для модели ХГД при произвольных начальных значениях длины и раскрытия трещины. Численная реализация подхода выполнена для жидкости со степенным законом вязкости при показателе степени от нуля (идеально-пластическая жидкость) до единицы (ньютоновская жидкость). Установлена его высокая эффективность при произвольных начальных условиях. Это позволило детально изучить влияние сильных возмущений в начальных условиях на решение. Анализ результатов показал, что с течением времени влияние возмущений исходной длины и раскрытия трещины затухает.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается модель ХГД [1, 3, 5, 13–15] симметричного распространения ГР в направлении оси x от точечного источника разрывающей жидкости в центре трещины. Жидкость считается несжимаемой, а отставание фронта от кончика трещины пренебрежимо малым. Реологические свойства жидкости задаются степенной зависимостью

$$\tau = M\dot{\gamma}^n, \quad (1)$$

где τ — касательное напряжение; $\dot{\gamma}$ — скорость деформации сдвига; M — показатель консистенции; n — показатель поведения жидкости. Тогда для течения в узком канале шириной h зависимость между средней по сечению скоростью частиц жидкости v и давлением p выражается зависимостью типа Пуазейля [5]:

$$v = \left(-\frac{w^{n+1}}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n}, \quad (2)$$

где $\mu' = \theta M$, $\theta = 2 \left[\frac{2(2n+1)}{n} \right]^{1/n}$. В случае ньютоновской жидкости $\theta = 12$, для идеально-пластической жидкости $\theta = 2$. Для задачи о гидроразрыве давление может ассоциироваться с разностью между давлением жидкости и нормальной к поверхности трещины составляющей горного давления.

Уравнение сохранения массы при течении в узком канале имеет вид [5]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial(wv)}{\partial x} - q_l, \quad (3)$$

где член q_l учитывает утечку жидкости в породы. В согласии с модифицированной постановкой, в отличие от [5], в формулах (2) и (3) используется скорость частиц v , а не поток $q = wv$.

В конце трещины x_* скорость частиц равна скорости продвижения фронта v_* , что выражается уравнением скорости [8, 10]

$$v_* = \frac{dx_*}{dt} = \lim_{x \rightarrow x_*} \left(-\frac{w^{n+1}}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n}. \quad (4)$$

В источнике жидкости ($x = 0$) задается ее приток $Q(t) = 2q_0(t)$ в единицу времени. Ввиду симметрии задачи, он поровну распределяется между правой и левой частями трещины, так что

$$w(0)v(0) = q_0. \quad (5)$$

Раскрытие w заранее неизвестно. Оно зависит от упругости вмещающих пород и определяется гиперсингулярным уравнением теории упругости:

$$\frac{E'}{4\pi} \int_0^{x_*} \left[\frac{1}{(\xi-x)^2} + \frac{1}{(\xi+x)^2} \right] w(\xi) d\xi = p(x), \quad 0 \leq x \leq x_*, \quad (6)$$

где $E' = E/(1-\nu^2)$, E — модуль упругости породы, ν — ее коэффициент Пуассона. При записи уравнения (6) учтено, что $w(-x) = w(x)$, $p(-x) = p(x)$. Решение уравнения (6) ищется в классе функций, для которых раскрытие в конце трещины равно нулю в любой момент времени t :

$$w(x_*, t) = 0. \quad (7)$$

Распространение трещины становится возможным, когда выполнено условие линейной механики разрушения [20]: $K_I = K_{IC}$, где K_I — коэффициент интенсивности напряжений (КИН). В рассматриваемой задаче

$$K_I = 2\sqrt{\frac{x_*}{\pi}} \int_0^{x_*} \frac{p(x) dx}{\sqrt{x_*^2 - x^2}}, \quad (8)$$

K_{IC} — критическое значение КИН, определяемое прочностью породы. Условие разрушения удобно записать в эквивалентной форме:

$$w(x)_{x \rightarrow x_*} = \frac{8}{\sqrt{2\pi E'}} \sqrt{x_* - x} K_{IC} + O(r^{1/2+\varepsilon}), \quad (9)$$

следующей из асимптотической формулы для раскрытия около конца трещины [21]. В (9) $r = x_* - x$ — расстояние от конца трещины; $\varepsilon > 0$. В обычно рассматриваемом важнейшем для практики случае, когда сопротивление продвижению трещины определяется вязкостью жидкости, можно считать $K_{IC} = 0$. Тогда асимптотическое поведение решения зависит только от скорости фронта v_* . Далее основное внимание уделено этому случаю.

