

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

О. В. Капцов

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

Рассматривается известная модель нелинейных диспергирующих волн, предложенная Буссинеском во второй половине девятнадцатого века. Получены решения уравнения Буссинеска, выражающиеся через элементарные функции и описывающие волновые пакеты, их взаимодействие между собой и с солитонами, а также некоторые другие структуры. Для построения решений использовано билинейное представление Хироты и дифференциальные связи, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Одно из классических уравнений Буссинеска [1, 2], описывающих волны на мелкой воде, движущиеся в обоих направлениях, имеет вид

$$\eta_{tt} = gh_0\eta_{xx} + \frac{3}{2}g(\eta^2)_{xx} + \frac{1}{3}gh_0^3\eta_{xxxx},$$

где g — ускорение свободного падения; h_0 — невозмущенная глубина; η — отклонение поверхности воды от невозмущенного состояния. С помощью преобразований $\eta' = 2h_0\eta$, $t' = \sqrt{3g/h_0}t$, $x' = \sqrt{3}x/h_0$ оно приводится к виду

$$\eta'_{t't'} = \eta'_{x'x'} + 3(\eta'^2)_{x'x'} + \eta'_{x'x'x'x'}. \quad (1)$$

Уравнение (1) привлекает особое внимание исследователей в связи с тем, что обладает солитонными решениями. Формула N -солитонных решений была получена Хиротой [3], рациональные решения приведены в [4]. В данной работе найдены новые решения уравнения Буссинеска и некоторым из них дана гидродинамическая интерпретация. В частности, получены решения, описывающие распространение волновых пакетов и их взаимодействие.

Как заметил Хирота, построение решений уравнения (1) удобно начинать с приведения его к билинейному виду. Для этого необходимо сделать замену

$$\eta' = 2 \frac{d^2}{dx'^2} (\ln u)$$

и два раза проинтегрировать полученное уравнение. Полагая функции, возникающие в процессе интегрирования, равными нулю, приходим к билинейному уравнению

$$u_{tt}u - u_t^2 - uu_{xxxx} + 4u_xu_{xxx} - 3u_{xx}^2 - uu_{xx} + u_x^2 = 0. \quad (2)$$

С целью упрощения записи в уравнении (2) и последующих уравнениях штрихи при переменных t и x опущены.

Как известно [3], одно- и двухсолитонные решения уравнения (1) порождаются следующими решениями уравнения (2):

$$u_1 = 1 + s \exp(kx \pm kt\sqrt{1+k^2}),$$

$$u_2 = 1 + \exp(k_1x + m_1t + s_1) + \exp(k_2x + m_2t + s_2) +$$

$$+ p_{12} \exp((k_1 + k_2)x + (m_1 + m_2)t + s_1 + s_2),$$

где s, s_1, s_2, k, k_1, k_2 — произвольные постоянные; $m_i = \pm k_i \sqrt{1 + k_i^2}$;

$$p_{12} = \frac{3(k_1 - k_2)^2 + (n_1 - n_2)^2}{3(k_1 + k_2)^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad n_i = m_i/k_i. \quad (3)$$

Заметим, что функции u_1, u_2 удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$d_x(d_x - k_1)(d_x - k_2)(d_x - k_1 - k_2)u = 0 \quad (4)$$

(d_x — производная по x). Оказывается, существуют другие решения этого уравнения, порождающие решения уравнения Буссинеска.

Интегрирование системы, образованной уравнениями (2), (4), осуществляется за два шага. На первом — выбираются постоянные k_1, k_2 и находится общее решение уравнения (4). Переменная t входит в это решение параметрическим образом. Для того чтобы определить зависимость функции u от времени, на втором шаге найденное общее решение подставляется в уравнение (2). В результате возникает переопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая эту систему, мы находим функцию $u(t, x)$, порождающую решение уравнения Буссинеска. Примеры, иллюстрирующие эту схему, приводятся ниже.

Рассмотрим простейший случай: $k_1 = k_2 = 0$. Решением уравнения (4) является многочлен $u = r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0$. При этом r_i могут зависеть от t . Подставляя многочлен в уравнение (2), легко получить два известных решения:

$$u = (x \pm t)^5 + (x \pm t) \mp 6t, \quad u = x^2 - t^2 - 3.$$

Если $k_1 = 0, k_2 = k \neq 0$, то общее решение уравнения (4) есть $u = (r_3x + r_2) \exp(kx) + r_1x + r_0$. После подстановки данной функции u в (2) находим r_i :

$$r_3 = 1, \quad r_2 = t, \quad r_1 = s \exp(mt)(1 + \sqrt{1 + k^2 + 2k^2})/6k, \\ r_0 = s \exp(mt)(1 + t(1 + \sqrt{1 + k^2 + 2k^2})/6k),$$

где s — произвольная постоянная; $m = k\sqrt{1 + k^2}$.

