УДК 532.516

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Шелухин, У. А. Христенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: shelukhin@list.ru, ukhrist@gmail.com

На основе изучения совместного течения вязкой и микрополярной жидкостей получено новое граничное условие для уравнений вязкой жидкости, в случае когда на границе с твердым телом имеется тонкий слой гранулированной жидкости. Приведены примеры применения этого условия в задачах о течении бурового раствора при наличии глинистой корки на стенке скважины.

Ключевые слова: микрополярная жидкость, глинистая корка, совместное течение.

Введение. Для уравнений Навье — Стокса имеется небольшое количество граничных условий, а именно условие прилипания или какие-либо условия проскальзывания. Пусть $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к твердой поверхности Γ, $\boldsymbol{\tau}$ — касательный единичный вектор к этой поверхности. В работе [1] введено условие проскальзывания с трением

$$\Gamma: \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}\cdot(D\langle\boldsymbol{n}\rangle + \alpha\boldsymbol{v}) = 0,$$

где D — тензор скоростей деформаций. Условие прилипания $\boldsymbol{v}\big|_\Gamma = 0$ является предельным случаем, когда коэффициент трения $\alpha \to \infty$. В [2] сформулированы альтернативные краевые условия

$$\Gamma: \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \omega \equiv \partial_1 v^2 - \partial_2 v^2 = 0,$$

где ω — завихренность, и показано, что эти условия поставлены корректно. В работе [3] сформулировано обобщенное условие Навье, описывающее движение линии контакта двух жидкостей на твердой границе.

Целью данной работы является вывод краевого условия для уравнений вязкой жидкости, контактирующей с тонким пристенным слоем гранулированной жидкости. Такая задача возникает при моделировании течения бурового раствора в скважине в процессе бурения, когда давление в ней больше пластового давления [4]. В этих условиях фильтрат бурового раствора проникает в пористый нефтяной коллектор, а глинистые частицы раствора оседают на стенке скважины, образуя глинистую корку. Важное свойство корки состоит в том, что, являясь слабопроницаемой, она препятствует дальнейшему проникновению фильтрата бурового раствора в пласт.

Изучению динамики глинистой корки и ее влияния на циркуляцию бурового раствора посвящено большое число работ. Некоторые результаты исследований приведены в монографии [5]. Актуальность данных исследований обусловлена прежде всего необходимостью

© Шелухин В. В., Христенко У. А., 2013

решения проблемы устойчивости скважин: как известно, при возникновении очень больших давлений в процессе бурения скважина может разрушиться. Влияние состава бурового раствора [6] и даже эксцентричности буровой колонны относительно оси скважины [7] на величину давления хорошо исследовано, в то время как роль корки в циркуляции бурового раствора изучена недостаточно. Интерес к процессу формирования глинистой корки обусловлен также тем, что она оказывает существенное влияние на проникновение фильтрата бурового раствора и тем самым на электрическое сопротивление прискважинной зоны, измеряемое в процессе электромагнитного каротажа.

Результаты экспериментов показывают, что свойства корки аналогичны свойствам геля. В данной работе корка рассматривается как микрополярная жидкость. Следует отметить, что уравнения микрополярной жидкости применяются при моделировании гранулированных и ферромагнитных жидкостей [8], шлама и крови [9].

Формулировка задачи. Рассматривается совместное течение ньютоновской и микрополярной жидкостей между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами r_1 и r_3 ($r_1 < r_3$). Ньютоновская жидкость примыкает к внутреннему цилиндру, а микрополярная — к внешнему. Течение направлено вдоль общей оси цилиндров, т. е. вдоль оси $\boldsymbol{e}_z$. Поверхность контакта задается уравнением $r = r_2$ ($r_1 < r_2 < r_3$).

