

УДК 532.529.2:536.412:532.5.013.13

НЕБУССИНЕСКОВА ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ПОДОГРЕВЕ

Ю. А. Гапоненко, В. Е. Захватаев*

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

* Сибирский государственный технологический университет, 660049 Красноярск

На основе модели дозвуковых течений численно исследуется влияние теплового расширения жидкости на формирование естественно-конвективных течений при малых числах Рэлея (микроконвекции) и пространственно-периодическом распределении потоков тепла на границах области, занимаемой жидкостью.

Введение. При пониженной гравитации значительное влияние на формирование естественной конвекции могут оказывать малые изменения теплофизических свойств среды, которые в земных условиях незначительны. В частности, объемное расширение теоретически может быть причиной некоторых конвективных явлений, наблюдаемых в опытах, проводимых на борту космических аппаратов [1, 2].

Оценки порядков величин в полных уравнениях Навье — Стокса и теплопереноса и численное исследование показывают, что если число Рэлея R достаточно мало [3, 4]:

$$R/\varepsilon \equiv gH^3/(\nu\chi) \leq O(1), \quad (1)$$

то вклад в формирование поля скоростей изменений плотности, обусловленных тепловым расширением среды, сравним или превышает по порядку величины вклад сил плавучести. В этом случае приближение Обербека — Буссинеска неприменимо для описания тепловой конвекции. В (1) $\varepsilon = \beta\Delta T$ — параметр Буссинеска; ΔT — характерная разность температур; β — температурный коэффициент объемного расширения; H — характерный линейный размер; g — ускорение внешнего силового поля; ν — кинематическая вязкость; χ — температуропроводность среды при некоторой характерной температуре. Условия (1) реализуются при микроускорениях, достижимых на борту современных космических аппаратов. Конвективные течения, формирующиеся в условиях (1) и обычно характеризующиеся скоростями порядка 10 мкм/с и менее, называют микроконвекцией [4].

Для описания микроконвекции можно использовать известную модель существенно дозвуковых течений при произвольных изменениях плотности, которая получается в пределе из полной системы уравнений Навье — Стокса и теплопереноса при стремлении к нулю числа Маха и параметра, характеризующего гидростатическую сжимаемость [5, 6].

При исследовании микроконвекции [3, 4, 7–12] в качестве основной использовалась модель микроконвекции, которая, по существу, является специальным частным случаем приближения дозвуковых течений. Основное внимание уделялось исследованию влияния быстропеременных во времени внешних воздействий, поскольку они могут вызвать заметные изменения плотности среды. Создание быстропеременных условий подогрева положено

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (Конкурс-экспертиза 2000 г. научных проектов молодых ученых, Интеграционный проект № 5) и Красноярского краевого фонда науки (коды проектов 11G26, 12G57, 13G036).

в основу некоторых экспериментальных работ по обнаружению и изучению микроконвективных явлений.

Для экспериментального изучения микроконвекции предлагается использовать пространственно неоднородный подогрев, позволяющий с помощью теплового расширения среды весьма просто управлять структурой и характеристиками конвективных течений. В настоящей работе рассматривается влияние пространственно-периодического подогрева на формирование микроконвекции в прямоугольнике. Численно исследуется зависимость структуры и свойств микроконвективных течений данного типа от физических и геометрических определяющих параметров.

Постановка задачи. Рассматриваются двумерные микроконвективные течения жидкой среды с изобарическим коэффициентом объемного расширения β , вязкостью μ , теплопроводностью k , удельной теплоемкостью при постоянном давлении c_P (объемная вязкость полагается равной нулю); предполагается, что перечисленные теплофизические свойства постоянны. Жидкость заполняет прямоугольную область $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, ограниченную твердыми непроницаемыми стенками (x, y — декартовы координаты). Система находится в постоянном однородном внешнем силовом поле, направление вектора \mathbf{g} ускорения внешних массовых сил совпадает с осью x . Состояние системы описывается следующими полями: $\rho(\mathbf{x}, t)$ — поле плотности в момент времени t в точке $\mathbf{x} = (x, y)$; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1, v_2)$ — поле скоростей; $p(\mathbf{x}, t)$ — давление; $T(\mathbf{x}, t) = \theta - \theta_0$ — отклонение температуры θ от характерного значения θ_0 .