Начальными условиями задачи служат заданная в начальный момент времени t_0 исходная полудлина трещины x_{*0} и исходное раскрытие на ней $w_0(x)$:

$$x_*(t_0) = x_{*0}, \quad w_0(x, t_0) = w_0(x). \quad (10)$$

Требуется найти решение системы уравнений (3), (2) и (6), удовлетворяющее граничным условиям в источнике (5) и в конце трещины (7) и начальным условиям (10), причем полудлина трещины $x_*(t)$ определяется уравнением скорости (4), а асимптотическое поведение раскрытия должно удовлетворять (9).

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Прежде чем переходить к численному решению задачи, проведем замену переменных, которая исключает два параметра, — модуль упругости E' и обобщенную вязкость μ' . Это можно сделать множеством способов, из которых простейший состоит во введении следующих переменных:

$$w' = \frac{w}{w_n}, \quad p' = \frac{p}{w_n E'}, \quad q_l' = \frac{q_l}{w_n}, \quad w_0' = \frac{w_0}{w_n}, \quad q_0' = \frac{q_0}{w_n}, \quad (11)$$

с нормирующим раскрытием

$$w_n = \left(\frac{1}{t_s^n} \frac{\mu'}{E'} \right)^{1/(n+2)}, \quad (12)$$

где t_s — множитель, изменяющий единицу времени, которая в скорости деформации, входящей в уравнение вязкости (1), обычно составляет секунду, тогда как скорость ГР удобнее измерять как путь за минуты, десятки или сотни минут. В частности, взяв за единицу времени 1 мин, имеем $t_s = 60$. Фактически $\frac{1}{t_s^n} \mu'$ выражает обобщенную вязкость в единицах t_s , с, если при зада-

нии закона вязкости (1) скорость деформации имела размерность $1/s$. Тогда скорость частиц v в (2), утечка жидкости в породы q_l в (3), скорость продвижения трещины v_* в (4), приток q_0 в источнике в (5) и начальное время t_0 в (10) задаются в единицах времени t_s , с. Используя (11) и (12) в предыдущих уравнениях, получаем те же уравнения относительно новых переменных, но теперь $E' = 1$ и $\mu' = 1$, а единицей времени служат минуты. Подчеркнем, что эта возможность появилась как еще одно благоприятное следствие использования скорости частиц вместо традиционного использования потока. Будем считать, что нормировка (11) выполнена и надлежащий масштаб времени введен, так что, например, $t_0 = 1$ отвечает 1 мин (соответственно $t = 100$ отвечает 100 мин). Для упрощения обозначений штрихи при новых переменных опускаются.

Введем безразмерную координату $\zeta = x/x_*$. Тогда уравнения (3), (2) и (6) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial(wv)}{x_* \partial \zeta} + \zeta \frac{v_*}{x_*} \frac{\partial w}{\partial \zeta} - q_l, \quad (13)$$

$$v = \left(-w^{n+1} \frac{1}{x_*} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)^{1/n}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\pi x_*} \int_0^1 \left[\frac{1}{(\tau - \zeta)^2} + \frac{1}{(\tau + \zeta)^2} \right] w(\tau) d\tau = p(\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (15)$$

где в отличие от (3) в преобразованном уравнении сохранения массы (13) производная по времени вычисляется при постоянном значении безразмерной, а не глобальной координаты (детальный вывод уравнения (13) дан в [10, 11]).

Учтем, что поведение раскрытия около конца трещины определяется асимптотическим зонтиком [17]. В рассматриваемом случае преобладающего влияния вязкости имеем около конца трещины [17]

$$w = A_\mu(\alpha) v_*^{1-\alpha} [x_*(1-\zeta)]^\alpha, \quad (16)$$

где $\alpha = \frac{2}{n+2}$; $A_\mu(\alpha) = [(1-\alpha)B(\alpha)]^{-\alpha/2}$, $B(\alpha) = \frac{\alpha}{4} \text{ctg}[\pi(1-\alpha)]$. Асимптотическое уравнение (16) автоматически удовлетворяет граничному условию (7) нулевого раскрытия на фронте.

