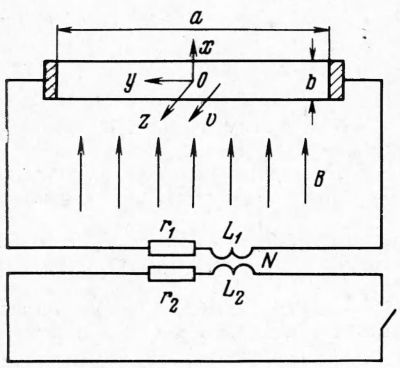
РАЗГОН ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КАНАЛАХ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОЙ И ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ВНЕШНЕЙ ЦЕПИ

А. Г. Рябинин, А. И. Хожаинов

(Ленинград)

Приводится решение задачи для разгона вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитогидродинамическом канале с электродами, замкнутыми на внешнюю цепь, содержащую активное сопротивление и индуктивность, связанную взаимной индуктивностью со вторичной цепью. Режим течения в канале принимается ламинарным.

Рассмотрим нестационарное течение проводящей жидкости в длинном канале прямоугольного сечения при наличии однородного магнитного поля $B_x = B_0$ (фиг. 1). Две стенки канала — $x = +{}^1/_2 b$ будем считать тонкими и выполненными из металла низкой проводимости, а две другие — $y = \pm {}^1/_2\, a$ будем считать хорошо проводящими электродами, замкнутыми на внешнюю цепь, содержащую активное сопротивление r_1 и индуктивность L_1. Пусть эта цепь связана взаимной индуктивностью N со вторичной цепью, содержащей активное сопротивление r_2 и индуктивность L_2. Будем также полагать, что $a \gg b$, так что изменением параметров потока по оси y по сравнению с их изменением по оси x можно пренебречь. При этих условиях система уравнений магнитной гидродинамики принимает вид



Фиг. 1

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - j_y B_0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$j_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_z}{\partial x} = \sigma (E_y + v_z B_0) \qquad (1)$$

Здесь v — скорость течения жидкости, p — давление, j — плотность электрического тока, E — напряженность электрического поля; ρ, η, σ и μ — плотность, динамическая вязкость, проводимость и магнитная проницаемость жидкости.

В практически интересных случаях можно положить, что E_y не зависит от x и является функцией только времени [1]. Тогда в соответствии со вторым законом Кирхгофа для полных токов, протекающих во взаимно-связанных контурах, можно составить следующую систему уравнений:

$$r_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + N\frac{dI_2}{dt} + E_y a = 0, \qquad r_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + N\frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad (2)$$

С учетом (2) уравнения (1) приводятся к следующей системе:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(t) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Mr\frac{\nu}{ab}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\, I_1 + \frac{M^2 \nu}{b^2}(U - v) \qquad (3)$$

$$(r_1 + r) I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + N\frac{dI_2}{dt} = UB_0 a \qquad (4)$$

$$r_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + N\frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad (5)$$

$$U = \frac{1}{b}\int_{-1/2 b}^{1/2 b} v\, dx, \quad M = bB_0\sqrt{\sigma/\eta}, \quad r = \frac{a}{\sigma b l}, \quad P(t) = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Здесь U — средняя скорость течения жидкости, M — число Гартмана, r — внутреннее сопротивление канала длиной l.

Граничными условиями для уравнения (3) будут

$$v = 0, \qquad x = \pm {}^1/_2 b \qquad (6)$$

Начальные условия могут быть заданы в виде

$$v(x,0) = I_1 = I_2 = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = 0\,, \quad \frac{d^2I_1}{dt^2} = \frac{P_0 a B_0 L_2}{L_1 L_2 - N^2} \quad \text{при } t = 0 \tag{7}$$

Здесь P_0 — начальный градиент давления.

С практической точки зрения данная задача соответствует разгону проводящей жидкости в магнитогидродинамическом канале при включенной внешней цепи.

