

УДК 539.3

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УДАЛЕННЫХ ШТАМПОВ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Н. А. Лавров, Е. Е. Павловская

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург

Рассматривается динамическое взаимодействие (контакт) упругого полупространства и нескольких гладких штампов. Предполагается, что размеры областей контакта Ω_i существенно меньше расстояний между ними и временной масштаб рассматриваемого процесса сравним со временем пробега упругой волны от одной области до другой. Предлагается асимптотический подход к решению задачи, и строятся два первых члена асимптотики перемещения в области контакта и ее окрестности.

Введение. Численное решение данной динамической трехмерной задачи, например с помощью методов конечных и граничных элементов (МКЭ, МГЭ) и др., сопряжено, вообще говоря, с принципиальным затруднением, связанным с вырождением области контакта в совокупность точек. Поэтому для решения задачи предлагается использовать асимптотические методы.

Интегральное уравнение задачи строится на основе фундаментального решения нестационарной задачи для полупространства (задачи Лэмба), выражающегося в замкнутой форме [1]. После асимптотического упрощения этого уравнения полученная задача меньшей размерности решается численно.

В качестве примера рассмотрено вертикальное движение нескольких гладких круглых штампов с плоским основанием. Часть публикуемых результатов была представлена на конференциях [2–4].

Впервые асимптотический подход в соответствующей статической задаче использован в [5]. Строгое асимптотическое решение задачи о статическом нагружении упругого тела, лежащего на нескольких малых опорах, получено в [6]. В 70-е гг. предпринимались попытки решения динамических задач с малым параметром, но эти решения содержали те или иные допущения [7–9]. Обширная библиография по численным решениям содержится в [10–16].

1. Фундаментальное решение задачи Лэмба. Воспользуемся замкнутой формой фундаментального решения $G(t, r)$ нестационарной задачи Лэмба [1]. Вертикальное перемещение в точках плоской границы $z = 0$ упругого полупространства $z \leq 0$, вызванное действием вертикальной сосредоточенной силы, внезапно приложенной к границе в момент $t = 0$ и затем сохраняющей свое значение, при значении коэффициента Пуассона $\nu < 0,263$ имеет вид

$$G(t, r) = \frac{1 - \nu}{2\pi\mu r} \left[\frac{1}{2} H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) + \frac{1}{2} H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) + q \frac{c_2 t}{r} H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \times \right. \\ \left. \times H\left(\frac{r}{c_2} - t\right) - 2q_3 \left(\gamma^2 - \frac{c_2^2 t^2}{r^2}\right)^{-1/2} H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) H\left(\frac{r}{c_R} - t\right) \right], \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01153а).

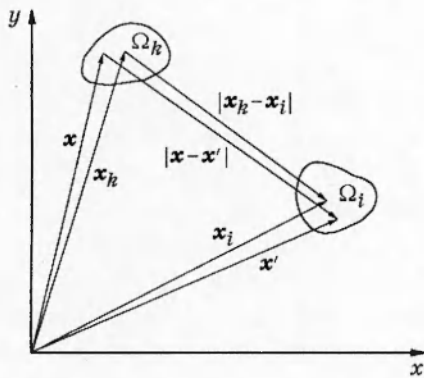


Рис. 1. Расположение двух соседних штампов на поверхности полупространства $z = 0$

$$q(s) = -q_1(s^2 - p_1)^{-1/2} + q_2(s^2 - p_2)^{-1/2} - q_3(\gamma^2 - s^2)^{-1/2},$$

где μ — модуль сдвига; r — расстояние между точкой наблюдения и точкой приложения силы; c_1 и c_2 — скорости волн растяжения и сдвига; c_R — скорость волны Рэлея; $H(t)$ — функция Хевисайда; $\gamma = c_2/c_R$, $q_n = q_n(\nu)$, $p_m = p_m(\nu)$ — безразмерные постоянные. Для $\nu = 1/4$ имеем $q_1 = \sqrt{3}/12$, $q_2 = \sqrt{3\sqrt{3} - 5}/12$, $q_3 = \sqrt{3\sqrt{3} + 5}/12$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = (3 - \sqrt{3})/4$, $\gamma = \sqrt{3} + \sqrt{3}/2$, $\alpha = c_2/c_1 = 1/\sqrt{3}$. Результаты численных расчетов, приведенные в настоящей статье, получены при данных значениях коэффициентов.