Учитывая (16), уравнение скорости (4) принимает вид

$$v_* = \frac{dx_*}{dt} = [A_\mu(\alpha)]^{-1/(1-\alpha)} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left[\frac{w(\zeta)}{x_*^\alpha (1-\zeta)^\alpha} \right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (17)$$

При решении системы уравнений (13)–(15) требуется удовлетворить условию заданного притока в источнике (5):

$$w(0)v(0) = q_0. \quad (18)$$

Начальными условиями служат условия (10), которые записываются как

$$x_*(t_0) = x_{*0}, \quad w(\zeta, t_0) = w_0(\zeta). \quad (19)$$

В итоге требуется решить систему уравнений (13)–(15) при граничном условии (18) и начальных условиях (19), причем полудлина трещины x_* определяется уравнением скорости (17), а поведение раскрытия около фронта задается асимптотическим зонтиком (16).

В рассматриваемом частном случае принимается [3, 5, 10], что в начальный момент $t_0 = 0$ длина трещины и раскрытие на ней равны нулю:

$$x_*(0) = 0, \quad w(\zeta, 0) = 0. \quad (20)$$

При условиях (20) задача не содержит характерных длины и времени. Она имеет автомодельное решение, которое находится с высокой точностью [1, 5]. Далее начальные условия (20) и соответствующее автомодельное решение служат как эталонные для оценки точности разрабатываемого численного метода. Автомодельное решение найдено с точностью не менее пяти значащих цифр с использованием специальной программы, обсуждение деталей которой выходит за рамки данной работы.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

При численном решении сформулированной задачи интервал $[0, 1]$ разбивается на N равных отрезков длиной $\Delta\zeta = 1.0/N$. Их левым концам с координатами $\zeta_i = (i-1)\Delta\zeta$ присваиваются номера $1, 2, \dots, N$. Раскрытие w и скорость частиц v задаются как сеточные функции $w_i = w(\zeta_i)$, $v_i = v(\zeta_i)$ в узлах ζ_i ($i = 1, \dots, N$). Значение w на правом конце интервала равно нулю: $w_{N+1} = 0$. Значение скорости v на правом конце равно скорости распространения ГР: $v_{N+1} = v_*$.

Правая часть уравнения сплошности (13) в узлах $i = 1, \dots, N$ аппроксимируется конечными разностями, которые, за исключением источника ($i = 1$), принимаются центральными разностями. Для источника применим интегральное уравнение баланса, учитывающее условие (18) заданного притока. В итоге получаем N обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для производных dw_i / dt :

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= \frac{3q_0 - (4w_2v_2 - w_3v_3)}{2x_*\Delta\zeta} - q_{l1}, \\ \frac{dw_i}{dt} &= \frac{w_{i+1}(v_*\zeta_{i+1} - v_{i+1}) - w_{i-1}(v_*\zeta_{i-1} - v_{i-1})}{2x_*\Delta\zeta} - q_{li}, \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (21)$$

К этим ОДУ добавляется уравнение скорости (17), которое при использовании конечных разностей принимает вид

$$\frac{dx_*}{dt} = v_* = [A_\mu(\alpha)]^{-1/(1-\alpha)} \left[\frac{w_N}{x_*^\alpha (1 - \zeta_N)^\alpha} \right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (22)$$

Таким образом, имеем динамическую систему $N + 1$ ОДУ (21), (22) относительно $N + 1$ неизвестных, из которых первые N выражают неизвестные раскрытия w_i в узлах $i = 1, \dots, N$ сетки, а последнее неизвестное — полудлину трещины x_* .

Узловые значения скорости частиц, входящие в правые части уравнений (21), определяют из дискретизированного уравнения типа Пуазейля (14). Для того чтобы обеспечить должную точность вычисления производной $\partial p / \partial \zeta$, принимается во внимание, что $-\partial p / \partial \zeta = v^n / w^{n+1}$, и учитывается асимптотическое поведение (16) раскрытия около конца трещины. В результате получена следующая формула для узловых значений скорости:

$$v_i = \left[w_i^{n+1} \frac{p_{i-1} - p_{i+1}}{x_* \Delta f(\zeta_{i+1}, \zeta_i, \zeta_{i-1})} \right]^{1/n}, \quad (23)$$

где $\Delta f = \frac{(1 - \zeta_i)^{\alpha(n+1)}}{\alpha(n+1) - 1} \left[\frac{1}{(1 - \zeta_{i+1})^{\alpha(n+1) - 1}} - \frac{1}{(1 - \zeta_{i-1})^{\alpha(n+1) - 1}} \right]$. Подчеркнем, что прямое использование центральных разностей при вычислении производной $\partial p / \partial \zeta$ приводит к неприемлемо большой погрешности и неверным конечным результатам, если $0 < \alpha < 1$. При $\alpha = 0$ и при $\alpha = 1$ формула (23) отвечает формуле центральных разностей.