Теория микрополярных жидкостей, основанная на понятии континуума Коссера [10], развита в работах [11, 12]. Каждая частица пристенной микрополярной жидкости характеризуется координатой $\boldsymbol{x}$ в пространстве и направлениями трех ортонормальных вектор-директоров $\boldsymbol{d}_i$, $i = 1, 2, 3$. Если $t, \boldsymbol{\xi}$ — лагранжевы координаты частицы, то поворот вектор-директоров относительно их начального положения $\boldsymbol{d}_i^0$ задается ортогональным тензором $Q(t, \boldsymbol{\xi})$, причем

$$\boldsymbol{d}_i = Q \cdot \boldsymbol{d}_i^0, \qquad QQ^* = I$$

(I — единичный тензор; Q^* — тензор, сопряженный с тензором Q). Скорость вращения вектор-директоров определяется антисимметричным тензором $\Omega(t, \boldsymbol{\xi}) = Q_t Q^*$, поскольку в эйлеровых координатах t, $\boldsymbol{x}$ справедливо равенство

$$\dot{\boldsymbol{d}}_i = \Omega(t, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{d}_i,$$

где $\dot{\boldsymbol{a}}(t, \boldsymbol{x})$ — материальная производная векторной функции $\boldsymbol{a}(t, \boldsymbol{x})$, порожденная вектором скорости $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$:

$$\dot{a}_k = \frac{\partial a_k}{\partial t} + v_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}.$$

Мгновенная угловая скорость частицы $\boldsymbol{\omega}$ связана с тензором Ω формулами

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_k \times \Omega \cdot \boldsymbol{e}_k = -\frac{1}{2} \varepsilon : \Omega, \qquad \Omega \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \quad \forall \boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{e}_k$ — произвольный ортонормированный базис; ε — тензор Леви-Чивиты третьего ранга:

$$(\varepsilon : \Omega)_j = \varepsilon_{ijk} \Omega_{ik}, \qquad \varepsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k).$$

Деформация микрополярной жидкости характеризуется двумя объективными тензорами деформаций $\nabla \boldsymbol{v} - \Omega$ и $\nabla \boldsymbol{\omega}$ (∇ — производная Фреше по пространственной переменной $\boldsymbol{x}$: $(\nabla \boldsymbol{\omega})_{ij} = \partial \omega_i / \partial x_j$). Напряженное состояние определяется тензором напряжения Коши T и тензором пар напряжений N. Особенность микрополярной жидкости состоит в том, что тензор T не является, вообще говоря, симметричным, т. е. $T^* \neq T$.

Законы сохранения импульса, момента импульса и массы несжимаемой микрополярной жидкости имеют вид [12]

$$\rho_c \dot{\boldsymbol{v}} = \operatorname{div} T + \rho_c \boldsymbol{f},$$

$$\rho_c \Theta \dot{\boldsymbol{\omega}} = \operatorname{div} N + (1/2)\varepsilon : (T^* - T) + \rho_c \boldsymbol{l},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Здесь ρ_c, Θ, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{l}$ — плотности массы, инерции, массовых сил и моментов соответственно. Будем использовать стандартные тензорные обозначения, которые имеют следующий смысл. Пусть a_i, P_{ij} — компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ и тензора второго ранга P в произвольном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_k$. Тогда

$$(P \cdot \boldsymbol{a})_i = P_{ij} a_j, \qquad (P^* \cdot \boldsymbol{a})_i = P_{ji} a_j, \qquad (\operatorname{div} P)_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}.$$

Выделим симметричную и антисимметричную части тензора деформаций $\nabla \boldsymbol{v} - \Omega$:

$$D = [\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^*]/2, \qquad R = [\nabla \boldsymbol{v} - (\nabla \boldsymbol{v})^*]/2 - \Omega.$$

Тогда определяющие уравнения микрополярной жидкости имеют вид

$$T = -pI + 2\mu_c D + \varkappa R,$$
$$N = \sigma \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \cdot I + \gamma \nabla \boldsymbol{\omega} + \tau (\nabla \boldsymbol{\omega})^*,$$

где p — давление; μ_c, $\varkappa$, σ, γ, τ — коэффициенты вязкости.

