

О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД В НЕОДНОРОДНОМ ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ ПРИ ПОДПОРЕ ОТ ВОДОХРАНИЛИЩА И ОРОШЕНИИ

В. К. Рудаков (Днепропетровск)

Решения ряда задач неустановившейся безнапорной фильтрации в связи с устройством водохранилищ и ирригацией земель при однородном сложении пласта получены П. Я. Подбаринской-Кочиной [1,2], Н. Н. Веригиным [3,4], С. Ф. Аверьяновым [5] и другими авторами. Аналогичные течения грунтовых вод в неоднородных пластах изучены меньше, хотя они наиболее часто встречаются в природных условиях.

Существенный интерес представляет такая расчетная схема, когда водопроницаемость и пьезопроводность фильтрующей толщи принимаются кусочно-постоянными по ее длине [6].

Пусть водоносный пласт конечной длины L разделяется на две зоны, сложенные различными грунтами: зона 1 ($0 \leq x \leq l_1$) с коэффициентом фильтрации $k_j = k_1$ и коэффициентом пьезопроводности $a_j^2 = a_1^2$; зона 2 ($l_1 \leq x \leq L$), где $k_j = k_2$ и $a_j^2 = a_2^2$ (фиг. 1). Водоупор горизонтальный. Глубина установившегося в естественных условиях грунтового потока h_e известна по данным наблюдений.

Положим, что в результате создания водохранилища глубина воды на границе $x = 0$ мгновенно возрастает от h_0 до y_0 , а на границе $x = L$ — от h_e до y_e . Одновременно вследствие орошения возникает неравномерная инфильтрация поливных вод, питающая грунтовой поток с интенсивностью w_1^* в пределах зоны 1 и w_2^* — в зоне 2. Будем считать, что глубины воды на внешних границах пласта, а также значения интенсивности дополнительной инфильтрации w_1^* и w_2^* поддерживаются постоянными во времени.

Требуется найти уравнения глубины потока грунтовых вод при заданных условиях.

Как известно [4], уравнение Буссинеска для одномерной неустановившейся безнапорной фильтрации при горизонтальном водоупоре, линеаризованное по способу Н. А. Багрова — Н. Н. Веригина, совпадает с уравнением теплопроводности и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

$$\left(u = \frac{h^2}{2}, \quad a^2 = \frac{kh^0}{\mu}, \quad b = \frac{wh^0}{\mu} \right)$$

Здесь h — переменная глубина (напор) грунтовой воды, t — время, μ — коэффициент недостатка насыщения грунта в зоне аэрации, w — интенсивность питания грунтовых вод сверху, h^0 — некоторая средняя глубина потока. Исходя из принципа суперпозиции, будем искать решение задачи в виде

$$y_1^2(x, t) = h_{e,1}^2 + 2u_1(x, t) \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad y_2^2(x, t) = h_{e,2}^2 + 2u_2(x, t) \quad (l_1 \leq x \leq L) \quad (2)$$

Здесь $y(x, t)$ — глубина неустановившегося грунтового потока при подпоре и орошении, момент возникновения которых принимаем за начало отсчета времени $t = 0$. Индексы 1 и 2 обозначают номера разнородных зон пласта.

В соответствии с (1), функции u_1 и u_2 определяются системой уравнений

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad \left(a_1^2 = \frac{k_1 h_1^0}{\mu_1}, \quad b_1 = \frac{w_1^* h_1^0}{\mu_1} = \frac{w_1^*}{k_1} a_1^2 \right) \quad (3)$$

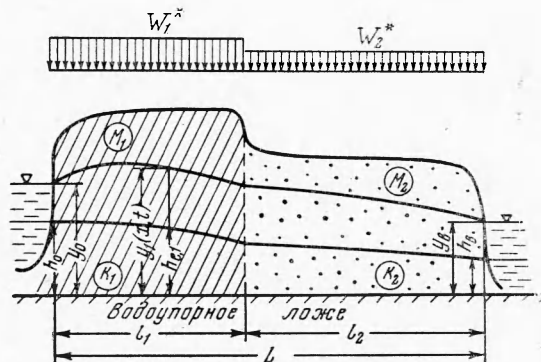
$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad (l_1 \leq x \leq L), \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2 h_2^0}{\mu_2}, \quad b_2 = \frac{w_2^* h_2^0}{\mu_2} = \frac{w_2^*}{k_2} a_2^2 \right)$$