Узловые значения давления, входящего в (23), находятся из дискретизированного уравнения упругости (15) с помощью аппроксимации плотности в окрестности узла i функцией

$$w(\zeta) = \frac{w_i}{(1 - \zeta_i)^{2/3}} (1 - \zeta)^{2/3}, \quad (24)$$

учитывающей асимптотическое поведение раскрытия для ньютоновской жидкости ($n = 1$, $\alpha = 2/3$). Это позволяет достаточно точно аппроксимировать раскрытие как вблизи фронта, так и вдали от него для любой утончающейся жидкости ($0 < n < 1$). При аппроксимации (24) входящий в (15) гиперсингулярный интеграл от функции $(1 - \zeta)^{2/3}$ вычисляется аналитически по любому интервалу (a, b) :

$$\int_a^b \frac{(1 - \tau)^{2/3}}{(\tau - \zeta)^2} d\tau = \Phi(\sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{\zeta}) - \Phi(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{\zeta}), \quad (25)$$

где $\Phi(\xi, z) = \frac{\xi^2}{z^3 - \xi^3} + \frac{2}{3} \frac{1}{z} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\xi/z - 1)^3}{(\xi/z)^3 - 1} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2\xi/z}{3} \right]$.

Для источника ($i=1$) интегрирование с использованием формулы (25) проводится по интервалу $(0, \Delta\zeta/2)$; для следующих узлов ($i=1, \dots, N-1$) интегрирование выполняется по интервалам $(\zeta_i - \Delta\zeta/2, \zeta_i + \Delta\zeta/2)$; для последнего узла ($i=N$) — по интервалу $(\zeta_N - \Delta\zeta/2, 1)$.

В итоге правые части системы ОДУ (21), (22) выражены через узловые значения раскрытия w_i и полудлину трещины x_* (значение v_* в правых частях уравнений (21) определено уравнением (22) через x_* и w_N). Решение системы ОДУ при начальных условиях Коши (19) может быть найдено хорошо разработанными методами вычислительной математики [22]. В частности, можно применить методы Рунге–Кутты или Адамса.

Для обеспечения возможности контролировать точность вычислений и влияние возмущений в начальных условиях (19) полудлина x_* и узловые раскрытия w_i задаются в начальный момент $t_0 = 1$ в форме

$$x_*(1) = \varepsilon_1 x_{*s}, \quad w_i(1) = \varepsilon_2 w_{0s}(\zeta_i), \quad (26)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — неотрицательные числа; x_{*s} и $w_{0s}(\zeta)$ — соответственно полудлина трещины и ее раскрытие, отвечающие автомодельному (эталонному) решению в момент $t_0 = 1$. Таким образом, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, то точное решение системы (21), (22) при условиях (26) дается автомодельным решением. Поскольку автомодельное решение находится отдельно и может быть получено с высокой точностью, это позволяет оценить погрешность численного интегрирования системы (21), (22). Если же $\varepsilon_1 \ll 1, \varepsilon_2 \ll 1$, то условия (26) отвечают чрезвычайно сильному начальному возмущению, что позволяет исследовать, как такие возмущения сказываются на решении с ростом времени.

ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

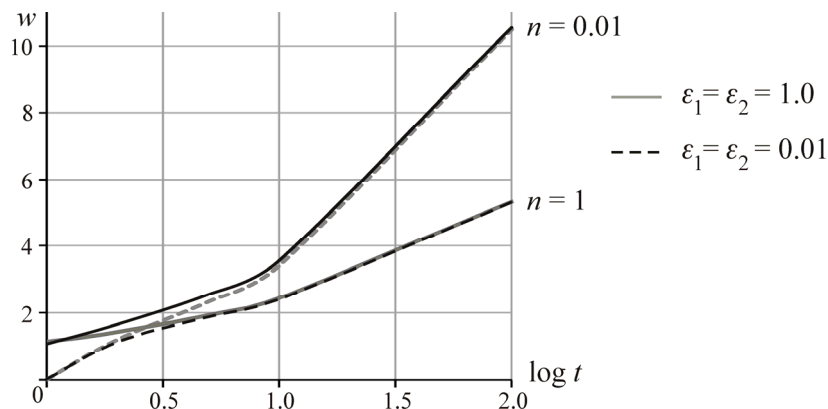
Решение системы ОДУ (21), (22) при начальных условиях (26) и нормированном притоке $q_0 = 1/2$ выполнено методом Рунге–Кутты четвертого порядка без ускорения сходимости. Шаг интегрирования по времени выбирался достаточно малым, чтобы обеспечить устойчивость. Число узлов N изменялось от 10 до 2000. Контроль *точности интегрирования по времени* осуществлялся сравнением его результатов с автомодельным решением, полученным *при том же числе узлов*. Для оценки *точности* обоих решений, полученных при сравнительно небольшом числе узлов ($N = 10, 20, 40, 80$), использовалось автомодельное решение при 2000 узлов, которое имело не менее пяти верных значащих цифр и совпадало с решениями работ [5, 12] в пределах их точности, установленной в [1]. Это решение для краткости называем точным.

Расчеты при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ для *ньютоновской* жидкости ($n = 1$) показали, что даже при двадцати узлах ($N = 20$) точность численного интегрирования не меньше точности автомодельного решения, получаемого при том же числе узлов. Различие результатов не превышает 0.03, 0.75, 0.80 и 0.94 % в моменты времени, равные соответственно 2, 10, 25 и 100. Сравнение с результатами точного решения показало, что ростом времени полудлина, вычисленная интегрированием по времени, приближается к точному значению. Это указывает на то, что численное интегрирование по шагам времени постепенно исправляет не очень точные начальные значения, отвечавшие $N = 20$.

Для *утончающихся* жидкостей ($0 < n < 1$) погрешность заметно возрастает, когда показатель поведения n становится малым. Тем не менее тенденция к улучшению решения с течением времени сохраняется. Например, для жидкости с показателем поведения $n = 0.01$, близкой к идеально-пластической жидкости ($n = 0$), при расчете с двадцатью узлами ($N = 20$) раскрытие в источнике в начальный момент времени имеет погрешность 13.9 %. Однако с ростом времени значения, полученные численным интегрированием по времени, приближаются к точным значениям. При $t = 100$ погрешность уменьшается до 2.5 %, т. е. более чем 5 раз.

Исследуем количественно выявленный эффект — *затухание во времени влияния возмущений в начальных условиях*. Предварительные расчеты, в которых использовались мелкие сетки и точное решение, показали, что значения раскрытия в источнике, полученные на более грубых сетках, имеют погрешность, не превышающую 1 % в любой момент времени. Для оценки влияния сильных возмущений в начальных условиях (26) принималось, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$.

На рисунке в полулогарифмических координатах приведены результаты расчетов раскрытия в источнике. Для принятого безразмерного значения нормированного притока ($q_0 = 1/2$), нормированное раскрытие w имеет размерность времени в степени $1/(n + 2)$. Сплошные линии отвечают точному невозмущенному решению ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$), совпадающему с автотельным решением, штриховые — сильно возмущенным начальным условиям. Для ньютоновской жидкости ($n = 1$) различие в моменты времени $t = 2, 5, 10, 100$ не превышает соответственно 21, 2.2, 1.52, 0.24 %. Это означает, что возмущенное решение стремится к тому же пределу, что и автотельное решение: влияние начальных условий быстро затухает с течением времени. Аналогичные результаты получены и для утончающихся жидкостей ($0 < n < 1$). Так, для почти идеально-пластической жидкости ($n = 0.01$) эволюция раскрытия также показана на рисунке. В этом случае сближение кривых происходит медленнее, чем для ньютоновской жидкости. Все же в моменты времени $t = 2, 5, 10, 100$ различие не превышает соответственно 28, 8.5, 4.2, 0.36 %. Из расчетов следует, что если конечное время гидроразрыва в 100 раз превосходит начальное время, то различие в конечных значениях меньше 0.5 %.