2. Построение асимптотики перемещения. Рассмотрим систему из N круглых гладких (трение отсутствует) штампов, расположенных на границе $z = 0$ упругого полупространства $z \leq 0$ (область контакта $\Omega = \cup \Omega_i$, $i = 1, \dots, N$, где Ω_i — зоны контакта) (рис. 1). Сейсмический импульс перемещения $w_0 = w_0(t/T)$ границы $z = 0$ вызывает вертикальное смещение штампов (T — временной масштаб). Функция w_0 — достаточно гладкая ограниченная финитная функция (или представляет собой сумму финитной и функции Хевисайда). Максимальный радиус $h = \max_k \{h_k\}$ штампа предполагается много меньшим, чем минимальное расстояние $l = \min_{i,k} \{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|\}$ между их центрами ($\varepsilon = h/l = o(1)$, \mathbf{x}_i — радиус-вектор центра i -го штампа). Временной масштаб T внешнего воздействия w_0 (и соответственно процесса) сравним со временем l/c_2 пробега волны сдвига между ближайшими штампами ($c_2 T/l = O(1)$).

На основе фундаментального решения (1) можно записать граничное интегральное уравнение эластодинамики

$$w - w_0 = \sum_{i=1}^N \int_0^t \iint_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial(t-t')} G(t-t', |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \sigma\left(\frac{t'}{T}, \mathbf{x}'\right) dt' d\Omega(\mathbf{x}'), \quad (2)$$

где $w(\mathbf{x}, t/T)$ — вертикальное перемещение; $\sigma(\mathbf{x}, t/T)$ — контактное давление.

Целью асимптотического анализа является упрощение равенства (2) на основе сделанных предположений о характере процесса и удаленности штампов друг от друга. Для того чтобы оценить перемещение w в точках области $\mathbf{x} \in \Omega_k$, перепишем выражение (2), выделяя вклад от контактных напряжений в этой же области:

$$w - w_0 = \int_0^t \iint_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial(t-t')} G(t-t', |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \sigma\left(\frac{t'}{T}, \mathbf{x}'\right) dt' d\Omega(\mathbf{x}') + \sum_{i=1}^N \int_0^t \iint_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial(t-t')} G(t-t', |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \sigma\left(\frac{t'}{T}, \mathbf{x}'\right) dt' d\Omega(\mathbf{x}'), \quad (3)$$

где введено обозначение $\sum' = \sum_{i=1, i \neq k}^N$.

Малость размеров области Ω_i по сравнению с расстояниями до соседних областей позволяет асимптотически оценить вклад в перемещение слагаемых, отвечающих сверткам нагрузки с фундаментальным решением по областям Ω_i ($i \neq k$). Расстояния $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ и $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|$ мало отличаются друг от друга, т. е. величина $(|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)/|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|$ является величиной $O(\varepsilon)$ (рис. 1). Функция Грина $G(t, r)$ зависит от расстояния между точкой наблюдения и точкой приложения силы, поэтому, представляя $G(t, r)$ как сумму $G(t, |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|) + [G(t, r) - G(t, |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|)]$, можно выделить слагаемое с не зависящим от координаты множителем $G(t, |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|)$ и показать, что остаток будет величиной более высокого порядка малости. Для этого после взятия интеграла по времени по частям во втором слагаемом в правой части уравнения (3) используется разложение в ряд по малому параметру $\varepsilon = \max_k \{h_k\} / \min_{i,k} \{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|\}$. В результате преобразований, разделив обе части уравнения на величину h , получаем

$$\frac{w}{h} - \frac{w_0}{h} \sim \frac{1}{h} \iint_{\Omega_k} \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t, |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|) \right) * \sigma\left(\frac{t}{T}, \mathbf{x}'\right) d\Omega(\mathbf{x}') + \\ + \varepsilon \sum' \left[\mu l G\left(\frac{t}{T}, \frac{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|}{bl}\right) \right] * \frac{\partial}{\partial(t/T)} \left(\frac{F_i(t/T)}{\mu h^2} \right), \quad (4)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad F_i\left(\frac{t}{T}\right) = \iint_{\Omega_i} \sigma\left(\frac{t}{T}, \mathbf{x}'\right) d\Omega(\mathbf{x}'),$$

где звездочкой обозначена операция свертки по времени t/T , а параметр $b = (Tc_2)/l$.