Первоначально все стенки, кроме $y = 0$, теплоизолированы. Начиная с некоторого момента времени на границе области $y = 0$ мгновенно задается периодический по времени и пространству тепловой поток

$$T_y = \Theta \cos(\omega t) \cos(n\pi x/L), \quad (2)$$

где ω — частота изменения потока тепла; n — число полупериодов колебаний потока тепла. На границе $y = H$ задается условие теплоизоляции либо условие (2). Стенки $x = 0$, $x = L$ остаются теплоизолированными.

Для описания рассматриваемых течений используется модель дозвуковых течений. Отметим, что в приближении дозвукового течения полное давление представляется в виде суммы пространственно однородной термодинамической составляющей $P(t)$ и составляющей $p(\mathbf{x}, t)$, учитывающей динамический и гидростатический эффекты; последняя исключается из уравнения состояния, что обеспечивает “фильтрацию” акустики. В рассматриваемом случае в силу граничных условий (суммарный кондуктивный поток тепла через границу области равен нулю) $P = \text{const}$, и уравнения модели дозвуковых течений принимают вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad \rho c_P \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T. \quad (3)$$

В качестве уравнения состояния выбирается линейная зависимость удельного объема от температуры [3, 4]

$$\rho = \rho_0(1 + \beta T)^{-1}, \quad (4)$$

где $\rho_0 > 0$ — характерное (постоянное) значение плотности.

Комбинируя уравнения неразрывности, переноса тепла и уравнение состояния, получим

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \beta \chi \nabla^2 T, \quad (5)$$

где $\chi = k/(\rho_0 c_P)$ — температуропроводность.

Система (3)–(5) соответствует модели микроконвекции [3, 4] в физических переменных, полученной из уравнений линейной неравновесной термодинамики путем априорных допущений в работе [3].

В качестве масштабов длины, скорости, времени, модифицированного давления и температуры выберем соответственно H , $\varepsilon\chi/H$, H^2/χ , $\rho_0(\varepsilon\nu\chi/H)^2$ и $\Theta H = \Delta T$. Тогда в безразмерных переменных система (3)–(5) примет вид ($0 \leq x \leq A$, $0 \leq y \leq 1$)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \varepsilon \nabla^2 T,$$

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = G T \mathbf{k} - (1 + \varepsilon T) \nabla p + (1 + \varepsilon T) \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla T = (1 + \varepsilon T) \nabla^2 T,$$

где $G = |\mathbf{g}|H^3/(\nu\chi)$ — число Галилея; $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $A = L/H$ — аспектное отношение; \mathbf{T} — декартовый тензор с компонентами $T_{ik} = \partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i - (2/3)\delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v}$; $\mathbf{k} = \mathbf{g}/|\mathbf{g}|$.

Используются два варианта граничных условий для температуры. Граничные условия при одностороннем подогреве имеют вид

$$x = 0, \quad x = A: \quad T_x = 0; \quad (7)$$

$$y = 1: \quad T_y = 0, \quad y = 0: \quad T_y = \cos(\omega t) \cos(\pi n x / A); \quad (8)$$

при двустороннем подогреве — вид (7) и

$$y = 0, \quad 1: \quad T_y = \cos(\omega t) \cos(\pi n x / A). \quad (9)$$

Для скорости на границе расчетной области ставятся условия прилипания

$$\mathbf{v} = 0. \quad (10)$$

Начальные данные соответствуют состоянию равновесия

$$t = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = T_0. \quad (11)$$

Поле температуры определяется из решения уравнения теплопроводности $T_{0t} = \nabla^2 T_0$ при граничных условиях (7)–(11).

Результаты численного решения задачи (6)–(11) сравниваются с результатами решения аналогичной задачи в приближении Обербека — Буссинеска. Соответствующие уравнения и граничные условия для модели Обербека — Буссинеска могут быть получены, если положить $\varepsilon = 0$ в системе (6) в уравнении неразрывности и множителе $1 + \varepsilon T$.

Уравнения (6) решаются конечно-разностным методом, построенным на основе известного метода [13] и одной из его модификаций для сжимаемых течений [5]. Для перехода с n -го на $(n + 1)$ -й временной слой используется следующая процедура.

