

О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ

И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев (Воронеж)

Теория кручения стержней из идеального жестко-пластического материала изложена в работах [1-4]. В работе [5] рассмотрено кручение призматических стержней из жестко-пластического анизотропно упрочняющегося материала при линейризованном условии пластичности. В настоящей работе рассматривается кручение стержней полигонального поперечного сечения. Материал стержней предполагается идеально пластическим, причем идеально пластическое состояние достигается при переходе через область упрочнения [6]. При этом в материале возникают остаточные микронапряжения [7]. Подобный материал можно назвать материалом с конечным упрочнением.

1. Рассмотрим задачу кручения стержней, материал которых следует зависимости между касательными напряжениями и необратимой частью сдвига, приведенной на фиг. 1. Выберем координатную систему, как показано на фиг. 2, в дальнейшем в обозначениях напряжений τ_{xz} , τ_{yz} и деформаций ε_{xz} , ε_{yz} будем опускать индекс z .

Исходные соотношения для задачи кручения стержней из анизотропно упрочняющегося жестко-пластического материала с конечным упрочнением имеют вид

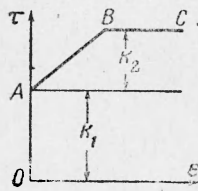
$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$(\tau_x - s_x)^2 + (\tau_y - s_y)^2 = k_1^2, \quad s_x^2 + s_y^2 \leq k_2^2, \quad k_1, k_2 = \text{const} \quad (1.2)$$

$$\frac{d\varepsilon_x}{\tau_x - s_x} = \frac{d\varepsilon_y}{\tau_y - s_y}, \quad \frac{d\kappa_x}{s_x} = \frac{d\kappa_y}{s_y} \quad (1.3)$$

$$s_x = c(\varepsilon_x - \kappa_x), \quad s_y = c(\varepsilon_y - \kappa_y), \quad c = \text{const} \quad (1.4)$$

Причем, если $s_x^2 + s_y^2 < k_2^2$, то $\kappa_x = \kappa_y = 0$.



Фиг. 1

Здесь s_x , s_y — компоненты микронапряжений, κ_x , κ_y — компоненты микродеформаций, c — параметр упрочнения.

Условие пластичности (1.2) в плоскости τ_x — τ_y представляет окружность с координатами центра s_x , s_y . В начальный момент пластического течения

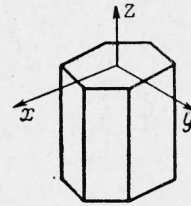
$$s_x = s_y = 0, \quad \tau_x = \tau_x^0, \quad \tau_y = \tau_y^0 \quad (\tau_x^{02} + \tau_y^{02} = k_1^2)$$

Условие пластичности (1.2) может быть интерпретировано как огибающая семейства касательных к данному условию пластичности. В дальнейшем, следуя [5], линейризуем условие пластичности, считая, что напряженное состояние в каждой точке тела соответствует касательной к окружности условия пластичности, сохраняющей свое направление в плоскости τ_x , τ_y в процессе деформирования тела

$$\tau_x^0 (\tau_x - s_x) + \tau_y^0 (\tau_y - s_y) = k_1^2 \quad (1.5)$$

Аналогично для микронапряжений можно положить, что после достижения ими предельных значений s_x^0 , s_y^0 ($s_x^{02} + s_y^{02} = k_2^2$) имеет место линейризованное условие

$$s_x^0 s_x + s_y^0 s_y \leq k_2^2 \quad (1.6)$$



Фиг. 2

Рассматривая условия (1.5) и (1.6) в качестве пластических потенциалов, получим вместо (1.3) соотношения

$$\frac{d\varepsilon_x}{\tau_x^0} = \frac{d\varepsilon_y}{\tau_y^0}, \quad \frac{d\kappa_x}{s_x^0} = \frac{d\kappa_y}{s_y^0} \quad (1.7)$$

Так как, в процессе пластического течения τ_x^0 , τ_y^0 и s_x^0 , s_y^0 не зависят от параметра нагружения, то, интегрируя (1.7), получим

$$\frac{\varepsilon_x}{\tau_x^0} = \frac{\varepsilon_y}{\tau_y^0} + c_1(x, y), \quad \frac{\kappa_x}{s_x^0} = \frac{\kappa_y}{s_y^0} + c_2(x, y) \quad (1.8)$$