Ньютоновская жидкость описывается уравнениями

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} = \operatorname{div} T + \rho \boldsymbol{f}, \quad T = -pI + 2\mu D, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

В случае если стационарное течение обусловлено движением внутреннего цилиндра вдоль оси z со скоростью v_0 и приложенным вдоль оси z постоянным градиентом давления: $-\nabla p \cdot \boldsymbol{e}_z = p_z$, линейная и угловая скорости допускают представление

$$\boldsymbol{v} = v(r) \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega(r) \boldsymbol{e}_\varphi,$$

где $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат. В области $r_2 < r < r_3$ неизвестные функции $v(r)$ и $\omega(r)$ для микрополярной жидкости удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\mu_c + \varkappa/2}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) + \frac{\varkappa}{r} \frac{d}{dr}(r\omega) = p_z, \\ \frac{d}{dr}\Big(\frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr}(r\omega)\Big) - \varkappa \frac{dv}{dr} - 2\varkappa\omega = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

В области $r_1 < r < r_2$ скорость ньютоновской жидкости находится путем решения уравнения

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr}\Big(r \frac{dv}{dr}\Big) = p_z. \tag{2}$$

Приравнивая скорости и векторы напряжений на границе раздела, получаем краевые условия

$$v\big|_{r_2+} = v\big|_{r_2-}, \qquad \Big[\Big(\mu_c + \frac{\varkappa}{2}\Big)\frac{dv}{dr} + \varkappa\omega\Big]_{r_2+} = \mu \frac{dv}{dr}\Big|_{r_2-}. \tag{3}$$

Учитывая условие проскальзывания $\boldsymbol{\omega} = \alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{v}/2$ на внешней границе микрополярной жидкости [9], имеем следующие краевые условия:

$$\Big(\omega + \frac{\alpha}{2} \frac{dv}{dr}\Big)_{r_2+, r_3-} = 0. \tag{4}$$

Наконец, скорость удовлетворяет условиям прилипания на твердых границах

$$v(r_1) = v_0, \qquad v(r_3) = 0. \tag{5}$$

Для построения решения задачи (1)–(5) перейдем к безразмерным переменным (отмеченным знаком “$\sim$”), выбирая в качестве характерной скорости величину V:

$$r = \tilde{r} r_1, \quad v = \tilde{v} V, \quad \omega = \frac{\tilde{\omega} V}{r_1}, \quad v_0 = \tilde{v}_0 V, \quad R_i = \frac{r_i}{r_1}, \quad V_0 = \frac{v_0}{V}.$$

При этом получаем краевую задачу (здесь и далее знак “$\sim$” над безразмерными переменными опускается)

$$1 \leqslant r \leqslant R_2: \qquad \frac{a_1}{r} \frac{d}{dr}\Big(r \frac{dv}{dr}\Big) = -1;$$

$$R_2 \leqslant r \leqslant R_3: \qquad \frac{a_2}{r} \frac{d}{dr}\Big(r \frac{dv}{dr}\Big) + \frac{a_3}{r} \frac{d}{dr}(r\omega) = -1, \quad \frac{d}{dr}\Big(\frac{a_4}{r} \frac{d}{dr}(r\omega)\Big) - \frac{dv}{dr} - 2\omega = 0; \tag{6}$$

$$v(1) = V_0, \quad v(R_3) = 0, \quad v\big|_{R_2-} = v\big|_{R_2+}, \quad a_1 \frac{dv}{dr}\Big|_{R_2-} = \Big(a_2 \frac{dv}{dr} + a_3\omega\Big)_{R_2+},$$
$$\Big(\omega + \frac{\alpha}{2} \frac{dv}{dr}\Big)\Big|_{R_2+, R_3-} = 0 \tag{7}$$