При $k_1 = k_2 = k \neq 0$ можно найти следующее решение уравнений (2), (4):

$$u = \exp(2kx - 2mt) + \exp(kx - mt)(r_1x + r_2) + r_0,$$

где $r_1 = s; r_2 = -st(2k^2 + 1)/\sqrt{1 + k^2}; r_0 = -s^2(4k^2 + 3)/12k^2(1 + k^2); s$ — произвольная постоянная; $m = \sqrt{k^2 + k^4}$.

В случае чисто мнимых констант $k_1 = ik, k_2 = -ik$ имеется два класса решений уравнений (2), (4). Первый класс образуют функции, порождающие сингулярные решения уравнения (1), второй — регулярные. К первому классу относятся решения:

$$u = \sin(kx - mt) + ax + bt, \quad u = \sin(kx) + c_1 \cos(mt) + c \sin(mt).$$

Здесь

$$m = \sqrt{k^2 - k^4}; \quad a = \sqrt{\frac{3m^2}{3 - 4k^2}}; \quad b = \frac{a(2k^2 - 1)}{\sqrt{1 - k^2}}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{1 - c^2 + k^2c^2 - 4k^2}{1 - k^2}}; \quad c \in R.$$

Второй класс представляет решение

$$u = \sin(kx) + \exp(t\sqrt{k^4 - k^2}) + \frac{4k^2 - 1}{4(k^2 - 1)} \exp(-t\sqrt{k^4 - k^2}). \quad (5)$$

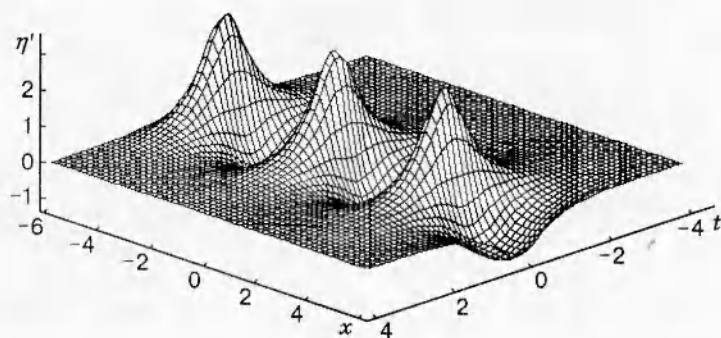


Рис. 1

Функции (5) отвечает весьма необычное решение уравнения Буссинеска, представленное на рис. 1 для $k = 1,5$. Данное решение является периодическим по x , его амплитуда экспоненциально быстро стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Особенность решения состоит в том, что в течение короткого промежутка времени «из ничего» (выражение Дж. Лайтхила [5, с. 299]) возникает волна и затем быстро затухает.

Особый интерес представляет случай комплексно-сопряженных чисел $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, при этом решение уравнений (4), (2) имеет вид

$$u = 1 + 2 \cos (bx + qt) \exp (ax + rt) + p_{12} \exp (2ax + 2rt). \quad (6)$$

Здесь r и q — вещественная и мнимая части числа $m = \sqrt{k^2 + k^4}$, а p_{12} определяется формулой (3). По аналогии с модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза и sine-Gordon [4, 6] решение уравнения (1), соответствующее функции (6), будем называть бризером. Поведение бризера определяется числами a и b . Если взять $a = 0,2$; $b = 2$, то решению (6) будет отвечать волновой пакет, движущийся с групповой скоростью $v_{gr} = -r/a = 17,1$. Бризер при $t = 0$ представлен на рис. 2. Расплывания волнового пакета с течением времени не происходит. Амплитуду волнового пакета (максимальную амплитуду волн, образующих волновой пакет) можно снизить, уменьшая параметр b и оставляя a неизменным. Например, при $b = 1$ амплитуда несколько больше 0,4, а при $b = 0,95$ она уже не превышает 0,2. Дальнейшее уменьшение параметра b приводит к тому, что пакет перестраивается в структуру типа солитона, по которому бегут волны («рябь»). Структуру такого типа будем называть солитоноподобным бризером. На рис. 3 представлен такой бризер в моменты времени $t = 0$ и $t = 30$ ($b = 0,933$). При дальнейшем уменьшении параметра b решение уравнения (1), соответствующее функции (6), становится разрывным. Следует отметить, что для уравнения Кортевега — де Фриза не найдено гладких решений типа бризера.

