течения даны в [9]. Следует отметить, что область возвратных токов всегда существует в течении перед уступом, речь идет о возможном увеличении размеров такой области на масштабы, сравнимые с длиной области взаимодействия. Увеличение высоты уступа будет приводить к росту размеров области отрыва и перемещению точки отрыва вверх по потоку.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чжен П.** Отрывные течения.— М.: Мир, 1973.— Т. 1—3.
2. **Мышенков В. И.** Численное решение уравнений Навье — Стокса для задачи обтекания прямоугольника потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 4.
3. **Сычев В. В., Рубан А. И.** Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики.— 1979.— Т. 2, вып. 4.
4. **Нейланд В. Я.** Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики.— 1981.— Т. 4, вып. 2.
5. **Stewartson K.** Some recent studies in triple deck // Numerical and physical aspects of aerodynamic flows.— N. Y.; Berlin: Springer-Verlag, 1982.— N 4.
6. **Боголепов В. В.** Расчет обтекания, обращенного навстречу потоку малого уступа // ПМТФ.— 1983.— № 2.
7. **Нейланд В. Я., Сычев В. В.** К теории течений в стационарных срывных зонах // Учен. зап. ЦАГИ.— 1970.— Т. 1, № 1.
8. **Боголепов В. В., Нейланд В. Я.** Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ.— 1971.— Вып. 1363.
9. **Липатов И. И., Нейланд В. Я.** Влияние внезапного изменения движения поверхности пластины на течение в ламинарном пограничном слое в сверхзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ.— 1982.— Т. 13, № 5.

Поступила 18/X 1986 г.

УДК 532.5

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С РАЗРЫВАМИ ВИХРЯ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

В гидродинамике идеальной жидкости широко используются решения с разрывами завихренности. Они возникают, например, в задачах склейки потенциальных и вихревых течений [1]. В настоящей работе рассматривается задача устойчивости таких течений в плоской постановке. Получен интеграл линеаризованных уравнений движения, представляющий собой квадратичную форму полей возмущений скорости, вихря и нормального смещения поверхности разрыва. Условия положительной определенности этой формы приводят к достаточным условиям устойчивости в среднеквадратическом, обобщающим известные [2—4] для течений с непрерывной завихренностью. Приведены примеры устойчивых течений, включающие потоки в криволинейной щели, плоскопараллельные и круговые течения. При кусочно-постоянной завихренности для течений последних двух типов даны условия нелинейной устойчивости.

1. Основное течение и класс возмущений. Изучаются плоские движения идеальной несжимаемой однородной по плотности жидкости в области τ с неподвижной непроницаемой границей $\partial\tau$. Результаты справедливы для областей τ достаточно общего вида, однако для определенности речь пойдет о криволинейном кольце (замкнутой щели), граница которого составлена из замкнутых контуров R_+ и R_-. В декартовых координатах x, y задано стационарное течение с полями x-, y-компонент скорости, функцией тока, вихрем и давлением:

$$U(\mathbf{x}),\ V(\mathbf{x}),\ \Psi(\mathbf{x}),\ \Omega(\mathbf{x}),\ P(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \equiv (x,\ y),\ U = -\Psi_y,\quad V = \Psi_x,\ \Omega \equiv V_x - U_y. \tag{1.1}$$

Индексами из независимых переменных обозначаются частные производные. Предполагается, что U и V непрерывны, а их первые и вторые производные непрерывны почти везде в τ, за исключением фиксированных кривых R, на которых Ω имеет конечные разрывы. Для определенности исследуется течение с замкнутыми линиями тока $\Psi = \mathrm{const}$, каждая из которых охватывает внутреннюю границу кольца. Единственная замкнутая линия разрыва R является одной из линий $\Psi = \text{const}$ и разделяет τ на два кольца: τ_+ и τ_-. Знаком плюс отмечена та область, которая остается слева при движении вдоль R по направлению вектора скорости. Наложение возмущений переводит поле скорости $\mathbf{U} = (U, V)$, давления P, области $\tau_\pm$ и их границу контакта R в $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*)$, p^*, $\overset{*}{\tau}_+$ и R^*. Рассмотрение вопросов устойчивости проводится способом, заимствованным из задач о движении двухслойной жидкости: вводятся отдельные решения в областях $\overset{*}{\tau}_\pm$ и условия их согласования на линии контакта R^*. В соответствии с этим поля (1.1) и $\mathbf{u}^*$, p^* задаются отдельно в τ_+, τ_- и $\overset{*}{\tau}_+$, $\overset{*}{\tau}_-$, что и подразумевается без явного введения $U_\pm$, $\overset{*}{u}_+$ и т. д.