с безразмерными коэффициентами

$$a_1 = \frac{\mu V}{|\nabla p| r_1^2}, \quad a_2 = \frac{(\mu_c + \varkappa/2)V}{|\nabla p| r_1^2}, \quad a_3 = \frac{\varkappa V}{|\nabla p| r_1^2}, \quad a_4 = \frac{\gamma}{\varkappa r_1^2}.$$

Построение решения. В результате интегрирования первого уравнения системы (6) имеем представление для производной $v'(r)$

$$a_2 \frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2} - a_3\omega + \frac{C_3}{r}, \qquad C_3 = \mathrm{const}\,.$$

Подставляя это представление во второе уравнение системы (6), получаем следующее уравнение для $\omega(r)$:

$$r^2\omega'' + r\omega' - \omega(k^2r^2 + 1) + f(r) = 0, \quad f = \frac{r(r^2 - 2C_3)}{2a_2a_4}, \quad k^2 = \frac{4\mu_c\varkappa r_1^2}{\gamma(2\mu_c + \varkappa)}. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\tilde{\omega} = \frac{r^2 - 2C_3}{2k^2a_2a_4r}$$

является частным решением уравнения (8). Пусть $\omega_0(r)$ — общее решение однородного уравнения (8). Тогда функция $u(x) = \omega_0(ix/k)$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2u'' + xu' + u(x^2 - 1) = 0.$$

Поэтому общее решение уравнения (8) имеет вид

$$\omega = C_1J_1(kr/i) + C_2N_1(kr/i) + \tilde{\omega}(r),$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя; $N_1(x)$ — функция Неймана (второе линейно независимое решение уравнения Бесселя); C_i — константы, определяемые из краевых условий.

Так как

$$J_1(z) = -\frac{d}{dz} J_0(z), \qquad N_1(z) = -\frac{d}{dz} N_0(z),$$

то для скорости микрополярной жидкости справедливо представление

$$a_2v(r) = -\Big(\frac{a_3}{k^2a_2a_4} + 1\Big)\Big(\frac{r^2}{4} - C_3 \ln r\Big) + a_3\Big[\frac{iC_1}{k} J_0\Big(\frac{kr}{i}\Big) + \frac{iC_2}{k} N_0\Big(\frac{kr}{i}\Big)\Big] + C_4.$$

Скорость ньютоновской жидкости определяется формулой

$$a_1 v = -r^2/4 + B_1 \ln r + B_2 \tag{9}$$

с неизвестными константами B_j.

Шесть констант интегрирования C_k, B_j находятся из шести краевых условий (7). Для вычисления этих констант запишем решение уравнений микрополярной жидкости в виде

$$v(r) = C_1 v_1(r) + C_2 v_2(r) + C_3 v_3(r) + v_4(r) + C_4/a_2,$$
$$\omega(r) = C_1 \omega_1(r) + C_2 \omega_2(r) + C_3 \omega_3(r) + \omega_4(r).$$

Выражение для скорости ньютоновской жидкости можно представить в виде

$$v(r) = B_1 u_1(r) + u_2(r) + B_2/a_1,$$

где

$$v_1 = \frac{a_3 i}{a_2 k} J_0\Big(\frac{kr}{i}\Big), \quad v_2 = \frac{a_3 i}{a_2 k} N_0\Big(\frac{kr}{i}\Big), \quad v_3 = \Big(1 + \frac{a_3}{k^2 a_2 a_4}\Big)\frac{\ln r}{a_2},$$
$$v_4 = -\Big(1 + \frac{a_3}{k^2 a_2 a_4}\Big)\frac{r^2}{4a_2}, \quad \omega_1 = J_1\Big(\frac{kr}{i}\Big), \quad \omega_2 = N_1\Big(\frac{kr}{i}\Big),$$
$$\omega_3 = -\frac{1}{k^2 a_2 a_4 r}, \quad \omega_4 = \frac{r}{2k^2 a_2 a_4}, \quad u_1 = \frac{\ln r}{a_1}, \quad u_2 = -\frac{r^2}{4a_1}.$$