1. Скалярными прогонами, выполненными по каждому из направлений x и y , определяется приближенное значение скорости \mathbf{v}_1^{n+1} :

$$\mathbf{v}_1^{n+1} = \mathbf{v}^n + \tau [-\varepsilon \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}_1^{n+1} - (1 + \varepsilon T^n) \text{Pr} \nabla p^n + (1 + \varepsilon T^n) \nabla \cdot \mathbf{T}_1^{n+1} + G T^n g \mathbf{k}].$$

2. Для вычисления давления p и уточненной скорости \mathbf{v} используется итерационная процедура (k — номер итерации)

$$p_k^{n+1} = p_{k-1}^{n+1} - \gamma (\nabla \mathbf{v}_k^{n+1} - \varepsilon \nabla^2 T^n),$$

$$\mathbf{v}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{v}_k^{n+1} - \tau (1 + \varepsilon T^n) \text{Pr} (\nabla p_k^{n+1} - \nabla p_{k-1}^{n+1}).$$

Таблица 1

Жидкость	χ , см ² /с	β , К ⁻¹	Pr
N1	0,001 518	0,0002	5,4
N2	0,001 098	0,0010	838,0
N3	0,001 120	0,0010	1625,0
N4	0,490 000	$7,5 \cdot 10^{-6}$	0,0054

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}| < \varepsilon_p$ (ε_p — заданная точность расчета). Исходное давление для итераций $p_0^{n+1} = p^n$. Параметр γ , отвечающий за скорость сходимости процесса, принимается равным

$$\gamma = \frac{1}{\tau \text{Pr}(1 + \varepsilon T^n)} \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right)^{-1}.$$

3. Температура T^{n+1} определяется из уравнения энергии скалярной прогонкой

$$T^{n+1} = T^n - \tau \varepsilon \mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla T^{n+1} + \tau (1 + \varepsilon T^n) \nabla^2 T^{n+1}.$$

Для реализации данной схемы расчета используется сетка, состоящая из основной системы узлов (для p , T) и двух вспомогательных (для каждой компоненты скорости) [5, 13]. Пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности. При вычислении производных на границе области используются “фиктивные” ячейки за пределами расчетной сетки, в которых искомые величины вычисляются с помощью квадратичной экстраполяции.

Точность расчетов контролировалась по максимальному балансу массы в ячейке для всей расчетной области

$$E_m = \int \rho|_{\rho(t)} dx dy - \int \rho|_{\rho(0)} dx dy + \int \rho \mathbf{v} dS dt,$$

который сохранялся в пределах ± 1 %.

Результаты численного моделирования и их обсуждение. Расчеты конвективных течений проводятся для жидкостей, параметры которых приведены в табл. 1. Рассматриваются модельные среды типа воды H₂O (N1), силиконовых масел ПМС-100 (N2) и ПМС-200 (N3) при температуре 300 К [14], а также среды с малым числом Прандтля типа расплавленного металла или полупроводника (N4). Пространственный масштаб $H = 1$ см, безразмерная угловая частота колебаний потока тепла через границу $\omega' = 1$.

Исследуются механизмы формирования микроконвективных течений, зависимость их структуры и свойств от определяющих параметров при нестационарном пространственно-периодическом распределении потоков тепла на границах замкнутой области, занимаемой жидкостью. Основным параметром задачи, определяющим степень влияния силы плавучести и объемного расширения на поле скоростей, является число Галилея $G = R/\varepsilon$ (параметр микроконвекции [3, 4]).

Случай отсутствия внешних сил. Наиболее отчетливо эффект теплового расширения жидкости проявляется при отсутствии внешних силовых полей. В этом случае единственным внешним фактором, способным индуцировать макроскопическое движение, является нестационарное неоднородное тепловое воздействие на стенки каверны, и возникновение конвекции связано только с тепловым расширением жидкости. Механизм развития микроконвективного течения состоит в следующем. Тепловое расширение, учитываемое правой частью уравнения (5) $\beta \chi \nabla^2 T$, индуцирует возникновение течения как необходимое условие сохранения массы. В свою очередь, отличие от нуля величины $\nabla^2 T$ обусловлено нестационарными во времени изменениями температуры и такой конфигурацией полей