В τ_+ функции (1.1) удовлетворяют уравнениям

$$\Omega V = H_x,\ \Omega U = -H_y,\ U_x + V_y = 0,$$
$$H \equiv P + Q^2/2,\ Q^2 \equiv U^2 + V^2, \tag{1.2}$$

из которых вытекает наличие функциональных связей $\Omega = \Omega(\Psi)$. На $R_\pm$ выполняются условия непротекания

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{1.3}$$

($\mathbf{n}$ — нормаль к $\partial\tau$). Используя квадратные скобки для обозначения разрыва на R гидродинамических полей, запишем

$$[U] = [V] = [P] = [\nabla P] = [\Psi] = 0,$$
$$[\Omega] \equiv \Omega_+ - \Omega_- \neq 0,\ [\Omega'] \neq 0,\ \Omega' \equiv d\Omega/d\Psi. \tag{1.4}$$

Класс возмущений, в котором изучается задача устойчивости, выбирается исходя из тех же требований гладкости, которым удовлетворяет основной поток (1.1). Считается, что поля полной скорости $\mathbf{u}^*$ непрерывны и имеют первые и вторые непрерывные производные в $\overset{*}{\tau}_\pm$. На движущихся кривых R^* требуется только непрерывность поля $\mathbf{u}^*$. Тем самым подразумевается, что если начальные данные для скорости $\mathbf{u}^*$ выбрать непрерывными, то и в любой момент времени контактных разрывов не будет [5]. Требование непрерывности обеих компонент скорости на R^* несколько сильнее, чем кинематическое и динамическое условия: оно совпадает с ними на рассматриваемом классе непрерывных полей $\mathbf{u}^*$. Таким образом, принимается

$$[u^*]^* = [v^*]^* = 0, \tag{1.5}$$

где звездочка за скобкой указывает, что разрыв вычисляется на R^*.

2. Лагранжевы смещения и процедура линеаризации. Линеаризация в задачах с неизвестной движущейся границей R^* часто проводится в эйлеровых координатах со «снесением» граничных условий с R^* на R. При этом возникают трудности как в трактовке самих полей эйлеровых возмущений в областях между R^* и R, так и в интерпретации процедуры «снесения». Здесь излагается метод линеаризации [6], свободный от этих трудностей. Его суть состоит в рассмотрении лагранжева описания возмущенного движения с последующей заменой лагранжевых координат на эйлеровы координаты жидких частиц в невозмущенном движении.

Рассмотрим отдельно жидкость, занимающую область τ_+, $\overset{*}{\tau}_+$. Пусть невозмущенное движение (1.1) жидких частиц описывается связью эйлеровых $\mathbf{x}$ и лагранжевых $\mathbf{a}$ координат:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t),\ \mathbf{a} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, 0),\ \mathbf{U}(\mathbf{a}, t) \equiv \partial\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)/\partial t \tag{2.1}$$

(как $\mathbf{x}$, так и $\mathbf{a}$ определены в τ_+). После наложения возмущений та же жидкость занимает другую область $\overset{*}{\tau}_+$, а ее движение описывается другими функциями тех же переменных $\mathbf{a}$, t:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(a, t),\ \mathbf{u}^* \equiv \partial\mathbf{x}^*(a, t)/\partial t, \tag{2.2}$$

в которых $\mathbf{x}^*$ определена в $\overset{*}{\tau}_+$. Зависимость $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ от одной и той же лагранжевой координаты $\mathbf{a}$ означает установление соответствия между жидкими частицами в движениях (2.1) и (2.2). Как $\mathbf{x}^*(\mathbf{a}, t)$, так и $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 x_m^*}{\partial t^2}\frac{\partial x_m^*}{\partial a_k} = -\frac{\partial p^*}{\partial a_k}, \quad \det\left\|\frac{\partial x_i^*}{\partial a_k}\right\| = 1. \tag{2.3}$$

Для краткости записи в качестве синонимов используются обозначения $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$, $(U_1, U_2) \equiv (U, V)$ и т. д. По повторяющимся векторным индексам везде подразумевается суммирование. Играющее далее основную роль поле лагранжевых смещений ξ определяется как

$$\xi(\mathbf{a}, t) \equiv \mathbf{x}^*(\mathbf{a}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{a}, t). \tag{2.4}$$