В терминах этих функций краевые условия (7) имеют вид

$$\begin{gathered} B_1 u_1(R_2) + B_2/a_1 + u_2(R_2) = C_1 v_1(R_2) + C_2 v_2(R_2) + C_3 v_3(R_2) + C_4/a_2 + v_4(R_2), \\ C_3 = B_1, \quad C_1\omega_1(R_2) + C_2\omega_2(R_2) - \eta C_3\omega_3(R_2) - \eta\omega_4(R_2) = 0, \\ C_1\omega_1(R_3) + C_2\omega_2(R_3) - \eta C_3\omega_3(R_3) - \eta\omega_4(R_3) = 0, \qquad B_2 = a_1 V_0 + 1/4, \\ C_4/a_2 = -C_1 v_1(R_3) - C_2 v_2(R_3) - C_3 v_3(R_3) - v_4(R_3), \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\eta = \frac{\alpha a_2 k^2 a_4}{2a_2 - a_3\alpha} - 1.$$

Введем обозначение $f\big|_j^i = f(R_i) - f(R_j)$. Решая систему (10), находим

$$B_1 = -\frac{V_0 + u_2|_1^2 + v_4|_2^3 - \eta B_{11}}{u_1|_1^2 + v_3|_2^3 + \eta B_{12}},$$
$$C_1 = \eta\,\frac{(\omega_4/\omega_2)|_3^2 + B_1(\omega_3/\omega_2)|_3^2}{(\omega_1/\omega_2)|_3^2}, \qquad C_2 = \eta\,\frac{(\omega_4/\omega_1)|_3^2 + B_1(\omega_3/\omega_1)|_3^2}{(\omega_2/\omega_1)|_3^2},$$

где

$$B_{11} = \frac{(\omega_4/\omega_2)|_3^2 v_1|_3^2}{(\omega_1/\omega_2)|_3^2} + \frac{(\omega_4/\omega_1)|_3^2 v_2|_3^2}{(\omega_2/\omega_1)|_3^2}, \qquad B_{12} = \frac{(\omega_3/\omega_2)|_3^2 v_1|_2^3}{(\omega_1/\omega_2)|_3^2} + \frac{(\omega_3/\omega_1)|_3^2 v_2|_2^3}{(\omega_2/\omega_1)|_3^2}.$$

Условие проскальзывания. Вычислим главную часть скорости на границе раздела жидкостей, считая, что толщина слоя микрополярной жидкости мала. При фиксированном значении R_3 функция $v(r)$ задается формулой (9), в которой ее зависимость от переменных R_2 и R_3 указана явно. Поэтому справедливо равенство

$$v(R_2) = v(R_3) + \frac{\partial v}{\partial R_2}(R_2)(R_2 - R_3) + o(R_2 - R_3).$$

При найденных значениях констант B_k и $R_2 = R_3$ справедливо равенство $v = 0$, поэтому формулу (9) можно записать в виде

$$v(R_2) = V_0 + \frac{1 - R_2^2}{4a_1} + \frac{a(R_2)}{b(R_2)}\,\frac{\ln R_2}{a_1},$$

где

$$a = -V_0 + \eta B_{11} + \frac{R_2^2 - 1}{4a_1} - \Big(\frac{a_3}{k^2 a_2 a_4} + 1\Big)\frac{R_2^2 - R_3^2}{4a_2},$$

$$b = \eta B_{12} + \frac{\ln R_2}{a_1} - \Big(\frac{a_3}{k^2 a_2 a_4} + 1\Big)\frac{\ln{(R_3/R_2)}}{a_2}.$$