Начальное условие

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 0) = 0 \quad (4)$$

Условия на внешних границах пласта

$$u_1(0, t) = \frac{1}{2}(y_0^2 - h_0^2), \quad u_2(L, t) = \frac{1}{2}(y_e^2 - h_e^2) \quad (5)$$



Фиг. 1

Условия на границе раздела грунтов

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=l_1} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=l_1}, \quad k_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l_1} = k_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l_1} \quad (6)$$

Система уравнений (3) описывает не весь фильтрационный поток, а лишь добавочное неустановившееся течение, обусловленное подпором от водохранилища и дополнительным питанием по длине пласта. Указанное течение, согласно (2), накладывается на естественный установившийся поток грунтовых вод.

Решим систему линейных уравнений в частных производных второго порядка (3) с помощью операционного метода [7,8]. В результате преобразования Лапласа

$$U_j(x, p) = \int_0^{\infty} u_j(x, t) e^{-pt} dt \quad (7)$$

получаем изображающую систему

$$\begin{aligned} a_1^2 \frac{d^2 U_1}{dx^2} - pU_1 + \frac{b_1}{p} &= 0 & (0 \leq x \leq l_1) \\ a_2^2 \frac{d^2 U_2}{dx^2} - pU_2 + \frac{b_2}{p} &= 0 & (l_1 \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (8)$$

с условиями

$$U_1(0) = (y_0^2 - h_0^2) / 2\sigma, \quad U_2(L) = (y_0^2 - h_0^2) / 2p \quad (9)$$

$$U_1(l_1) = U_2(l_1), \quad k_1 \left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=l_1} = k_2 \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=l_1} \quad (10)$$

Решая систему (8), находим L — изображения искомых функций:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2p} \left[(y_0^2 - h_0^2) \frac{\text{ch} [(l_1 - x) \beta_1 \sqrt{p}]}{\text{ch} (\lambda_1 \sqrt{p})} + \right. \\ &+ \left. \frac{\text{sh} (x \beta_1 \sqrt{p}) (y_0^2 - h_0^2) \text{sch} (\lambda_2 \sqrt{p}) - (y_0^2 - h_0^2) \text{sch} (\lambda_1 \sqrt{p})}{\text{ch} (\lambda_1 \sqrt{p}) \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})} \right] + \\ &+ \frac{b_1}{p^2} \left[1 - \text{ch} (x \beta_1 \sqrt{p}) + \frac{\text{sh} (x \beta_1 \sqrt{p}) [1 - \text{sch} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})]}{\text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})} \right] + \\ &+ \frac{b_2}{p^2} \left[\frac{\text{sh} (x \beta_1 \sqrt{p}) [1 - \text{ch} (l_1 \beta_2 \sqrt{p}) \text{sch} (L \beta_2 \sqrt{p})]}{\text{sh} (\lambda_1 \sqrt{p})} + \frac{\text{sh} (x \beta_1 \sqrt{p}) \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})}{\text{sh} (\lambda_1 \sqrt{p})} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\sigma [\text{sch} (L \beta_2 \sqrt{p}) \text{ch} (l_1 \beta_2 \sqrt{p}) - 1] - \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) \text{sh} (l_1 \beta_2 \sqrt{p}) \text{sch} (L \beta_2 \sqrt{p})}{\text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2p} \left[(y_0^2 - h_0^2) \sigma \frac{\text{sh} [(L - x) \beta_2 \sqrt{p}]}{\text{ch} (\lambda_1 \sqrt{p}) \text{ch} (\lambda_2 \sqrt{p}) [\text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})]} + \right. \\ &+ (y_0^2 - h_0^2) \frac{\text{ch} [(x - l_1) \beta_2 \sqrt{p}] \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} [(x - l_1) \beta_2 \sqrt{p}]}{\text{ch} (\lambda_2 \sqrt{p}) \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})} \left. \right] + \\ &+ \frac{b_1}{p^2} \left[\frac{\text{sh} [(L - x) \beta_2 \sqrt{p}] [1 - \text{ch} (\lambda_1 \sqrt{p})]}{\text{sh} (\lambda_2 \sqrt{p})} + \right. \\ &+ \left. \frac{\text{sh} [(L - x) \beta_2 \sqrt{p}] \text{sh} (\lambda_1 \sqrt{p}) [1 - \text{sch} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})]}{\text{sh} (\lambda_2 \sqrt{p}) [\text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})]} \right] + \\ &+ \frac{b_2}{p^2} \left[1 - \text{ch} (x \beta_2 \sqrt{p}) \text{sch} (L \beta_2 \sqrt{p}) + \frac{\text{sh} [(L - x) \beta_2 \sqrt{p}]}{\text{ch} (\lambda_2 \sqrt{p})} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\sigma [\text{sch} (L \beta_2 \sqrt{p}) \text{ch} (l_1 \beta_2 \sqrt{p}) - 1] - \text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) \text{sh} (l_1 \beta_2 \sqrt{p}) \text{sch} (L \beta_2 \sqrt{p})}{\text{th} (\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th} (\lambda_2 \sqrt{p})} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma = \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{a_2}, \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{a_1}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{a_2} \quad (13)$$