Теперь, пользуясь обратной (2.1) функцией $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, соотношения (2.2)—(2.4) перепишем в терминах независимых переменных $\mathbf{x}$, t. Из (2.4) получается связь $\mathbf{x}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}, t)$, которая означает, что частица в основном потоке с эйлеровой координатой $\mathbf{x}$ из τ_+ имеет в возмущенном течении координату $\mathbf{x}^*$ из $\overset{*}{\tau}_+$. Из определения скорости (2.2) вытекает

$$D\,[\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t), \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \tag{2.5}$$

$$D\xi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x} + \xi, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \equiv \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

где $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ есть лагранжево приращение скорости, т. е. разность скоростей одной и той же жидкой частицы в возмущенном и невозмущенном движениях. Замена переменных в (2.3) дает уравнения

$$D^2\xi_i + \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}(A_k + D\xi_k) = -\frac{\partial\delta p}{\partial x_i}, \quad \det\left\|\delta_{ik} + \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\right\| = 1, \tag{2.6}$$

в которых $\delta p(x, t)$ есть лагранжево приращение давления такое, что $p^*(x^*, t) \equiv P(x, t) + \delta p(x, t)$; δ_{ik} — единичная матрица; $A_k = U_m\partial U_k/\partial x_m = -\partial P/\partial x_k$. Уравнения (2.6) необходимо дополнить граничными условиями непротекания на $\partial\tau$ и условиями согласования (1.5) с аналогичными решениями из τ_-. Выбирая точку $\mathbf{x}$ на R, условие (1.5) с помощью (2.5) запишем в виде равенств

$$[\mathbf{u}^*(\mathbf{x} + \xi, t)]^* = [\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = D[\xi(\mathbf{x}, t)] = 0, \tag{2.7}$$

интегрирование последнего из которых и использование произвола в выборе лагранжевых координат с двух сторон R дают

$$[\xi] = [\eta] = 0, \ \xi = (\xi, \eta) \equiv (\xi_1, \xi_2). \tag{2.8}$$

Теперь, после задания начальных данных для определения функций $\xi_\pm(\mathbf{x}, t)$ имеется начально-краевая задача в областях с фиксированными границами $R_\pm$, R.

Линеаризованный вариант этой задачи выглядит так. Решаются уравнения

$$D^2\xi_i + A_k\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial\delta p}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\xi_k}{\partial x_k} = 0 \tag{2.9}$$

с граничными условиями

$$\xi\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{2.10}$$

на $\partial\tau$ и условием согласования (2.8) на R.

Задаче (2.8)—(2.10) может быть придана форма, совпадающая с линеаризованной эйлеровой постановкой. Для этого вводятся новые поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$, определениями которых являются равенства

$$\delta\mathbf{u} = D\xi \equiv \mathbf{u} + (\xi\nabla)\mathbf{U}, \quad \delta p \equiv p + (\xi\nabla)P. \tag{2.11}$$

Подстановка (2.11) в (2.9) приводит к уравнениям

$$Du + U_x u + U_y v = -p_x,\ Dv + V_x u + V_y v = -p_y,\quad u_x + v_y = 0,\ \mathbf{u} = (u,\ v). \tag{2.12}$$

Исключение из (2.12) p и использование (1.2) дают уравнение для $\omega \equiv v_x - u_y$:

$$D\omega + \Omega_x u + \Omega_y v = 0. \tag{2.13}$$

Из (1.3), (2.10), (2.11) вытекает граничное условие на $\partial\tau$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{2.14}$$

Следствием (2.7) будут условия на R:

$$[\mathbf{u} + (\xi\nabla)\mathbf{U}] = 0. \tag{2.15}$$

Удобно ввести единичные нормальный $\boldsymbol{\nu}$ и касательный $\boldsymbol{\sigma}$ векторы к линии тока течения (1.1) и лагранжево смещение N по нормали к ней:

$$Q\boldsymbol{\nu} = (-V,\ U),\ Q\boldsymbol{\sigma} = (U,\ V),\ N \equiv \xi\cdot\boldsymbol{\nu}. \tag{2.16}$$

Из (1.4), (2.8), (2.15) вытекают связи на R:

$$[\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}] = [p] = 0,\ [\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}] = N[\Omega]. \tag{2.17}$$

Так же просто проверяется равенство $D(V\xi - U\eta) = Vu - Uv$, которое переписывается в виде

$$D(QN) = Q\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} \tag{2.18}$$

и имеет смысл линеаризованного кинематического условия.