Нетрудно проверить равенства

$$\lim_{R_2\to R_3}\frac{B_{11}}{R_2 - R_3} = \frac{\partial B_{11}}{\partial R_2}\Big|_{R_2=R_3} = \frac{v_1'(\omega_4/\omega_2)'}{(\omega_1/\omega_2)'} + \frac{v_2'(\omega_4/\omega_1)'}{(\omega_2/\omega_1)'}\Big|_{r=R_3} = -\frac{ra_3}{2k^2 a_2^2 a_4}\Big|_{r=R_3},$$

$$\lim_{R_2\to R_3}\frac{B_{12}}{R_2 - R_3} = \frac{\partial B_{12}}{\partial R_2}\Big|_{R_2=R_3} = \frac{v_1'(\omega_3/\omega_2)'}{(\omega_1/\omega_2)'} + \frac{v_2'(\omega_3/\omega_1)'}{(\omega_2/\omega_1)'}\Big|_{r=R_3} = -\frac{a_3}{rk^2 a_2^2 a_4}\Big|_{r=R_3}.$$

Введем обозначение $h = R_2 - R_3$ и рассмотрим B_1 как функцию h. Разложим B_1 в ряд Тейлора в точке $h = 0$:

$$B_1(h) = B_1(0) + B_1'(0)h + o(h^2). \qquad (11)$$

Из определения константы B_1 следует, что

$$B_1(0) = \frac{R_2^2 - 4a_1V_0 - 1}{4\ln R_2}. \qquad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (9), получаем

$$v(R_2) = B_1'(0)h\,\frac{\ln R_2}{a_1} + o(h).$$

Вычисляя $B_1'(0)$, находим

$$B_1'(0) = -a_1^2\xi\,\frac{V_0 + (R_2^2\ln R_2 - (R_2^2 - 1)/2)/(2a_1)}{R_2\ln^2 R_2}, \qquad \xi \equiv \frac{1}{a_2} + (\eta + 1)\,\frac{a_3}{k^2 a_2^2 a_4}.$$

Таким образом, с точностью до члена $o(h)$ получаем условие проскальзывания

$$v(R_2) = -a_1\xi\,\frac{V_0 + (R_2^2\ln R_2 - (R_2^2 - 1)/2)/(2a_1)}{R_2\ln R_2}\,h, \qquad h = R_2 - R_3.$$

В размерных переменных для скорости проскальзывания имеем формулу

$$v_s = \Big(v_0\,\frac{2\mu F_1(r_2/r_1)}{r_1[2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa]} - p_z\,\frac{r_1F_2(r_2/r_1)}{2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa}\Big)\theta, \qquad \theta = r_3 - r_2, \qquad (13)$$

где

$$F_1(\eta) = \frac{1}{\eta\ln\eta}, \qquad F_2(\eta) = \frac{\eta^2\ln\eta^2 - \eta^2 + 1}{\eta\ln\eta}.$$

Полученную формулу можно использовать вместо условия прилипания, если на границе имеется слой микрополярной жидкости.

Аналогично устанавливается, что в случае горизонтального течения слоя вязкой жидкости высотой H над слоем микрополярной жидкости высотой θ скорость проскальзывания определяется формулой

$$v_s = \theta(\beta_1 v_0 - \beta_2 p_z), \tag{14}$$

где

$$\beta_1 = \frac{2\mu}{[2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa]H}, \qquad \beta_2 = \frac{H}{2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa},$$

v_0 имеет смысл скорости "крышки", прилипшей к слою вязкой жидкости. Формулу (14) можно также получить из (13) путем предельного перехода $r_1 \to \infty$, когда $r_3 - r_2 = h$ и $r_2 - r_1 = H$.