Изменение раскрытия трещины в источнике во времени при невозмущенных (сплошные линии) и сильно возмущенных (штриховые линии) начальных условиях для ньютоновской ($n = 1$) и почти идеально-пластической ($n = 0.01$) жидкостей

Таким образом установлено, что даже очень большие ошибки в задании начальных условий, когда начальное время составляет 1 – 10 мин, не искажают существенно значений, важных для практики (раскрытия и длины трещины), в конце ГР, т. е. по истечении 100 – 200 мин. Это заключение нивелирует обычную неопределенность начальных условий ГР и оправдывает их задание, исходя из грубых оценок.

ВЫВОДЫ

Предложенный метод в полной мере использует преимущества модифицированной постановки задачи о гидроразрыве. Он не требует обращения гиперсингулярного оператора, выражающего дифференциальное давление через раскрытие трещины. Его применение к классической модели Христиановича – Гиртсма – де Клерка показало, что метод позволяет эффективно решить задачу при произвольных начальных условиях.

Расчетами, проведенными на основе предложенного метода, установлено, что даже чрезвычайно сильные (на порядки) возмущения исходной длины и раскрытия трещины в первые минуты практически не сказываются на значениях ключевых величин (раскрытия и длины трещины) по истечении времени, типичного для гидроразрыва, — первые сотни минут. Это заключение представляется важным для разработки симуляторов гидроразрыва. Оно сглаживает влияние обычной на практике неопределенности начальных условий и оправдывает проведение расчетов исходя из весьма ориентировочных начальных данных о геометрии исходной трещины и ее раскрытии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wrobel M., Mishuris G.** Hydraulic fracture revisited: Particle velocity based simulation, *Int. J. Engineering Sci.*, 2015, Vol. 94, P. 23–58.
2. **Nordgren R. P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture, *Soc. Pet. Eng. J.*, August 1972, P. 307–314.
3. **Spence D. A., Sharp P. W.** Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow, *Proc. Roy. Soc., London, Ser. A*, 1985, Vol. 400, P. 289–313.
4. **Алексеенко О. П., Вайсман А. М.** Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. — 1999. — № 3. — С. 64–70.
5. **Adachi J., Detournay E.** Self-similar solution of plane-strain fracture driven by a power-law fluid, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2002, Vol. 26, P. 579–604.
6. **Adachi J., E. Siebrits E. et al.** Computer simulation of hydraulic fractures, *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2007, Vol. 44, P. 739–757.
7. **Detournay E., Peirce A.** On the moving boundary conditions for a hydraulic fracture, *Int. J. Engineering Sci.*, 2014, Vol. 84, P. 147–155.
8. **Линьков А. М.** Уравнение скорости и его применение для решения некорректных задач о гидроразрыве // Докл. АН. — 2011. — Т. 439. — № 4. — С. 473–475.
9. **Kemp L. F.** Study of Nordgren's equation of hydraulic fracturing. *SPE Production Engineering*, 1990, Vol. 5, P. 311–314.
10. **Linkov A. M.** On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity, *Int. J. Engineering Sci.*, 2012, Vol. 52, P. 77–88.
11. **Mishuris G., Wrobel M. and Linkov A.** On modeling hydraulic fracture in proper variables: stiffness, accuracy, sensitivity, *Int. J. Engineering Sci.*, 2012, Vol. 61, P. 10–23.
12. **Линьков А. М.** Аналитическое решение задачи о гидроразрыве для неньютоновской жидкости // ФТПРПИ. — 2013. — № 1. — С. 11–21.
13. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 5. — С. 3–41.
14. **Khristianovich S. A., Zheltov V. P.** Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid, *Proc. 4-th World Petroleum Congress, Rome*, 1955, P. 579–586.
15. **Geertsma J., F. de Klerk.** A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures, *J. Pet. Tech.*, December, 1969, P. 1571–1581.
16. **Perkins T. K., Kern L. F.** Widths of hydraulic fractures, *J. Pet. Tech.*, Sept., 1961, P. 937–949.
17. **Linkov A. M.** The particle velocity, speed equation and universal asymptotics for the efficient modelling of hydraulic fractures // Прикл. математика и механика. — 2015. — Т. 79. — № 1. — С. 74–89.
18. **Sethian J. A.** Level set methods and fast marching methods. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 378 p.
19. **Peirce A., Detournay E.** An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 2008, Vol. 197, P. 2858–2885.
20. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
21. **Мухелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1962. — 600 с.
22. **Самарский А. А., Гулин А. В.** Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

Поступила в редакцию 20/X 2015