Таким образом, в обозначениях (2.11) задача описания малых возмущений состоит в решении уравнений (2.12) в фиксированных областях $\tau_\pm$ с граничными условиями (2.17), (2.18) на $R_\pm$, R. В этой форме записи лагранжевы смещения в явном виде присутствуют только через N на R. Уравнения (2.12) по форме совпадают с линеаризованными уравнениями для эйлеровых возмущений, а соотношение (2.15) — с получаемым уже упоминавшейся выше процедурой «снесения» условий (1.5) с R^* на R. Отметим, что поля $\mathbf{u}, p$—действительно эйлеровы возмущения в тех точках $\mathbf{x}$, где само понятие эйлеровых возмущений имеет смысл. Для пояснения достаточно записать определение эйлеровых возмущений скорости как разности скоростей возмущенного и основного течений в одной и той же точке $\mathbf{x}^*$ из $\overset{*}{\tau}_+$:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}^*,\ t) \equiv \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*,\ t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}^*) = \delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t) + \mathbf{U}(\mathbf{x},\ t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}^*, t), \tag{2.19}$$

где использованы $\delta\mathbf{u}$ (2.5) и $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \xi$. Запись (2.19) основана на предположении, что точка $\mathbf{x}^*$ принадлежит τ_+. В этом случае разложение функций $\mathbf{U}(\mathbf{x} + \xi,\ t)$, $\mathbf{u}'(\mathbf{x} + \xi,\ t)$ в ряды вблизи точки $\mathbf{x}$ и последующая линеаризация приводят к соотношению $\mathbf{u}' \equiv \delta\mathbf{u} - (\xi\nabla)\mathbf{U}$, из сравнения которого с (2.11) вытекает $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$. Если же точка $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \xi$ находится вне τ_+, то $\mathbf{u}$, p нельзя трактовать как эйлеровы возмущения, их интерпретация вытекает из определений (2.11). В частности, по этой причине разрыв касательной составляющей $\mathbf{u}$ на R (2.17) не будет разрывом возмущений поля скорости.

Как уже говорилось, задачи типа сформулированной для полей $\mathbf{u}$, p обычно получаются непосредственно линеаризацией в эйлеровых координатах [7, 8]. Необходимость обращения к определениям (2.11) возникает лишь при детальном анализе смысла полей $\mathbf{u}$, p и соотношений, которым они удовлетворяют. Поэтому задача (2.12), (2.14), (2.17), (2.18) далее рассматривается как самостоятельная, а поля $\mathbf{u}$, p, ω называются возмущениями скорости, давления и вихря.

3. Интеграл линейной задачи. Следствием (1.2), (2.12), (2.13) является дивергентное соотношение

$$DE/2 + (up + vA + U\varepsilon)_x + (vp - uA + V\varepsilon)_y = 0, \tag{3.1}$$
$$E \equiv u^2 + v^2 + d\Psi\omega^2/d\Omega, \; A \equiv Vu - Uv, \; \varepsilon \equiv (u^2 + v^2)/2,$$

при получении которого предполагается $\Omega' \neq 0$. Если в (1.4) принять $[\Omega] = [\Omega'] = 0$, то из (1.3), (2.14), (3.1) вытекает сохранение функционала

$$\int\limits_{\tau} Edxdy = \text{const}. \tag{3.2}$$

Этот результат есть переформулировка содержащегося в [2—4]. Если выполняется обобщающее известный критерий Рэлея о точке перегиба условие $\Omega' \neq 0$ в τ, то (3.2) дает устойчивость течения в среднеквадратическом. Обобщение интеграла (3.2) для задачи с разрывами Ω и Ω' имеет вид

$$I \equiv \int\limits_{\tau} Edxdy - [\Omega] \int\limits_{R} QN^2 dl = \text{const}, \tag{3.3}$$

где под интегралом по τ подразумевается сумма интегралов по τ_+ и τ_-; положительное направление обхода по R выбрано по вектору $\mathbf{U}$ на R. Доказательство (3.3) проводится прямым вычислением производной dI/dt с использованием (1.3), (2.14), (2.17), (2.18), (3.1).

Для важного класса течений с кусочно-постоянной завихренностью $\Omega' \equiv 0$, поэтому E в (3.1), (3.3) теряет смысл. В этом случае интеграл линейной задачи может быть получен ценой сужения класса возмущений.