Полагая, что в начальный момент стержень находился в жестком, недеформированном состоянии и микронапряжения отсутствовали, получим, что $c_1 = c_2 = 0$,

и окончательно соотношения (1.8) примут вид

$$\tau_y^\circ \varepsilon_x - \tau_x^\circ \varepsilon_y = 0, \quad s_y^\circ \kappa_x - s_x^\circ \kappa_y = 0 \quad (1.9)$$

В дальнейшем необходимо исключить из исходных соотношений величины микронапряжений и микродеформаций. Используя (1.4), получим (1.5) и (1.6) в виде

$$\tau_x^\circ [\tau_x - c(\varepsilon_x - \kappa_x)] + \tau_y^\circ [\tau_y - c(\varepsilon_y - \kappa_y)] = k_1^2 \quad (1.10)$$

$$s_x^\circ (\varepsilon_x - \kappa_x) + s_y^\circ (\varepsilon_y - \kappa_y) = \frac{k_2^2}{c} \quad (1.11)$$

Условие (1.11) может быть записано

$$\kappa_x s_x^\circ + \kappa_y s_y^\circ = q \quad \left(q = s_x^\circ \varepsilon_x + s_y^\circ \varepsilon_y - \frac{k_2^2}{c} \right) \quad (1.12)$$

Решая линейную систему уравнений — соотношение для микронапряжений (1.9) и (1.12), получим для микродеформаций выражения

$$\kappa_x = \frac{q s_x^\circ}{k_2^2}, \quad \kappa_y = \frac{q s_y^\circ}{k_2^2} \quad (1.13)$$

Тогда с учетом соотношений (1.13), условие (1.10) примет окончательно вид

$$\begin{aligned} & \tau_x^\circ \left\{ \tau_x - c\varepsilon_x + \left[s_x^\circ \left(\frac{c s_x^\circ \varepsilon_x + c s_y^\circ \varepsilon_y}{k_2^2} - 1 \right) \right] \right\} + \\ & + \tau_y^\circ \left\{ \tau_y - c\varepsilon_y + \left[s_y^\circ \left(\frac{c s_x^\circ \varepsilon_x + c s_y^\circ \varepsilon_y}{k_2^2} - 1 \right) \right] \right\} = k_1^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Компоненты деформаций определяются соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(-\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.15)$$

где $w(x, y)$ — депланация сечения, θ — крутка. Таким образом, для τ_x , τ_y и w имеем: уравнение равновесия (1.1), условие пластичности (1.14) и закон пластического течения (первое соотношение (1.9)).

2. Рассмотрим область oef стержня полигонального поперечного сечения (фиг. 3а), где oe — линия разрыва напряжений. Уравнение линий разрыва $y = \alpha x$ ($\alpha = \text{const}$). Причем ось x перпендикулярна к свободной границе контура стержня ef .

Из решения теории идеальной пластичности [1-4] следует

$$\tau_x^\circ = 0, \quad \tau_y^\circ = k_1 \quad (2.1)$$

Как отмечалось в работе [5], депланация поперечного сечения стержня из упрочняющегося материала совпадает с депланацией при идеально пластическом течении стержня. Депланация в условиях жестко-пластического кручения определяется выражением $w = n\theta d$, где n — расстояние от точки $P(x, y)$ до линии разрыва по нормали к ef , проходящей через точку P . Для рассматриваемой области будем иметь

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) y \\ \varepsilon_x &= 0, \quad \varepsilon_y = \theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Предположим, что в некоторой области mgf (фиг. 3б) материал стержня достиг предела текучести (состояние BC на фиг. 1), тогда в рассматриваемой области

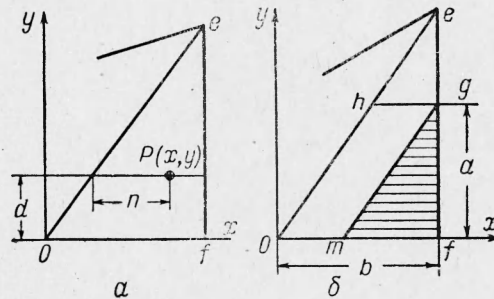
$$s_x^\circ = 0, \quad s_y^\circ = k_2 \quad (2.3)$$

Линеаризованное условие [текучести (1.14) с учетом (2.1) и (2.3) примет вид

$$\tau_y - c\varepsilon_y + \left[k_2 \left(\frac{c\varepsilon_y}{k_2} - 1 \right) \right] = k_1 \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что в области mgf

$$\tau_y = k_1 + k_2 \quad (2.5)$$



Фиг. 3

Подставляя выражение (2.5) в уравнение равновесия (1.1), найдем, что $\tau_x = \tau_x(y)$. На контуре ef всегда $\tau_x = 0$, следовательно, $\tau_x = 0$ всюду в области mgf .