Применение условия проскальзывания в задаче о бурении скважин. Пусть задан расход вязкой жидкости между цилиндрами

$$Q = \int\limits_{r_1<r<r_2} v\,dx\,dy = 2\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} vr\,dr$$

в случае, когда внутренний цилиндр радиусом r_1 покоится, т. е. $v_0 = 0$, а на внешнем цилиндре радиусом r_2 выполнено краевое условие проскальзывания. Поле скорости определяется формулой

$$v = \frac{p_z r^2}{4\mu} + d_1 \ln\frac{r}{r_1} + d_2, \quad d_1 = -\frac{v_s - p_z(r_2^2 - r_1^2)/(4\mu)}{\ln(r_2/r_1)}, \quad d_2 = -\frac{p_z r_1^2}{4\mu},$$

поэтому

$$Q = -p_z\,\frac{\pi r_1^4 F_3(\eta)}{\mu} + v_s \pi r_1^2 F_4(\eta), \qquad \eta = \frac{r_2}{r_1}.$$

Здесь неотрицательные при $\eta > 1$ функции $F_3(\eta)$ и $F_4(\eta)$ заданы формулами

$$F_3(\eta) = \frac{(\eta^2\ln\eta^2 - \eta^2 + 1)(\eta^2 - 1)}{4\ln\eta^2} + \frac{\eta^2 - 1}{4} - \frac{\eta^4 - 1}{8}, \quad F_4(\eta) = \frac{\eta^2\ln\eta^2 - \eta^2 + 1}{\ln\eta^2}.$$

Учитывая условие проскальзывания (13), получаем следующее представление для безразмерного расхода:

$$\frac{\mu Q}{\pi r_1^4 |p_z|} = F_3(\eta) + \theta\,\frac{\mu F_2(\eta)F_4(\eta)}{r_1[2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa]}, \qquad \eta = \frac{r_2}{r_1}. \tag{15}$$

При $\theta = 0$ формула (15) соответствует условию прилипания. В задачах о бурении скважин при наличии глинистой корки толщиной θ использование условия проскальзывания приводит к более существенному росту расхода с увеличением осевого градиента давления, чем в случае использования условия прилипания, которое обычно принимается в расчетах [13].

В инженерных расчетах формулы типа (15) применяются для вычисления давления в скважине при заданном расходе бурового раствора. Пусть p, p_0 — давления, соответствующие одному и тому же расходу на одной и той же глубине, но вычисленные с использованием условия проскальзывания и условия прилипания соответственно. При $r_1 = 5$ см, $r_2 = 10$ см, $\theta = 0{,}5$ см, $\mu/[2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa] = 0{,}1$ получаем $p/p_0 = 0{,}95$, т. е. различие значений p и p_0 составляет 5 %. Если $\mu/[2\mu_c + (1-\alpha)\varkappa] = 0{,}01$, то $p/p_0 = 0{,}99$, т. е. различие составляет 1 %. Таким образом, даже если глинистая корка характеризуется большими вязкостями, различие давлений на больших глубинах может быть существенным. В зависимости от свойств породы применяются различные буровые растворы, поэтому при разных глубинах скважины и давлениях соответствующие глинистые корки могут иметь различные вязкости, которые необходимо оценить для более точного прогнозирования давления в скважине при бурении.

Закон проскальзывания применяется также в нестационарных задачах при выводе уравнения роста глинистой корки

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Lambda q - V_w, \qquad (16)$$

которое используется при гидродинамическом анализе прискважинной зоны в процессе бурения [14]. В (16) q — объемный расход жидкости в пласте; V_w — интенсивность смыва; Λ — безразмерный коэффициент скорости роста глинистой корки. Оценки показывают, что $\Lambda \sim 10^{-3}$ [15]. В случае если интенсивность смыва пропорциональна абсолютной величине скорости проскальзывания: $V_w = \lambda_w v_s$, получаем формулу

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Lambda q - \frac{\lambda_w \tau_s \theta}{\mu_c + (1-\alpha)\varkappa/2}, \quad \tau_s \equiv \frac{|p_z| r_1 F_2(\eta)}{2}, \quad \eta = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (17)$$

Константа τ_s имеет смысл напряжения сдвига на стенке корки; λ_w — безразмерный коэффициент смыва, определяемый в экспериментах. Ранее закон роста глинистой корки исследовался для случая, когда она считалась не деформируемой вдоль оси течения, а в формуле (16) интенсивность полагалась постоянной и пропорциональной некоторому напряжению сдвига τ_0 на корке: $V_w \sim \tau_0$ [5]. Область применимости формулы (16) с условием $V_w \sim \tau_0 = \mathrm{const}$ ограничена малыми временами, поскольку с увеличением времени, когда фильтрация в пласт практически прекращается, решение уравнения (16) принимает отрицательные значения. Формула (17) лишена этого недостатка: если в некоторый момент времени утечка в пласт прекращается, т. е. $q = 0$, то толщина корки убывает экспоненциально, оставаясь всегда положительной.