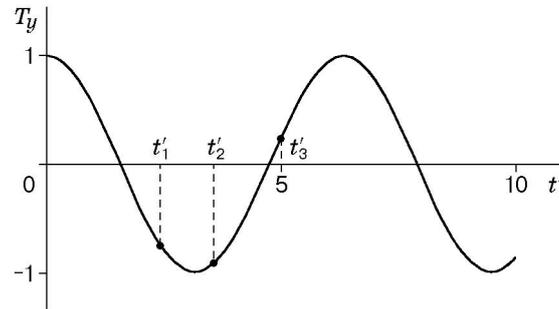


Рис. 1. Зависимость температуры от времени

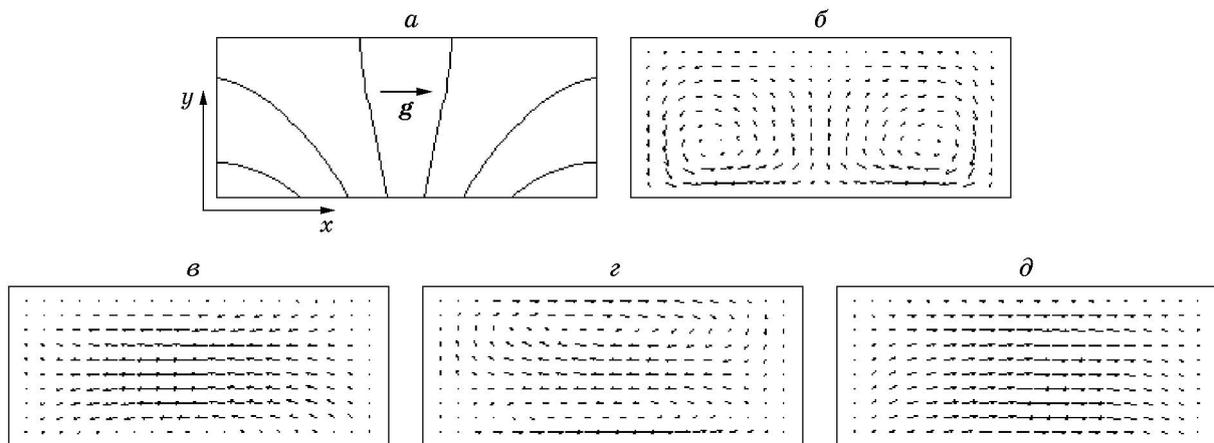


Рис. 2. Изолинии температуры (а) и поля скоростей для модели Обербека — Буссинеска (б) и модели микроконвекции в различные моменты времени (в — $t' = t'_1$, г — $t' = t'_2$, д — $t' = t'_3$)

температуры и скоростей, при которой $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ существенно отлично от нуля в некоторых частях области, занимаемой жидкостью.

Влияние параметра микроконвекции G на микроконвективное течение. При проведении экспериментов на борту современных космических аппаратов параметр G существенно отличен от нуля. Численные расчеты подтверждают, что при достаточно малых G в соответствии с (1) тепловое расширение доминирует. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров течения жидкости N4: $G = 0,01$, $A = 2$, $n = 1$, $\varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-4}$. На рис. 1 представлена зависимость температуры $T_y|_{x=0}$ от времени. Типичные структуры течения, рассчитанные по моделям микроконвекции и Обербека — Буссинеска представлены на рис. 2. На рис. 2 приведены изолинии поля температуры в начальный момент времени, поле скоростей с двухвихревой симметричной структурой, характерной для модели Обербека — Буссинеска, и поля скоростей для модели микроконвекции в различные моменты времени. Согласно представленным результатам для модели микроконвекции существуют режимы однонаправленного течения из нагреваемой области в охлаждаемую, индуцируемые объемным расширением (рис. 2, в, д). Формирование таких течений происходит в те моменты времени, когда поле температуры наиболее динамично изменяется во времени; лишь когда изменяемый во времени поток тепла через границу близок к экстремальному значению, происходит формирование двухвихревой структуры течения (рис. 2, г), при которой сжатая жидкость (в силу уравнения неразрывности) вытекает из области большей плотности (ср. рис. 2, в-д).

Таблица 2

Модель	V_{\max} , см/с	
	$G = 0,01$	$G = 1$
Микроконвекции	$1,09 \cdot 10^{-4}$	$1,10 \cdot 10^{-4}$
Обербека — Буссинеска	$3,55 \cdot 10^{-9}$	$3,57 \cdot 10^{-7}$