Первое слагаемое в правой части уравнения (4) можно упростить, используя предположение о медленном изменении давления σ в масштабе времени пробега волны сдвига через область Ω_k . В данном случае малым параметром является отношение $h/(Tc_2) = \varepsilon/b$. Проинтегрируем данное слагаемое по частям по времени. Представив функцию Грина в виде суммы $G(t, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = G^3(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)H(t) + [G(t, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - G^3(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)H(t)]$, после выполнения асимптотических разложений и интегрирования по времени получим

$$\frac{w}{h} - \frac{w_0}{h} \sim \iint_{\Omega_k} [\mu h G^3(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)] \frac{\sigma(t/T, \mathbf{x}')}{\mu} \frac{d\Omega(\mathbf{x}')}{h^2} + \\ + \varepsilon \sum' \left[\mu l G\left(\frac{t}{T}, \frac{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|}{bl}\right) \right] * \frac{\partial}{\partial(t/T)} \left(\frac{F_i(t/T)}{\mu h^2} \right) + \varepsilon \frac{(1-\nu)A}{2\pi b} \frac{\partial}{\partial(t/T)} \left(\frac{F_k(t/T)}{\mu h^2} \right), \quad (5)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad A = A(\nu) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} + \int_{\alpha}^1 q(s) ds - 2q_3 \arccos \frac{1}{\gamma} < 0,$$

где $G^3 = (1-\nu)/(2\pi\mu r)$ — решение Буссинеска [17].

Введем в рассмотрение малые повороты штампа относительно горизонтальных осей x и y . Асимптотический анализ уравнения контакта (2) показывает, что вклад в перемещение слагаемых, обусловленных поворотом, имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Поэтому при определении перемещения с точностью до $O(\varepsilon^2)$ повороты можно не учитывать.

В данном случае, когда оператор свертки по области Ω_k в правой части равенства (5) допускает обращение, можно выполнить дальнейший анализ этого равенства, используя

известное решение соответствующей статической задачи и рассматривая (5) как уравнение для неизвестного σ . Для перемещения w_k штампа k получим

$$\frac{w_k}{h} - \frac{w_0}{h} \sim \frac{1-\nu}{4} \frac{h}{h_k} \frac{F_k(t/T)}{\mu h^2} + \varepsilon \frac{(1-\nu)A}{2\pi b} \frac{\partial}{\partial(t/T)} \left(\frac{F_k(t/T)}{\mu h^2} \right) + \\ + \varepsilon \sum' \left[\mu l G \left(\frac{t}{T}, \frac{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|}{bl} \right) \right] * \frac{\partial}{\partial(t/T)} \left(\frac{F_i(t/T)}{\mu h^2} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

(При произвольной форме области $\widehat{\Omega}_k$ такое обращение нетрудно выполнить численно.)

На первый взгляд выведенное уравнение контакта (6) искажает физическую картину процесса. Действительно, рассматривая его как уравнение относительно F_k , можно формально построить решение, содержащее экспоненциально растущее ($t \rightarrow \infty$) слагаемое. Однако более детальный анализ показывает, что специальным выбором входящей в решение постоянной (имеющей смысл начального условия) можно построить ограниченное решение. При этом начальная фаза динамического процесса описывается с искажениями. (Истинная волновая картина начала процесса может быть рассчитана только на основе точного уравнения (2).) Длинноволновая асимптотическая модель (6) в принципе не описывает начало процесса (промежуток времени порядка h/c_2), так же как не описывает изменения, происходящие в системе в течение любого промежутка длительностью h/c_2 .

Постановку динамической задачи замыкает второй закон Ньютона. Для k -го штампа имеем

$$M_k \frac{d^2}{dt^2} w_k \left(\frac{t}{T} \right) = -F_k \left(\frac{t}{T} \right),$$

где M_k — масса штампа k .