Уравнение на вихрь (2.13) с использованием (2.11) приводится к форме $D(\omega + \xi\Omega_x + \eta\Omega_y) = 0$. Если в начальный момент времени выбрать

$$\omega = -\xi\Omega_x - \eta\Omega_y = \Omega' QN, \tag{3.4}$$

то это же равенство будет выполнено при всех t. Функция N в (3.4) есть лагранжево смещение (2.16), нормальное к любой линии тока течения (1.1), а не только к R. Равенство (3.4) означает ограничение класса возмущений так называемыми «равнозавихренными» [4], характеризующимися тем, что значение вихря постоянно в каждой жидкой частице, а поле вихря изменяется только за счет перемещений этих частиц. Интеграл (3.3) для этого более узкого класса возмущений остается справедливым, только E (3.1) в соответствии с (3.4) приобретает вид

$$E = u^2 + v^2 + \Omega' Q^2 N^2. \tag{3.5}$$

При $\Omega' \equiv 0$ (3.5) дает $E = u^2 + v^2$, а из (3.4) вытекает $\omega \equiv 0$. Таким образом, если, например, в τ_+ имеется $\Omega = \Omega_+ = \text{const}$, то, считая в τ_+^* поле возмущений потенциальным, опять получаем интеграл (3.3), в котором при интегрировании по τ_+ берется $E = u^2 + v^2$. Если также и в τ_- имеется $\Omega = \Omega_- = \text{const}$, то в обеих областях $\omega \equiv 0$ и (3.3) редуцируется к форме

$$I = \int\limits_{\tau} (u^2 + v^2)\, dxdy - [\Omega] \int\limits_{R} QN^2 dl = \text{const}. \tag{3.6}$$

4. Общее условие устойчивости. Влияние классов устойчивых в среднеквадратическом течений сводится теперь к поискам случаев знакоопределенности квадратичной формы под интегралами (3.3), (3.6), вид которых обусловливает принимаемое определение устойчивости. При измерении интегралами I отклонения возмущенного течения от невозмущенного из равенства $I(t) = \text{const}$ вытекает устойчивость в определении Ляпунова: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется другое число $\delta > 0$ такое, что, как только $I(0) < \delta$, для всех t выполняется $I(t) < \varepsilon$. При этом особо следует отметить два момента. Во-первых, существенным отличием от условий устойчивости течений с гладким вихрем [2—4] является наличие лагранжевых смещений N поверхности разрыва $[\Omega] \neq 0$. Во-вторых, из (3.3) вытекает, что наличие слабых разрывов завихренности $[\Omega] = 0$, $[\Omega'] \neq 0$ приводит к тому же интегралу (3.2), что и для гладких полей Ω, и, следовательно, к тем же критериям устойчивости [2—4].

Интеграл (3.3) положительно определен, если в τ_+ и τ_- имеется $\Omega' > > 0$, а на R справедливо $[\Omega] < 0$. Если ввести кусочно-непрерывную функцию $\Omega(\Psi)$ во всей области τ, то эти требования означают, что завихренность Ω должна монотонно увеличиваться с ростом Ψ. Аналогично интеграл (3.6) положительно определен, если кусочно-постоянная функция $\Omega(\Psi)$ монотонно нарастающая. В обоих случаях рассматриваемое течение в замкнутом кольце устойчиво в определенном выше смысле.

В то же время вывод интегралов (3.3), (3.6) основывается только на наличии дивергентной формы (3.1) и граничных условий (1.3), (2.14), (2.17). Поэтому сохранение (3.3), (3.6) имеет место для течений (1.1) практически любой геометрии с любым количеством и расположением разрывов R и может использоваться для заключений об устойчивости. Однако оказывается, что если течение разбивается на несколько односвязных областей с замкнутыми линиями тока, то условия монотонного нарастания $\Omega(\Psi)$ выделяют весьма узкий класс течений, в который не входят многие практически интересные потоки. Например, в известной задаче обтекания траншеи с отрывом внешнего потока и образованием циркуляционного течения в самой траншее [1] интегралы (3.3), (3.6) положительно определены только тогда, когда внешний поток вихревой с завихренностью, превосходящей (по модулю) значение вихря в циркуляционной части течения. Если же внешний поток потенциален, то знак поверхностного интеграла в (3.6) всегда отрицателен. То же самое справедливо для плоского аналога вихревого кольца (для вихревой пары с конечными ядрами завихренности) и для плоского аналога вихря Хилла.