Для перехода к оригиналам воспользуемся интегральной формулой обращения Римана — Меллина, согласно которой

$$u_j(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} U_j(x, p) e^{pt} dp \quad (14)$$

Интегралы, получающиеся при подстановке в (14) выражений U_1 и U_2 из (11) и (12), можно вычислить посредством перехода к замкнутому контуру и применения теории вычетов. Согласно теореме Коши, определение этих интегралов сводится к вычислению суммы вычетов относительно простых полюсов подынтегральной функции, соответствующих корням трансцендентного уравнения

$$\text{th}(\lambda_1 \sqrt{p}) + \sigma \text{th}(\lambda_2 \sqrt{p}) = 0 \quad (15)$$

Одним из корней (15) является $p = 0$. Остальные корни представляют собой вещественные отрицательные числа $p = -\alpha^2$.

Заменяя в уравнении (15) гиперболический тангенс на круговой и учитывая свойство периодичности последнего, получим

$$\text{tg}(\alpha \lambda_1 + \pi m) + \sigma \text{tg}(\alpha \lambda_2 + \pi s) = 0 \quad (16)$$

где m и s — любые целые числа.

Уравнение (16) имеет бесконечное множество действительных корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, которые располагаются симметрично относительно начала координат и не повторяются; каждому положительному корню соответствует равный ему отрицательный.

Корни (16) в общем случае могут быть найдены графически как абсциссы точек пересечения кривых

$$y = \text{tg} \lambda_1 x, \quad y = -\sigma \text{tg} \lambda_2 x$$

В ряде случаев трансцендентное тригонометрическое уравнение (16) приводится к алгебраическому.

Опуская записи найденных оригиналов, приведем в окончательном виде уравнения кривой депрессии грунтовых вод при совместном влиянии двустороннего подпора от водохранилища и орошения:

в зоне 1

$$\begin{aligned} y_1^2(x, t) = & y_{k,1}^2 - 2a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \exp(-\alpha_n^2 t) \frac{\sin(\alpha_n x / a_1)}{\cos(\alpha_n \lambda_1)} \times \\ & \times \frac{(y_0^2 - h_0^2) \sec(\alpha_n \lambda_1) - (y_e^2 - h_e^2) \sec(\alpha_n \lambda_2)}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1 / k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} - 4 \frac{a_1^2}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \exp(-\alpha_n^2 t) \times \\ & \times \frac{\sin(\alpha_n x / a_1)}{\cos(\alpha_n \lambda_1)} \frac{w_1^* a_1 [\sec(\alpha_n \lambda_1) - 1] - w_2^* \sigma a_2 [\sec(\alpha_n \lambda_2) - 1]}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1 / k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} \quad (17) \end{aligned}$$