Введем безразмерное время $\tau = t/T$, безразмерные параметры порядка $O(1)$ $b = Tc_2/l$, $\delta_i = M_i/M$, $\theta_i = h_i/h$, $\beta = M/(l^2 h \rho)$, $\alpha_i = (2\theta_i/(\pi b))|A|$, $\alpha_i = \theta_i^2 b^2/(\delta_i \beta)$ и безразмерные функции $g_{ik}(\tau) = G(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|, t)\mu l$, $v_i(\tau) = w_i(t/T)/h$, $v_0(\tau) = w_0(t/T)/h$, $f_i(\tau) = F_i(t/T)(1/(h^2 \mu))$, где $M = \min_i \{M_i\}$; ρ — плотность среды. (В принципе предлагаемый в статье подход позволяет проанализировать более широкий диапазон изменения параметров β и α_i .)

Перепишем систему уравнений задачи в безразмерном виде

$$v_k(\tau) - v_0(\tau) = \frac{1-\nu}{4} \hat{\sigma}_k \hat{f}_k(\tau) - \varepsilon \frac{1-\nu}{4} \theta_k \alpha_k \hat{f}_k(\tau) + \varepsilon \sum' \theta_i^2 g_{ik}(\tau) * \hat{f}_i(\tau),$$

$$\ddot{v}_k(\tau) = -\alpha_k f_k(\tau) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Точки сверху обозначают дифференцирование по безразмерному времени τ , звездочка — свертку по τ . Систему следует дополнить начальными условиями $v_k(0)$, $\dot{v}_k(0)$ ($k = 1, \dots, N$).

Будем искать ограниченное ($\lim v_k(\tau) < \infty$, $\lim f_k(\tau) < \infty$, $\tau \rightarrow \infty$) решение задачи. Воспользовавшись асимптотической оценкой $f_k(\tau) - \varepsilon \alpha_k \hat{f}_k(\tau) = f_k(\tau - \varepsilon \alpha_k) + O(\varepsilon^2)$, получаем $v_k(\tau) - v_0(\tau) - \varepsilon \sum' \theta_i^2 g_{ik}(\tau) * \hat{f}_i(\tau) = ((1-\nu)/4) \theta_k f_k(\tau - \varepsilon \alpha_k) + O(\varepsilon^2)$. Рассматривая полученное равенство как функциональное уравнение относительно неизвестной функции $f_k(\tau)$ и разрешая его, приходим к уравнению контакта

$$\frac{1-\nu}{4} \theta_k f_k(\tau) = v_k(\tau + \varepsilon \alpha_k) - v_0(\tau + \varepsilon \alpha_k) - \varepsilon \sum' \theta_i^2 \int_0^{\tau + \varepsilon \alpha_k} g_{ik}(\tau + \varepsilon \alpha_k - s) \hat{f}_i(s) ds + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

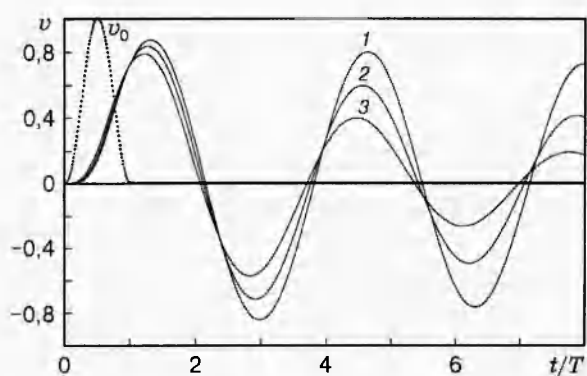


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость перемещения v от времени ($\beta = 1,5$):

1 — $\varepsilon = 0,01$; 2 — $\varepsilon = 0,05$; 3 — $\varepsilon = 0,1$

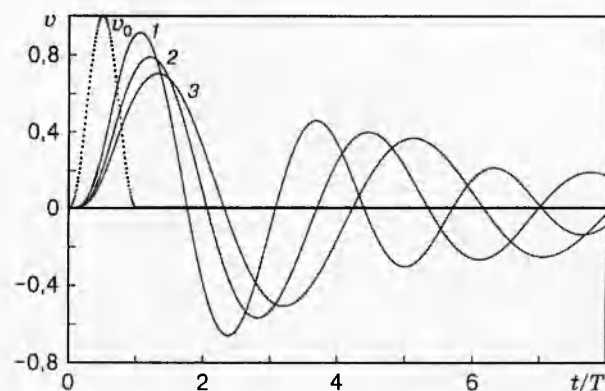


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость перемещения v от времени ($\varepsilon = 0,1$):