Добавим еще, что в устойчивых потоках с монотонно нарастающими $\Omega(\Psi)$ возмущения N могут нарастать вблизи точек остановки $Q = 0$. Особая роль таких точек для конкретных течений уже отмечалась [9].

5. Плоскопараллельные и круговые течения. Наиболее широкий класс достаточных условий устойчивости может быть получен для течений с симметриями. Для плоскопараллельного течения область τ есть полоса $0 < < y < H$, а поле скорости (1.1) имеет вид $U = U(y)$, $V = 0$ с непрерывной функцией $U(y)$. Завихренность $\Omega(y)$ — кусочно-непрерывная функция. На участках непрерывности $\Omega \equiv -U_y$, а в конечном наборе точек $y = y_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots, m$) имеются конечные скачки $[\Omega]_n \neq 0$, которые здесь удобно определить как $[\Omega]_n \equiv \Omega(y_n + 0) - \Omega(y_n - 0)$. Интеграл (3.3) принимает вид

$$I = \sum_n \Big(\int\limits_{\tau_n} E dx dy + U_n [U_y]_n \int\limits_{R_n} \eta^2 dx \Big) = \text{const}, \tag{5.1}$$

$$E = u^2 + v^2 + \omega^2 U / U_{yy}.$$

Для получения интеграла типа (3.6) надо в (5.1) взять $E = u^2 + v^2$. Из (5.1) и галилеевой инвариантности следует сохранение функционалов

$$G = \sum_n \left(\int\limits_{\tau_n} \frac{\omega^2}{U_{yy}} dx dy + [U_y]_n \int\limits_{R_n} \eta^2 dx \right) = \text{const}, \tag{5.2}$$

$$G_0 = \sum_n [U_y]_n \int\limits_{R_n} \eta^2 dx = \text{const}.$$

Интеграл G имеет место при $U_{yy} \neq 0$. Из его сохранения вытекает устойчивость в среднеквадратическом в случаях, когда значения U_{yy} на всех интервалах непрерывности τ_n и $[U_y]_n$ на всех скачках R_n имеют одинаковый знак. Интеграл G_0 справедлив для кусочно-линейного профиля $U(y)$ и потенциальных возмущений $\omega = 0$. Его вид позволяет сделать заключение об устойчивости в случаях, если все скачки $[U_y]$ имеют одинаковый знак.

Таким образом, обобщением критерия Рэлея [10] об устойчивости плоскопараллельных течений с непрерывными $U(y)$, $\Omega(y)$ на профили с непрерывной $U(y)$, но разрывной $\Omega(y)$ является требование монотонности изменения (нарастания или убывания) функции $\Omega(y)$.

Аналогично проводится рассмотрение течений с круговыми линиями тока. В полярной системе координат r, θ областью течения будет круговое кольцо $R_1 < r < R_2$. Если U, V есть r-, θ-компоненты скорости, то течение задается выражениями $U = U(r)$, $V \equiv 0$ с непрерывной функцией $U(r)$. Завихренность $\Omega(r)$ — кусочно-непрерывная функция. На участках непрерывности $\Omega = (rU)_r/r$, а в конечном наборе точек r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, m)$ имеются конечные скачки $[\Omega]_n \neq 0$, которые здесь удобно определить как $[\Omega]_n \equiv \Omega(r_n + 0) - \Omega(r_n - 0)$. Интеграл (3.3) принимает вид

$$I = \sum_n \left(\int_{\tau_n} Erdrd\theta + r_n U_n [\Omega]_n \oint_{R_n} N^2 d\theta \right), \quad E = u^2 + v^2 + \omega^2 U/\Omega_r. \tag{5.3}$$

Для получения интеграла типа (3.6) надо в (5.3) взять $E = u^2 + v^2$. Поскольку уравнения плоских движений однородной жидкости и граничные условия непротекания на кольцевых стенках инвариантны относительно перехода во вращающуюся с любой постоянной скоростью систему координат [11], из (5.3) вытекает сохранение функционалов

$$J = \sum_n \left(\int_{\tau_n} \frac{\omega^2}{\Omega_r} r^2 drd\theta + r_n^2 [\Omega]_n \oint_{R_n} N^2 d\theta \right), \quad J_0 = \sum_n r_n^2 [\Omega]_n \oint_{R_n} N^2 d\theta. \tag{5.4}$$

Интеграл J имеет место при $\Omega_r \neq 0$, а J_0 — для кусочно-постоянных функций $\Omega(r)$ и $\omega \equiv 0$. Так же как и в предыдущем случае, из (5.4) следует устойчивость круговых течений с монотонно изменяющимися $\Omega(r)$.