1. Сначала рассмотрим разгон проводящей жидкости в канале при разомкнутой внешней вторичной цепи ($N = 0$).

Полагая в уравнении (3) $I_1(t)$ заданной функцией времени, решение для $v(x, t)$ можно записать в виде [2,3]

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{\beta_n}\,{}^1\!/_2 b\right) - \mathrm{ch}\left(\sqrt{\beta_n}\,x\right)\right)}{\mathrm{ch}\,\sqrt{\beta_n}\,{}^1\!/_2 b\left[3 - \frac{M^2}{4}\left(\frac{\beta_n b^2}{M^2} - 1\right)^2\right]} \int_0^t \times$$

$$\times\left[P(t-\tau) - Mr\,\frac{\nu}{ab}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\,I_1(t-\tau)\right] e^{\alpha_n \tau}\, d\tau \tag{8}$$

Здесь $\alpha_n = \nu\,(\beta_n - M^2/b^2)$, а собственные значения β_n определяются из следующего трансцендентного уравнения:

$$\beta_n = \frac{M^2}{b^2}\left(1 - \frac{2}{b\sqrt{\beta_n}}\,\mathrm{th}\,\frac{b\sqrt{\beta_n}}{2}\right) \tag{9}$$

Анализ уравнения (9) показывает, что при $M \gg 1$ существует единственное положительное значение β, которое с высокой степенью точности определяет характер изменения во времени средней скорости течения жидкости.

Подставляя (8) в (4) при $M \gg 0$, получим

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + (r_1 + r)\,I_1 = W_+\int_0^t P(t-\tau)\,e^{\alpha\tau}\,d\tau - W_-\int_0^t I_1(t-\tau)\,e^{\alpha\tau}\,d\tau \tag{10}$$

$$W_+ = \frac{2B_0 ab^2\beta}{M^2\left[3 - {}^1\!/_4 M^2(\beta b^2/M^2 - 1)^2\right]}\,, \quad W_- = Mr\,\frac{\nu}{ab}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\,W_+$$

Принимая $\tau = t - \theta$ и переходя к новой переменной $X = I_1\, e^{-\alpha t}$, после дифференцирования по t уравнение (10) можно записать в виде

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\delta\frac{dX}{dt} + \omega^2 X = mP(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{11}$$

$$\delta = {}^1\!/_2\,(r_1 + r + \alpha L_1)\,L_1^{-1}, \qquad \omega^2 = W_-/L_1, \qquad m = W_+/L_1$$

Решение уравнения (11) с учетом начальных условий (7) в зависимости от знака дискриминанта λ можно представить в виде [4]:

а) $\lambda^2 = 4(\delta^2 - \omega^2) > 0$

$$X(t) = \frac{2m}{\lambda}\int_0^t P(\tau)\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{\delta(\tau - t)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda}{2}(t-\tau)\,d\tau \tag{12}$$

б) $\lambda^2 = 4(\omega^2 - \delta^2) > 0$

$$X(t) = \frac{2m}{\lambda}\int_0^t P(\tau)\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{\delta(\tau - t)}\sin\frac{\lambda}{2}(t-\tau)\,d\tau \tag{13}$$

в) $\lambda = 0$

$$X(t) = m\int_0^t (t-\tau)\,P(\tau)\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{\delta(\tau - t)}\,d\tau \tag{14}$$

Таким образом, при заданной функции $P(t)$ в зависимости от конкретных условий из (12) — (14) определяется $I_1(t)$ и по (8) вычисляется локальная скорость течения жидкости.