1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 1,5$; 3 — $\beta = 2$

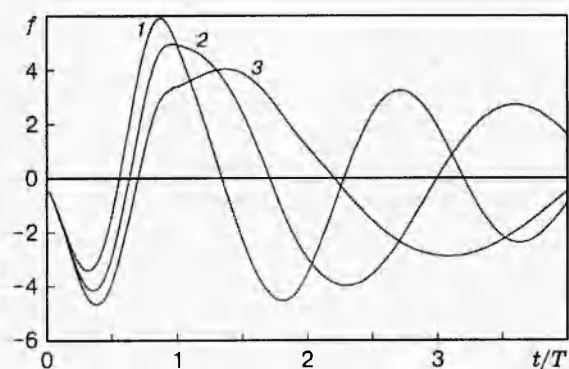


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость реакции f упругой среды от времени ($\varepsilon = 0,1$):

1 — $\beta = 0,5$; 2 — $\beta = 1$; 3 — $\beta = 2$

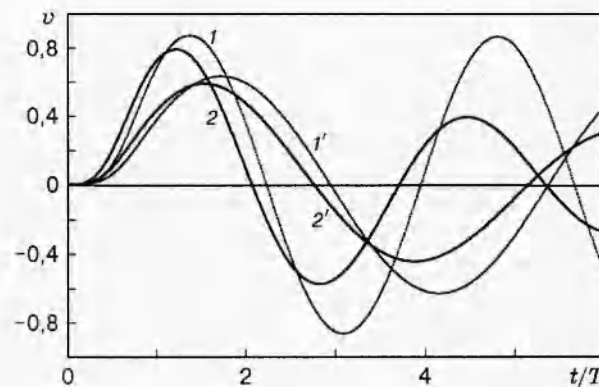


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость перемещения v от времени ($\varepsilon = 0,1$):

1, 1' — квазистатическая модель; 2, 2' — динамическая модель; 1, 2 — $\beta = 1,5$; 1', 2' — $\beta = 3$

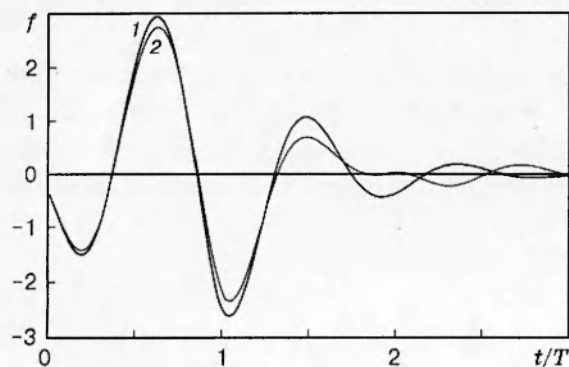


Рис. 6. Зависимость реакции f упругой среды от времени ($\beta = 0,1, \varepsilon = 0,1$):

1 — изолированный штамп; 2 — система из двух штампов

Выполнив в равенстве (7) разложение правой части в ряд по малому параметру ε , окончательно получаем систему уравнений задачи в виде

$$\frac{1-\nu}{4} \theta_k f_k(\tau) = v_k(\tau) + \varepsilon \alpha_k \dot{v}_k(\tau) - v_0(\tau + \varepsilon \alpha_k) - \varepsilon \sum_i' \theta_i^2 g_{ik}(\tau) * \dot{f}_i(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

$$\ddot{v}_k(\tau) = -\alpha_k f_k(\tau).$$

3. Динамика системы круглых штампов. Расчеты проводились для двух ($N = 2$) одинаковых штампов ($v_1 = v_2 = v$) при нулевых начальных условиях $v(0) = \dot{v}(0) = 0$. Система уравнений (8) решена численно для ряда значений параметров ε (при $\beta = 1,5$) (рис. 2) и β (при $\varepsilon = 0,1$) (рис. 3–5). Коэффициент Пуассона принят равным $\nu = 1/4$, параметр $b = 1$. Форма сейсмического импульса выбиралась следующей: $w_0 = \sin^2(\pi t/T)H(t)H(1-t/T)$. Рис. 2, 3 и 5 иллюстрируют зависимость безразмерного перемещения штампа v от времени, рис. 4, 6 — зависимость контактного усилия f под штампом от времени.