Заключение. Для уравнений вязкой жидкости сформулированы новые краевые условия проскальзывания для случая, когда на границе с твердым телом имеется тонкий слой гранулированной жидкости. В задачах о бурении скважин роль такого слоя играет глинистая корка, возникающая на стенке скважины при фильтрации бурового раствора в пласт. Математической моделью указанного слоя является модель микрополярной жидкости, что позволяет рассматривать совместное течение вязкой и микрополярной жидкостей между двумя соосными цилиндрами. При этом вязкая жидкость примыкает к внутреннему цилиндру, а микрополярная — к внешнему. В предположении, что толщина слоя микрополярной жидкости мала, получено представление для скорости на границе раздела жидкостей, линейно зависящее от толщины слоя микрополярной жидкости. Из этого представления следует закон проскальзывания. Определено влияние условия проскальзывания на зависимость между расходом и градиентом давления. Кроме того, на основе условия проскальзывания предложен новый закон нарастания глинистой корки на стенке скважины. В отличие от известных уравнений динамики корки сформулированный закон применим и при больших временах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Navier C. L. M. H.** Sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps elastiques // Mem. Acad. Sci. Inst. France. 1827. V. 7. P. 375–393.
2. **Lions J. L.** Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod-Gauthier-Villars, 1969.
3. **Qian T. Z., Wang X. P., Sheng P.** Molecula scale contact line hydrodynamics of immiscible fluids // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. 016306.

4. **Stamatakis K., Tien C.** Cake formation and growth in cake filtration // Chem. Engng Sci. 1991. V. 46, N 8. P. 1917–1933.
5. **Tien C.** Introduction to cake filtration. Amsterdam: Elsevier, 2006.
6. **Shelukhin V. V., Růžička M.** On Cosserat — Bingham fluids // Z. angew. Math. Mech. 2013. Bd 93, N 1. S. 57–72.
7. **Шелухин В. В., Черных М. А.** Об одном экстремальном свойстве течения Пуазейля между двумя соосными цилиндрами // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 131–142.
8. **Eckart W., Ruzicka M.** Modeling micropolar electrorheological fluids // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2006. V. 11, N 4. P. 813–844.
9. **Мигун Н. П.** Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости / Н. П. Мигун, П. П. Прохоренко. Минск: Наука и техника, 1984.
10. **Cosserat E.** Theorie des corps deformable / E. Cosserat, F. Cosserat. Paris: Hermann et Fils, 1909.
11. **Eringen A. C.** Simple microfluids // Intern. J. Engng Sci. 1964. V. 2. P. 205–217.
12. **Eringen A. C.** Theory of micropolar fluids // J. Math. Mech. 1966. V. 16, N 1. P. 909–923.
13. **Wachs A.** Numerical simulation of steady Bingham flow through an eccentric annular cross-section by distributed Lagrange multiplier/fictitious domain and augmented Lagrangian methods // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. V. 142. P. 183–198.
14. **Devan J. T., Chenevert M. E.** A model for filtration of water-based mud drilling: determination of mudcake parameters // SPWLA. Petrophysica. 2001. V. 42, N 3. P. 237–250.
15. **Shelukhin V. V.** Invasion around a horizontal wellbore // Eur. J. Appl. Math. 2008. V. 19. P. 41–60.

Поступила в редакцию 26/XII 2012 г.,
в окончательном варианте — 7/III 2013 г.