Легко выписать обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет

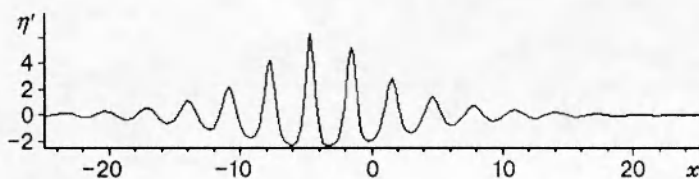


Рис. 2

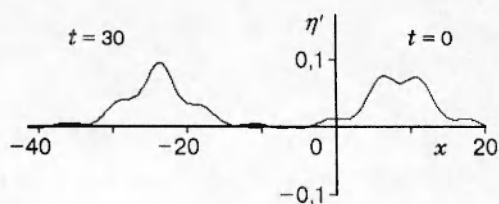


Рис. 3

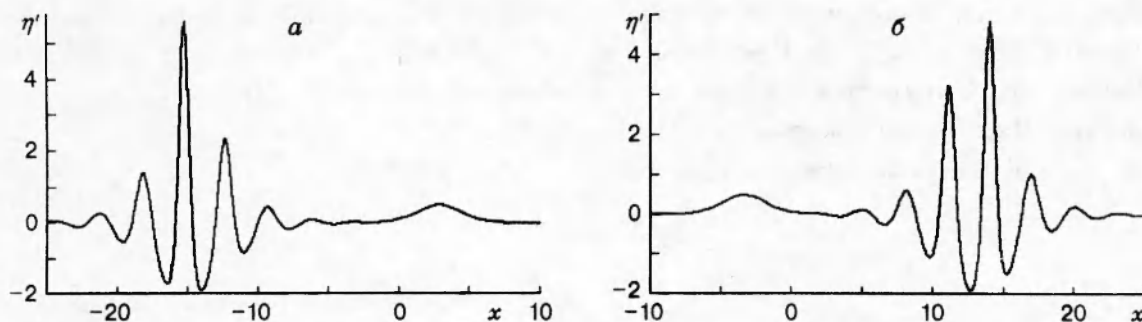


Рис. 4

функция, порождающая трехсолитонное решение уравнения

$$d_x(d_x - k_1)(d_x - k_2)(d_x - k_3)(d_x - k_1 - k_2)(d_x - k_1 - k_3)(d_x - k_2 - k_3)(d_x - k_1 - k_2 - k_3)u = 0. \quad (7)$$

Вновь выбирая различным образом константы k_i , находя общее решение уравнения (7), подставляя его в (2) и интегрируя обыкновенные уравнения второго порядка, можно получить разнообразные решения уравнения Буссинеска.

Приведем решение, описывающее упругое взаимодействие солитона и бризера. Это решение возникает в случае, когда k_1 и k_2 являются комплексно-сопряженными числами, а k_3 — вещественным. Соответствующая функция u имеет вид

$$u = 1 + 2 \cos (bx + qt) \exp (ax + rt) + p_{12} \exp (2ax + 2rt) + \exp (k_3x + m_3t) + \\ + 2(p_{13r} \cos (bx + qt) - p_{13i} \sin (bx + qt)) \exp ((a + k_3)x + (r + m_3)t) + \\ + |p_{13}|^2 p_{12} \exp ((2a + k_3)x + (2r + m_3)t).$$

Здесь p_{12} задается формулой (3), p_{13} — этой же формулой с заменой индекса 2 на 3; a и b , r и q , p_{13r} и p_{13i} обозначают вещественные и мнимые части комплексных чисел k_1 , $m = k_1 \sqrt{1 + k_1^2}$, p_{13} . На рис. 4, а, б представлены волновой пакет и солитон до и после взаимодействия. Решение, описывающее взаимодействие солитона и солитоноподобного бризера, можно получить выбором свободных параметров: $a = 0,5$; $b = 1,23$; $k_3 = 1$.

Разнообразные точные решения уравнения Буссинеска можно найти с помощью уравнения (7) и его высших аналогов. Не приводя конкретного вида функции, отметим, что решение, описывающее взаимодействие двух бризеров, получается из выражения для 4-солитонного решения [3], если взять пары чисел k_1, k_2 и k_3, k_4 комплексно-сопряженными. Открытым остается вопрос устойчивости полученных решений. Особый интерес представляет проведение экспериментов для исследования бризерных решений.

В заключение отметим, что изложенная выше схема построения точных решений переносится и на другие уравнения, допускающие билинейное представление Хироты, при этом структура дифференциальных связей (4), (7) остается неизменной.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН № 43 «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости», поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
2. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

3. **Hirota R.** Exact N -soliton solution of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 810–814.
4. **Абловиц М., Сигур Ч.** Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
5. **Лайтхил Дж.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
6. **Лэм Дж. Л.** Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.

*Поступила в редакцию 15/X 1996 г.,
в окончательном варианте — 19/I 1997 г.*