На рис. 5 представлена зависимость перемещения v от времени, рассчитанная по динамической и квазистатической моделям, последняя из которых описывается уравнением

$$\beta \left(1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon\right) \frac{1-\nu}{4} \ddot{v} + v = v_0.$$

На рис. 5 видно, что квазистатическая модель приводит к существенному завышению перемещения по сравнению с динамической моделью (8). На рис. 6 приведены контактные усилия, возникающие под изолированным штампом (кривая 1) и в случае системы из двух штампов (кривая 2), рассчитанные по предложенной асимптотической модели. Из анализа рис. 6 можно сделать вывод, что учет влияния второго штампа не позволяет правильно определить контактные усилия.

Заключение. Преимущество выведенного уравнения контакта состоит в том, что оно имеет меньшую размерность по сравнению с исходным интегральным уравнением эластодинамики и удобно для численного решения. Предложенный подход можно обобщить на следующие случаи:

- динамическое взаимодействие полупространства и тел осуществляется по трехмерной области контакта (при условии, что глубина погружения их в среду много меньше, чем расстояние между ними);
- перемещение и напряжение на границе имеют три компоненты;
- тела, взаимодействующие с полупространством, являются деформируемыми;
- в области контакта имеется малая пластическая зона.

Отметим, что если временной масштаб процесса значительно превышает максимальное время пробега волны сжатия между областями Ω_i , то динамическая задача переходит в квазистатическую (с параметром t). Если временной масштаб сравним со временем пробега упругой волны сдвига между областями, то в этом случае эффективен предложенный асимптотический подход. В случае кратковременного процесса, когда его масштаб сравним со временем пробега упругой волны поперек области $\hat{\Omega}_i$, взаимодействием штампов через среду можно пренебречь и рассчитывать движение на основе динамической задачи для изолированного штампа. Наконец, если указанный масштаб много меньше времени пробега волны поперек области, то для плоского штампа задача становится почти одномерной, так как взаимное влияние в различных точках контакта не успевает сказаться.

Авторы выражают благодарность С. А. Вакуленко и Д. А. Индейцеву за внимание к работе и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Richards P. G. Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1979. V. 69, N 4. P. 947-956.
2. Lavrov N. A., Pavlovskaya E. E. An asymptotic approach to soil-structure dynamic interaction // Trans. of the 14th Intern. conf. on structural mech. in reactor technol., Lyon (France), Aug. 17-22, 1997. Lyon: IASMIRT, 1997. V. 7. P. 299-306.
3. Pavlovskaya E. E. Dynamic contact pressure between two solids having a few small area of contact // Abstr. of Annual. meet. of german soc. appl. math. mech., Bremen (Germany), Apr. 6-9, 1998. Bremen: GAMM, 1998. P. 99.
4. Павловская Е. Е. Нестационарная задача для системы удаленных штампов, расположенных на упругом полупространстве // Тр. XXIV Междунар. шк. ученых-механиков «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем», Санкт-Петербург, 1-8 июля 1997 г. СПб.: Ин-т пробл. машиноведения РАН, 1997. С. 364-369.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
6. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 2. С. 110-118.
7. Ильичев В. А. Вертикальные нестационарные колебания массива под действием волн, возникающих в полупространстве при колебаниях другого массива // Динамика сооружений / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1968. С. 106-122.
8. Warburton G. B., Richardson J. D., Webster J. J. Forced vibrations of two masses on an elastic half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. P. 148-156.
9. Warburton G. B., Richardson J. D., Webster J. J. Harmonic response of masses on an elastic half space // Trans. ASME. J. Engng Ind. 1971. V. 94. P. 193-200.
10. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976.
11. Сеймов В. М., Островерх Б. Н., Ермоленко А. И. Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. Киев: Наук. думка, 1983.
12. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990.
13. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989.
14. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
15. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995.
16. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи для деформируемого полупространства. М.: ВИНТИ, 1990. С. 76-131. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 21).
17. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

*Поступила в редакцию 6/V. 1998 г.,
в окончательном варианте — 6/VIII 1998 г.*