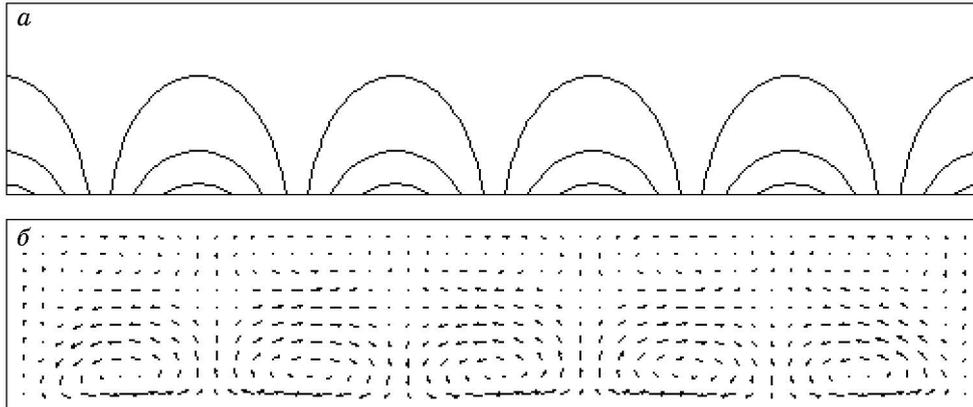


Рис. 3. Изолинии температуры (а) и поле скоростей (б)

Очевидно качественное различие структур течений, рассчитанных по моделям микроконвекции и Обербека — Буссинеска: для последней формирование симметричной двухвихревой структуры (рис. 2, б) происходит только под действием силы плавучести, при этом с изменением во времени поля температуры центры вихрей практически неподвижны, но направление вращения меняется. Кроме того, значительно различаются максимальные скорости, рассчитанные по данным моделям, особенно при малых значениях G . Максимальные значения скоростей для жидкости N4 при $A = 2$, $n = 1$, $\Theta = 100$ К/см приведены в табл. 2.

Влияние пространственной структуры внешнего теплового потока на микроконвективное течение. На структуру микроконвективного течения определяющее влияние оказывает характер пространственной неоднородности внешнего поля температуры. Рассмотрим влияние числа полупериодов колебаний градиента температуры на стенке n на характеристики микроконвекции. На рис. 3 представлены результаты расчета течения жидкости N4 с числом полупериодов колебания T_y на стенке $n = 5$ при $G = 0,01$, $A = 5$, $\varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-4}$. Обычно при достаточно большом A один полупериод колебания T_y генерирует в жидкости одну двухвихревую ячейку. Поэтому на рис. 3 наблюдается пять двухвихревых структур, каждая из которых индуцируется одним полупериодом колебания потока тепла на границе. Расчеты показывают, что с ростом n происходит уменьшение скорости течения, например, для жидкости N4 $V_{\max} = 6,05 \cdot 10^{-4}$; $1,8 \cdot 10^{-4}$; $1,9 \cdot 10^{-5}$ см/с при $n = 1$; 2; 5 соответственно. (Отметим, что максимальный перепад температур по области уменьшается с ростом n .)

Двусторонний подогрев. Влияние двустороннего подогрева на структуру течения показано на рис. 4, где приведены результаты расчетов для жидкости N4 (при граничных условиях (7), (9)) при $n = 1$, $G = 0,01$, $A = 2$, $\varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-4}$. Изменение температурного поля значительно меняет структуру течения для модели микроконвекции. Как видно на рис. 4, в камере сформирована четырехвихревая структура. Наиболее интенсивные вихри наблюдаются вблизи теплоизолированных стенок, т. е. там, где поле температуры име-

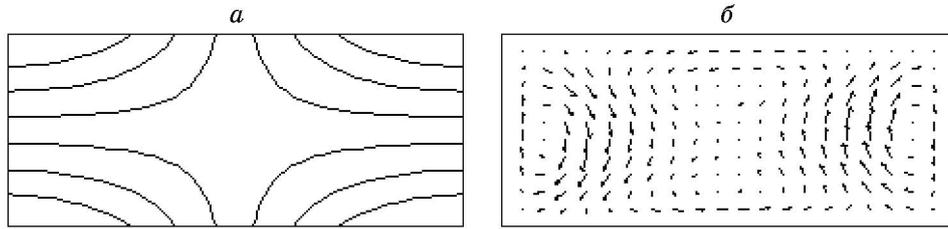


Рис. 4. Изолинии температуры (а) и поле скоростей (б) при двустороннем подогреве

Таблица 3

Жидкость	V_{\max} , см/с	
	$A = 1$	$A = 2$
N1	$7,82 \cdot 10^{-7}$	$5,23 \cdot 10^{-6}$
N2	$2,31 \cdot 10^{-6}$	$1,65 \cdot 10^{-5}$
N3	$2,53 \cdot 10^{-6}$	$1,83 \cdot 10^{-5}$

ет большой градиент. Однако при этом происходит уменьшение максимальной скорости: $V_{\max} = 3,02 \cdot 10^{-5}$ см/с, тогда как для одновихревой структуры $V_{\max} = 1,09 \cdot 10^{-4}$ см/с. Это связано с меньшим, чем при одностороннем подогреве, перепадом температуры.