К рассматриваемому классу течений принадлежит известный вихрь Кельвина, для которого $U = \Omega_0 r$ при $0 < r < a$ и $U = \Omega_0 a^2/r$ при $a <$ $< r < \infty$. Из (5.4) следует

$$\oint N^2 d\theta = \text{const}, \tag{5.5}$$

где интеграл берется по границе ядра завихренности $r = a$. Равенство (5.5) означает устойчивость вихря Кельвина относительно возмущений с $\omega = 0$. В [12] этот результат найден в помощью спектральной теории.

6. Интегралы точных уравнений. Для интегралов G_0 (5.2) и J_0 (5.4) можно построить нелинейные аналоги, которые получаются из интегралов вихревого импульса G^* и момента импульса J^*:

$$G^* \equiv \int_\tau \omega^* y dx dy = \text{const}, \quad J^* \equiv \int_\tau \omega^* r^3 dr d\theta = \text{const} \tag{6.1}$$

(ω^* — полная завихренность).

Оказывается, что для плоскопараллельного течения интеграл G_0 (5.2) справедлив и в силу нелинейных уравнений. Для доказательства этого утверждения сначала рассмотрим отдельно слой $\tau_n(y_{n-1} < y < y_n)$ с завихренностью Ω_n. Наложение возмущений переводит τ_n в криволинейную полосу $\tau_n^*(y_{n-1} + \eta_{n-1}(x, t) < y < y_n + \eta_n(x, t))$. В силу несжимаемости жидкости для любого n справедливо равенство

$$\int \eta_n(x, t)\, dx = 0. \tag{6.2}$$

Вклад в вихревой импульс G^* (6.1) от интегрирования по τ_n^*

$$\Omega_n \int \left(\int_{y_{n-1}+\eta_{n-1}}^{y_n+\eta_n} y dy \right) dx = \frac{\Omega_n}{2} \int \{(y_n + \eta_n)^2 - (y_{n-1} + \eta_{n-1})^2\}\, dx.$$

Теперь, учитывая (6.2) и отбрасывая не зависящие от времени члены, получаем, что этот вклад пропорционален выражению $\Omega_n \int (\eta_n^2 - \eta_{n-1}^2)\, dx$, сумма которых по всем слоям дает равенство $G_0 = \text{const}$ (5.2), но уже в силу точных уравнений движения. Это означает, что для плоскопараллельных течений с кусочно-линейным профилем скорости $U(y)$ достаточным условием нелинейной устойчивости является монотонность функции $\Omega(y)$.

Нелинейный аналог интеграла J_0 (5.4) для кругового течения с кусочно-постоянной завихренностью строится по той же схеме. Сначала рассматривается отдельно слой $\tau_n (r_{n-1} < r < r_n)$ с завихренностью Ω_n. Наложение возмущений переводит τ_n в криволинейную полосу $\tau_n^* (r_{n-1} + N_{n-1}(\theta, t) < r < r_n + N_n(\theta, t))$. В силу несжимаемости жидкости для любого n справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} (2r_n N_n + N_n^2)\, d\theta = 0. \tag{6.3}$$

Вычисляя вклад в J^* (6.1) от интегрирования по τ_n^* и суммируя эти вклады с использованием (6.3), имеем

$$2(J^* - J_0^*) = \sum_n [\Omega]_n \int_0^{2\pi} N_n^2 (2r_n + N_n)^2\, d\theta, \tag{6.4}$$

где J_0^* — значение интеграла J^* в отсутствие возмущений $N_n \equiv 0$; $[\Omega]_n = \Omega(r_n + 0) - \Omega(r_n - 0)$. Линеаризация уравнений движения приводит (6.4) к (5.4). Нелинейная устойчивость следует из неравенства $2(J^* - J_0^*) \geqslant \sum_n [\Omega]_n r_n^2 \int_0^{2\pi} N_n^2 d\theta$, которое вытекает из (6.4) и неравенства $|N_n| < r_n$, являющегося следствием определения N. Таким образом, монотонность $\Omega(r)$ — достаточное условие нелинейной устойчивости течений с круговыми линиями тока и кусочно-постоянным вихрем. В частности, устойчивым относительно конечных возмущений оказывается вихрь Кельвина.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Доказательства устойчивости в классе плоских возмущений имеют ограниченную физическую значимость. Здесь можно говорить только то, что механизмы генерации плоских возмущений не работают и неустойчивость, если она есть, имеет трехмерный характер.