2. При замкнутой внешней вторичной цепи ($N \neq 0$) задача решается аналогично. Вводя новые переменные $X_1 = I_1 e^{-\alpha t}$ и $X = I_2 e^{-\alpha t}$, систему уравнений (3) —(5) можно привести к виду

$$L_1 \frac{d^2X_1}{dt^2} + 2\delta L_1 \frac{dX_1}{dt} + N \frac{d^2X_2}{dt^2} + \alpha N \frac{dX_2}{dt} + \omega^2 L_1 X_1 = mL_1 P(t)\, e^{-\alpha t}$$

$$N \frac{dX_1}{dt} + L_2 \frac{dX_2}{dt} + \alpha N X_1 + (r_2 + \alpha L_2) X_2 = 0 \qquad (15)$$

Разрешая эту систему относительно X_1, получим

$$A_1 \frac{d^3X_1}{dt^3} + A_2 \frac{d^2X_1}{dt^2} + A_3 \frac{dX_1}{dt} + A_4 X_1 = mL_1 e^{-\alpha t} P(t) \{A_5 [\ln P(t)]' - \alpha A_5 + A_6\} \qquad (16)$$

Здесь

$$A_1 = -(L_1 L_2 - N^2), \quad A_2 = 2\alpha N^2 - (r_1 + r + \alpha L_1) L_2 - (r_2 + \alpha L_2)\, L_1$$

$$A_3 = \alpha^2 N^2 - (r_1 + r + \alpha L_1)(r_2 + \alpha L_2) - W_- L_2; \quad A_4 = -W_- (r_2 + \alpha L_2)$$

$$A_5 = -L_2, \quad A_6 = -(r_2 + \alpha L_2)$$

Таким образом, задача для нахождения тока $I_1(t)$ свелась к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами, решение которого при заданной функции $P(t)$ не представляет трудностей.

На фиг. 2 представлены результаты расчета изменения во времени средней скорости течения проводящей жидкости в рассмотренном магнитогидродинамическом канале при внезапно приложенном постоянном перепаде давления для случаев разомкнутой (кривая *1*) и замкнутой (кривая *2*) внешней цепи. В качестве исходных данных были приняты следующие:

размеры канала

$$a = 0.1\ м, \ b = 0.01\ м, \ l = 1\ м$$

рабочая жидкость — ртуть при $T = 20°$ С,

$$\sigma = 1.046 \cdot 10^6\ 1/ом \cdot м$$

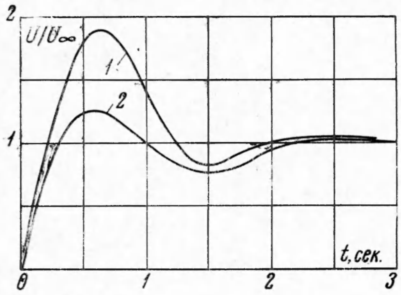
$$\eta = 1.55 \cdot 10^{-3}\ н \cdot сек/м^2$$

$$\rho = 13.56 \cdot 10^3\ кг/м^3$$

$$r = r_1 = 10^{-5}\ ом, \ L_1 = 10^{-5}\ гн$$

$$r_2 = 10^{-3}\ ом, \ L_2 = 10^{-3}\ гн, \ N = 0.5 \cdot 10^{-4}\ гн$$

$$M = 100$$



Фиг. 2

По оси ординат на фигуре отложена величина средней скорости течения жидкости, отнесенная к своему асимптотическому значению.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что наличие реактивных сопротивлений во внешней цепи магнитогидродинамического канала может приводить к периодическому характеру разгона проводящей жидкости. При этом взаимная индуктивность уменьшает амплитуду колебаний.

В заключение отметим, что данная задача может быть легко обобщена на наличие во внешней цепи емкости и ненулевые начальные условия.

Поступила 21 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Патрашев А. Н., Рябинин А. Г., Хожаинов А. И. Нестационарное течение проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах при малых магнитных числах Рейнольдса. Пятое рижское совещание по магнитной гидродинамике, МГД-генераторы, АН Латв ССР, 1966.
2. Рябинин А. Г. Неустановившееся плоско-параллельное течение проводящей жикости в магнитогидродинамическом канале при произвольном изменении во времени градиента давления, Магнитн. гидродинамика, 1966, № 3.
3. Рябинин А. Г., Хожаинов А. И. Исследование нестационарного течения проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах. Ж. техн. физ., 1967, 37, № 2.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.