в зоне 2

$$\begin{aligned} y_2^2(x, t) = & y_{k,2}^2 - 2\sigma a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \exp(-\alpha_n^2 t) \frac{\sin[\alpha_n(L-x)/a_2]}{\cos(\alpha_n \lambda_2)} \times \\ & \times \frac{(y_0^2 - h_0^2) \sec(\alpha_n \lambda_2) - (y_e^2 - h_e^2) \sec(\alpha_n \lambda_1)}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1 / k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} - 4 \frac{a_1 a_2}{k_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \exp(-\alpha_n^2 t) \times \\ & \times \frac{\sin[\alpha_n(L-x)/a_2]}{\cos(\alpha_n \lambda_2)} \frac{w_2^* \sigma a_2 [\sec(\alpha_n \lambda_2) - 1] - w_1^* a_1 [\sec(\alpha_n \lambda_1) - 1]}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1 / k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} \quad (\alpha_n > 0) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k,1}^2 = & (y_0^2 - h_0^2) \frac{l_1 - x + l_2 k_1 / k_2}{l_1 + l_2 k_1 / k_2} + (y_e^2 - h_e^2) \frac{x}{l_1 + l_2 k_1 / k_2} + \\ & + \frac{w_1^*}{k_1} \left(\frac{l_1^2 + 2l_1 l_2 k_1 / k_2}{l_1 + l_2 k_1 / k_2} x - x^2 \right) + \frac{w_2^*}{k_2} \frac{x l_2^2}{l_1 + l_2 k_1 / k_2} + h_{e,1}^2 \quad (19) \end{aligned}$$

$$y_{k,2}^2 = (y_0^2 - h_0^2) \frac{(L-x)k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + (y_e^2 - h_e^2) \frac{l_1 + (x-l_1)k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + \frac{w_1^*}{k_2} \frac{(L-x)l_1^2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + \frac{w_2^*}{k_2} \left[l_2^2 \frac{l_1 + (x-l_1)k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} - (x-l_1)^2 \right] + h_{e,2}^2 \quad (20)$$

Величина y_k представляет предельную во времени ($t \rightarrow \infty$) глубину грунтового потока в заданных условиях.

Рассмотрим практически интересный случай, когда инфильтрация поливных вод интенсивностью w^* происходит только на внутреннем участке пласта. Длина этого участка $l_{0p} = x_2 - x_1$, где x_1 и x_2 — координаты его начала и конца. Пусть $x_1 \geq 0$, $x_2 = l_1$, т. е. конец поливного участка совпадает с границей раздела между разнородными зонами пласта. Остальные условия прежние.

Применяя изложенную методику, получим следующие уравнения глубины потока для данной расчетной схемы:

в зоне 1

$$y_1^2(x, t) = y_{k,1}^2 - 2a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \exp(-\alpha_n^2 t) \frac{\sin(\alpha_n x / a_1)}{\cos(\alpha_n \lambda_1)} \times \frac{(y_0^2 - h_0^2) \sec(\alpha_n \lambda_1) - (y_e^2 - h_e^2) \sec(\alpha_n \lambda_2)}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1/k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} - 4 \frac{w^*}{k_1} a_1^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \exp(-\alpha_n^2 t) \times \frac{\sin(\alpha_n x / a_1)}{\cos(\alpha_n \lambda_1)} \frac{\cos(\alpha_n x_1 / a_1) \sec(\alpha_n \lambda_1) - 1}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1/k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} \quad (21)$$

в зоне 2

$$y_2^2(x, t) = y_{k,2}^2 - 2\sigma a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \exp(-\alpha_n^2 t) \frac{\sin[\alpha_n(L-x)/a_2]}{\cos(\alpha_n \lambda_2)} \times \frac{(y_e^2 - h_e^2) \sec(\alpha_n \lambda_2) - (y_0^2 - h_0^2) \sec(\alpha_n \lambda_1)}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1/k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} - 4 \frac{w^*}{k_1} \sigma a_1^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \exp(-\alpha_n^2 t) \times \frac{\sin[\alpha_n(L-x)/a_2]}{\cos(\alpha_n \lambda_2)} \frac{1 - \cos(\alpha_n x_1 / a_1) \sec(\alpha_n \lambda_1)}{l_1 \sec^2(\alpha_n \lambda_1) + k_1/k_2 l_2 \sec^2(\alpha_n \lambda_2)} \quad (22)$$