Влияние аспектного отношения A на микроконвективное течение. Численные расчеты показывают, что с увеличением аспектного отношения наблюдается увеличение максимальной скорости, например, для жидкости N4 $V_{\max} = 1,89 \cdot 10^{-5}$; $1,09 \cdot 10^{-4}$; $6,04 \cdot 10^{-4}$ см/с при $A = 1$; 2; 5 соответственно. Этот эффект связан с ростом удельной мощности подогрева и перепадом температуры, увеличивающимся с ростом A . Кроме того, с увеличением A формирование двухвихревой структуры для модели микроконвекции происходит в разные моменты времени: чем больше A , тем позднее происходит это формирование по сравнению с моментом достижения потоком тепла экстремального значения на границе. Это может быть связано с инерцией жидкости, противодействующей тепловому расширению при смене направления граничного потока тепла на противоположное.

Результаты расчетов для жидкостей N1, N2, N3 различаются только количественно. Максимальные значения скоростей V_{\max} для данных жидкостей при $G = 0,01$, $n = 1$, $\Theta = 50$ К/см приведены в табл. 3.

Заключение. Для типичных веществ и геометрических конфигураций физических систем, используемых в экспериментах по конвекции в условиях микрогравитации и космическому материаловедению, рассмотрено влияние теплового расширения жидкости на формирование конвекции при малых числах Рэлея, связанное с пространственной неоднородностью теплового поля на границах резервуара. На основе полученных численных результатов можно сделать вывод, что при проведении экспериментов при ускорениях в 10^5 – 10^6 раз меньше земного, достижимых на современных космических аппаратах, пространственная неоднородность внешнего теплового поля может давать вклад в конвекцию, значительно отличающийся от получаемого по модели Буссинеска.

В то же время с помощью пространственной неоднородности подогрева, по-видимому, можно эффективно экспериментально изучать микроконвективные явления. Такой подход может являться дополнением к подходу, основанному на использовании быстропеременных во времени внешних воздействий. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что становится возможным формирование таких конфигураций физических систем, которые способствуют возникновению устойчивых, легко прогнозируемых качественных изменений в режимах конвекции, порождаемых тепловым расширением среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Larkin B. K.** Heat flow to a confined fluid in zero gravity // *Progr. Astronaut. Aeronaut.* 1967. V. 20. P. 819–832.
2. **Grodzka P. G., Bannister T. C.** Heat flow and convection demonstration experiments aboard Apollo 14 // *Science.* 1972. V. 176. P. 506–508.
3. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // *Моделирование в механике.* 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
4. **Пухначев В. В.** Микроконвекция в вертикальном слое // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 1994. № 5. С. 76–84.
5. **Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.** Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989.
6. **Chenoweth D. R., Paolucci S.** Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 169. P. 173–210.
7. **Perera P. S., Sekerka R. F.** Nonsolenoidal flow in a liquid diffusion couple // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9, N 2. P. 376–391.
8. **Pukhnachov V. V.** Solvability of initial boundary value problem in non-standard model of convection // *Зап. науч. семинаров С.-Петербур. отд-ния Мат. ин-та.* 1996. Т. 233. С. 217–226.
9. **Гончарова О. Н.** Микроконвекция в слабых силовых полях: сравнение двух моделей при численном исследовании // *ПМТФ.* 1997. Т. 38, № 2. С. 43–51.
10. **Гончарова О. Н.** Расчет микроконвекции в длинном прямоугольнике // *Вычисл. технологии.* 2000. Т. 5, № 5. С. 26–37.
11. **Гончарова О. Н.** Численное исследование микроконвекции в областях со свободными границами // *ПМТФ.* 1997. Т. 38, № 3. С. 64–68.
12. **Гончарова О. Н.** Микроконвекция в области со свободной границей // *Вычисл. технологии.* 2000. Т. 5, № 2. С. 14–25.
13. **Amsden A. A., Harlow W. F.** A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculation // *J. Comput. Phys.* 1970. V. 6, N 2. P. 322–325.
14. **Езерский А. Б.** Динамика дефектов в гексагональных решетках, возникающих при конвекции Марангони — Бенара // *Синергетика: Лабораторные работы по нелинейной физике.* Ижевск: Издат. дом “Удм. ун-т”, 1999. С. 51–74.

*Поступила в редакцию 18/VI 2001 г.,
в окончательном варианте — 4/II 2002 г.*