В области $oegm$ состояние материала соответствует отрезку AB , показанному на фиг. 1. В этой области $s_x^2 + s_y^2 < k_2^2$ и $\kappa_x = \kappa_y = 0$. Тогда в области $oegm$ условие пластичности (2.4) примет вид

$$\tau_y = k_1 + c\epsilon_y \quad (2.6)$$

Уравнение равновесия (1.1) при условии (2.6) будет удовлетворено в рассматриваемой области, если

$$\tau_y = k_1 + c\theta \left(x - \frac{y}{\alpha} \right), \quad \tau_x = \frac{c\theta}{\alpha} x + f(y) \quad (2.7)$$

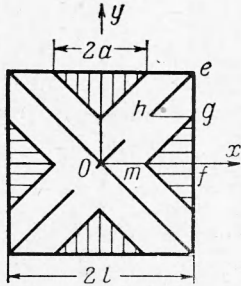
На границе области идеальной пластичности mgf имеем $\tau_y = k_1 + k_2$, $\tau_x = 0$, откуда из выражений (2.7) найдем $c\theta(x - y/\alpha) = k_1$ и $f(y) = -(c\theta/\alpha^2)y$.

В области $ohgm$ получим

$$\tau_x = \frac{c\theta}{\alpha} \left(x - \frac{y}{\alpha} \right) - \frac{k_1}{\alpha} \quad (2.8)$$

В области heg , удовлетворяя условию $\tau_x = 0$ на контуре eg , получим

$$\tau_x = \frac{c\theta}{\alpha} (x - b) \quad (2.9)$$



Фиг. 4

На границе hg компонента напряжения τ_x терпит разрыв. Разрыв компоненты напряжения τ_x статически допустим, так как контактирующие напряжения τ_y при переходе через hg непрерывны. Появление разрыва обусловлено принятой предельной схемой. Обозначим длину области идеальной пластичности вдоль свободного контура ef через $gf = a$, тогда из (2.7) будем иметь

$$a = \left(b - \frac{k_2}{c\theta} \right) \alpha \quad (a = 0 \text{ при } \theta \leq k_2/cb) \quad (2.10)$$

3. Рассмотрим конкретные примеры.

1) В случае стержня квадратного сечения (фиг. 4) с длиной стороны $2l$ в области oef уравнение линии разрыва oe имеет вид $y = x$, $\alpha = 1$. Из (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) найдем

$$\begin{aligned} \tau_y &= k_1 + k_2, & \tau_x &= 0 & (\text{в } mgf) \\ \tau_y &= k_1 + c\theta(x - y), & \tau_y &= c\theta(x - y) - k_2 & (\text{в } ohgm) \\ \tau_y &= k_1 + c\theta(x - y), & \tau_x &= c\theta(x - l) & (\text{в } heg) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Крутящий момент для всего сечения будет

$$\begin{aligned} M &= 4(k_1 + k_2) \left(la^2 - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{8}{3} k_1 \left(l^3 - \frac{3}{2} a^2 l + \frac{a^3}{3} \right) + \\ &+ 2k_2 (la^2 - a^3) + \frac{4}{3} c\theta (l^4 + 4l^3 a - 24l^2 a^2 + 32la^3 - 13a^4) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

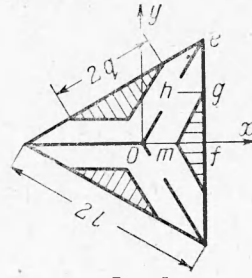
$$a = 0 \quad \text{при } \theta \leq \frac{k_2}{cl}, \quad a = l - \frac{k_2}{c\theta} \quad \text{при } \theta > \frac{k_2}{cl} \quad (3.3)$$

Области пластичности, соответствующие состоянию идеальной пластичности материала (BC на фиг. 1), здесь и везде заштрихованы.