Здесь

$$y_{k,1}^2 = (y_0^2 - h_0^2) \frac{l_1 - x + l_2k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + (y_e^2 - h_e^2) \frac{x}{l_1 + l_2k_1/k_2} + \frac{w^*}{k_1} l_{0p} x \frac{l_{0p} + 2l_2k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + h_{e,1}^2 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_1 \quad (23)$$

$$y_{k,1}^2 = (y_0^2 - h_0^2) \frac{l_1 - x + l_2k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + (y_e^2 - h_e^2) \frac{x}{l_1 + l_2k_1/k_2} + \frac{w^*}{k_1} \left[l_{0p} x \frac{l_{0p} + 2l_2k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} - (x - x_1)^2 \right] + h_{e,1}^2 \quad \text{при } x_1 \leq x \leq l_1 \quad (24)$$

$$y_{k,2}^2 = (y_0^2 - h_0^2) \frac{(L-x)k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + (y_e^2 - h_e^2) \frac{l_1 + (x-l_1)k_1/k_2}{l_1 + l_2k_1/k_2} + \frac{w^*}{k_2} l_{0p} (L-x) \frac{l_{0p} + 2x_1}{l_1 + l_2k_1/k_2} + h_{e,2}^2 \quad \text{при } l_1 \leq x \leq L \quad (25)$$

Необходимо отметить, что в уравнениях (21), (22), равно как и в (17), (18), суммирование происходит по положительным корням уравнения (16).

В частном случае однородного пласта ($k_1 = k_2$, $a_1 = a_2$, $\sigma = 1$) из (16) следует

$$\alpha_n = n\pi a / L \quad (26)$$

где n — любое целое положительное число от 1 до ∞ .

Подставляя (26) в (21), (22), получим уравнение кривой депрессии грунтовых вод в однородном ограниченном пласте при совместном влиянии двустороннего подпора от

водохранилища и местной усиленной инфильтрации

$$y^2(x, t) = y_k^2 - (y_0^2 - h_0^2) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) \sin \frac{\pi n x}{L} -$$

$$- (y_e^2 - h_e^2) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) \sin \frac{\pi n (L-x)}{L} - 2 \frac{\omega^*}{k} L^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) \times$$

$$\times \left[\sin \frac{\pi n (x+x_1)}{L} - \sin \frac{\pi n (x-x_2)}{L} + \sin \frac{\pi n (x-x_1)}{L} - \sin \frac{\pi n (x+x_2)}{L} \right] \quad (27)$$

где $\tau = a^2 t / L^2$ — критерий Фурье, безразмерное время.

Выражения y_k для орошаемого и неорошаемых участков пласта вытекают из (23) — (25), если положить в них $k_1 = k_2$.

График специальной функции

$$P = \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) \sin \frac{\pi n x}{L}$$

представлен на фиг. 2. При значениях $\tau > 0.3$ вполне достаточно ограничиваться первым членом ряда.

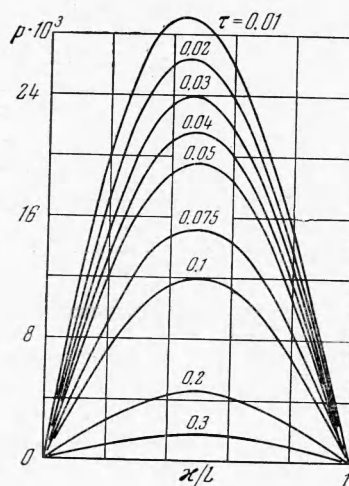
График функции

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) \sin \frac{\pi n x}{L}$$

дан в работе Н. Н. Веригина [9].

В заключение укажем, что полученные решения распространяются также на те случаи, когда границей потока вместо водохранилища служат магистральный оросительный канал или горизонтальная дрена совершенного типа.

Автор благодарит Н. Н. Веригина за внимание и ценные советы.



Фиг. 2

Поступила 10 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина П. Я. О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. ПММ, 1949, т. 13, вып. 2.
2. Полубаринова - Кочина П. Я. О динамике грунтовых вод при поливах. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
3. Веригин Н. Н. О неустановившемся движении грунтовых вод вблизи водохранилищ. Докл. АН СССР, 1949, т. 66, № 6.
4. Веригин Н. Н. О течениях грунтовых вод при местной усиленной инфильтрации. Докл. АН СССР, 1950, т. 70, № 5.
5. Аверьянов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. Сб. «Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод», Изд-во АН СССР, 1956.
6. Бочеввер Ф. М. К гидрогеологическим расчетам водозаборных сооружений в неоднородных водоносных пластах. Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений. Сб. ин-та ВОДГЕО, Стройиздат, 1964.
7. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Гос. научно-техн. изд. Украины, Харьков, 1937.
8. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. Изд. иностр. лит., 1948 (перевод с англ.)
9. Веригин Н. Н. Движение грунтовых вод вблизи водохранилищ. Гидротехническое строительство, 1952, № 4.