2. Все полученные результаты переносятся на осесимметричные течения и потоки с винтовой геометрией. Соответствующие утверждения об устойчивости — обобщения приведенных в [13, 14].

3. Практически важный дополнительный класс устойчивых течений будет выделяться случаями отрицательной определенности интегралов I (3.3), (3.6). К этому классу относятся, например, течение в траншее, вихрь Хилла, эллиптический вихрь Кирхгофа. Однако значение постоянной, входящей в оценку отрицательной определенности, зависит от геометрии течения. Ее вычисление — серьезная самостоятельная задача.

4. В основе предложенных утверждений об устойчивости лежит вариационный принцип, аналогичный [15]. При его получении надо учитывать, что условие «равнозавихренности» формулируется отдельно для каждой жидкой области непрерывного изменения вихря. В силу (2.8) функции, осуществляющие отображения $\tau_\pm^*$ на τ_+, на кривой R могут быть выбраны совпадающими. Интегралы I, G, J возникают при этом как вторые вариации энергии, импульса и момента импульса (6.1). В то же время надо подчеркнуть, что в настоящей работе исследуется линейная устойчивость относительно произвольных возмущений, а не только «равнозавихренных».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
2. **Fjortoft R.** Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ.— 1950.— V. 17, N 6.
3. **Арнольд В. И.** Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // ДАН СССР.— 1965.— Т. 162, № 5.
4. **Арнольд В. И.** Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 5.
5. **Юдович В. И.** Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // ЖВММФ.— 1963.— Т. 3, № 6.
6. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия.— М.: Мир, 1973.
7. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
8. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
9. **Moffatt H. K., Moore D. W.** The response of Hill's spherical vortex to a small axisymmetric disturbance // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 87, N 4.
10. **Линь Ц. Ц.** Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
11. **Taylor G. I.** Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational // Proc. Roy. Soc. Ser. A.— 1917.— V. 43.— P. 99.
12. **Kelvin Lord.** Vibrations of a columnar vortex // Phil. Mag.— 1880.— V. 10.— P. 155.
13. **Владимиров В. А.** Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 3.
14. **Владимиров В. А.** Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 5.
15. **Седенко В. И., Юдович В. И.** Устойчивость стационарных течений идеальной не сжимаемой жидкости со свободной границей // ПММ.— 1978.— Т. 42, вып. 6.

Поступила 13/VI 1986 г.

УДК 533.6.011.6 : 541.124

К РАСЧЕТУ ДИФФУЗИОННОГО ГОРЕНИЯ ДОЗВУКОВОЙ СТРУИ В СПУТНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

И. С. Белоцерковец, В. И. Тимошенко

(*Днепропетровск*)

Эффективный способ уменьшения донного сопротивления летательных аппаратов при сверхзвуковых режимах полета — организация горения в их кормовой части посредством дополнительного впрыска топлива через днище. Практическое использование такого способа управления донным сопротивлением делает актуальным вопрос об учете влияния горения на характеристики поля течения в окрестности тела. В [1] рассматривалось горение сверхзвуковой вдуваемой струи в кормовой области тела на основе уравнений Навье — Стокса. Влияние диффузионного горения на характеристики донных отрывных течений исследовалось в [2] в рамках модели Чепмена — Корста.

В данной работе предлагается приближенный метод расчета параметров дозвуковой вдуваемой струи в спутном сверхзвуковом потоке при наличии диффузионного горения. В основу метода положена модель сильного вязко-невязкого взаимодействия через давление сопряженных невязких потоков с течением в вязкой области.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается стационарное течение в двумерном следе за телом в постановке работы [3] с учетом диффузионного горения дозвуковой вдуваемой струи в сверхзвуковом спутном потоке. Относительно взаимодействующих потоков предполагается, что они в своем составе содержат по одному реагирующему компоненту (окислитель R для внешнего потока, горючее A для вдуваемой струи) и N нереагирующих в данных условиях компонентов. При перемешивании в областях смешения и ближнего следа окислитель и горючее вступают в химическое взаимодействие — горение, описываемое реакцией вида

$$\nu_R R + \nu_A A \to \nu_S S,$$

где S — продукт реакции; ν_i — стехиометрический коэффициент i-го