2) Рассматривая область oef стержня треугольного сечения (фиг. 5) со стороной $2l$, получим уравнение линии разрыва oe в виде $y = 3x/\sqrt{3}$, $\alpha = 3/\sqrt{3}$.

Тогда из (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) найдем компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \tau_y &= k_1 + k_2, & \tau_x &= 0 & (\text{в } mgf) \\ \tau_y &= k_1 + c\theta \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} y \right), & \tau_x &= c\theta \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} y \right) - k_2 \frac{\sqrt{3}}{3} & (\text{в } ohgm) \\ \tau_y &= k_1 + c\theta \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} y \right), & \tau_x &= c\theta \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} l \right) & (\text{в } heg) \end{aligned} \quad (3.4)$$



Фиг. 5

Крутящий момент для всего сечения будет равен

$$M = (k_1 + k_2) \left(\frac{13}{3} a^2 l - 2al^2 - \frac{5}{3} a^3 \right) + k_1 \left(\frac{2}{3} l^3 - a^2 l + \frac{a^3}{3} \right) + k_2 (la^2 - a^3) + c\theta \frac{\sqrt{3}}{9} (l^4 - 2l^3 a - 3l^2 a^2 + 5la^3 - a^4) \quad (3.5)$$

где

$$a = 0 \quad \text{при } \theta \leq \frac{3k_2}{\sqrt{3}cl}, \quad a = l - \frac{3k_2}{\sqrt{3}c\theta} \quad \text{при } \theta > \frac{3k_2}{\sqrt{3}cl} \quad (3.6)$$

3) Решение для стержня прямоугольного сечения со сторонами $2h$ и $2l$ (фиг. 6) в области oef определяется аналогично стержню квадратного сечения.

В области o_1omm_1 угловой коэффициент линии разрыва $\alpha = \infty$, тогда из (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) компоненты напряжения определяются

$$\tau_y = k_1 + k_2, \quad \tau_x = 0 \quad (\text{в } m_1mf_1) \quad (3.7)$$

$$\tau_y = c\theta x + k_1, \quad \tau_x = 0 \quad (\text{в } o_1omm_1)$$

Крутящий момент для всего сечения будет равен

$$M = M^* + 4(h-l) [(k_1 + k_2)al + k_1(l^2 - al) + k_2(la - a^2) + 1/3 c\theta(l-a)^3] \quad (3.8)$$

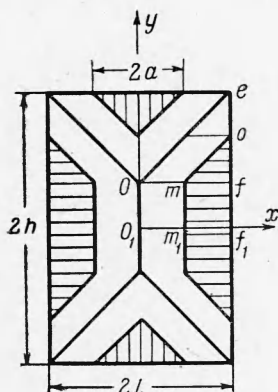
где M^* — крутящий момент для стержня квадратного сечения, определяемый по формуле (3.2). Отметим, что зависимость $M = M(\theta)$ для стержней из жестко-пластического материала с конечным упрочнением при значениях крутки в пределах

$$0 < \theta \leq \frac{k_2}{cb} = \frac{k_2}{cl} \alpha$$

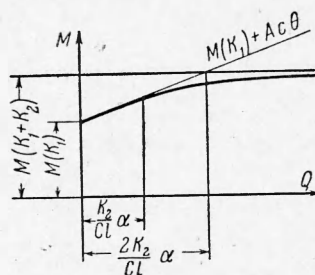
совпадает с зависимостью $M = M(\theta)$ для идеально пластического материала с линейным упрочнением [5]. В интервале значений крутки

$$\frac{k_1}{cl} \alpha < \theta \leq \infty$$

зависимость $M = M(\theta)$ становится нелинейной и по мере роста крутки асимптотически приближается к



Фиг. 6



Фиг. 7

решению для идеально пластического материала с пределом текучести $(k_1 + k_2)$, это обстоятельство указано на фиг. 7.

Поступила 26 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР, 1946; Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
3. Прагер В. и Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. ИЛ, 1956.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
5. Дудукаленко В. В., Ивлев Д. Д. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
6. Ивлев Д. Д. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений. ПММ, 1962, т. XXVI, № 4.
7. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.