УДК 532.546

СТРУКТУРА КОЛЬМАТИРУЕМОГО СЛОЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ

Ю. И. Капранов[*,**], Н. М. Тропин[*]

[*] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
[**] Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: kapranov@hydro.nsc.ru, nikita.tropin@gmail.ru

Исследуется процесс проникновения взвешенных в жидкости частиц в пористую среду. Формулируется постановка задачи, описывающей изменения свойств среды в окрестности подвижной границы. Предложен метод построения решения, исследованы особенности течения. Показано, что структура области, в которой происходят значительные изменения свойств среды и потока, существенно зависит от скорости смещения подвижной границы.

Ключевые слова: пористая среда, взвесь, кольматация, подвижная граница, приграничная зона, интенсивность срезания слоя, фронт проникновения.

Введение. Исследование изменений свойств пористой среды под воздействием потока взвеси представляет интерес как с теоретической точки зрения, так и при решении ряда прикладных проблем, таких как разработка технологии очистки вод от загрязнений путем их фильтрования [1, 2], анализ причин изменения параметров пласта при бурении в нем скважин [3, 4]. Проникновение с потоком относительно мелких частиц бурового раствора и измельченной породы в поровое пространство приводит к снижению проницаемости прискважинной зоны. В [3, 4] предполагается, что на образовавшемся после бурения участке практически сразу возникает тонкая малопроницаемая глинистая корка, задерживающая все частицы. Вместе с тем в окрестности забоя скважины имеет место иная ситуация. Даже если при малых скоростях вращения бурового инструмента в этой области возможно появление слоя отложенных частиц, в дальнейшем этот слой с прилегающей к забою породой будет срезан. В данной зоне характер взаимодействия потока в скважине и фильтрационного потока оказывается достаточно сложным. Результаты лабораторных экспериментов и натурных наблюдений указывают на ряд особенностей [3], среди которых следует отметить резкое уменьшение скорости проходки с увеличением дифференциального давления. Механизмы, управляющие течением взвеси вблизи подвижных границ, изучены недостаточно, но большинство исследователей определяющим считают процесс кольматации.

При изучении явлений рассматриваемого типа часто применяется подход, описанный в работе [5], в котором используется ряд приближений. Преимуществом такого подхода является сравнительная простота возникающих задач. Однако указанные приближения неприменимы для областей, примыкающих к границам, вблизи которых происходят значительные изменения свойств среды и потока. В принятой в настоящей работе модели указанные недостатки отсутствуют. В ней использована полная система уравнений и учитывается влияние подвижной границы. При этом основное внимание уделяется анализу особенностей течения.

1. Описание модели. Предполагается, что жидкая фаза, частицы взвеси и скелет пористой среды являются несжимаемыми. Модель включает уравнения сохранения объемов

участвующих в процессе фаз [6]:
$$\frac{\partial\,[\varphi(1-c)]}{\partial t}+\operatorname{div}\,[(1-c)\boldsymbol{v}]=0,\qquad \frac{\partial\,(\varphi c)}{\partial t}+\operatorname{div}\,(c\boldsymbol{v})=\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.1}$$
Здесь φ — пористость среды; $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости фильтрации взвеси; c — концентрация взвешенных частиц в фильтрационном потоке. Первое уравнение системы (1.1) показывает, что жидкая фаза в процессе кольматации остается в потоке. В случае постоянной скорости фильтрации второе уравнение системы (1.1) в явном виде приведено в работе [7]. При том же ограничении соответствующая (1.1) система уравнений представлена в работе [5], в которой предпринята попытка описать случай, когда частица взвеси захватывается пористой средой с соответствующим объемом жидкой фазы. Однако при использовании этой гипотезы необходимо распространить ее на частицы, находящиеся в потоке. В этом случае частица оказывается "разбухшей", а жидкой фазой становится лишь та ее часть, которая не является в указанном смысле связанной. Соответственно необходимо модифицировать уравнение для концентрации. В результате в качестве законов сохранения вновь имеем систему (1.1).

Следует отметить, что если φ_0 — любое не зависящее от времени распределение пористости, то второе уравнение системы (1.1) можно представить в виде
$$\frac{\partial\,(\varphi_0-\varphi+\varphi c)}{\partial t}+\operatorname{div}\,(c\boldsymbol{v})=0. \tag{1.2}$$
В такой форме уравнение сохраняет свой физический смысл, поскольку неважно, от какого стационарного значения в каждой фиксированной точке отсчитываются изменения пористости. В значительной степени этим объясняется частое использование приближенной формы уравнения (1.2) [5]
$$\varphi_0\,\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla c=\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.3}$$
При этом условие постоянства скорости фильтрации можно снять, поскольку следствием системы уравнений (1.1) является уравнение неразрывности взвеси
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0. \tag{1.4}$$
Как правило, в линеаризации (1.3) уравнения (1.2) φ_0 полагается начальным значением пористости. Однако в расчетах, основанных на таком приближении, решение оказывается близким к некоторому стационарному решению, не совпадающему с начальным распределением. Ситуацию можно было бы исправить, подбирая соответствующую зависимость $\varphi_0=\varphi_0(x)$. Однако эта зависимость заранее неизвестна, и, как показано далее, "равновесного" распределения $\varphi_0(x)$ для всей области течения в общем случае может не существовать. С учетом сказанного выше далее будем использовать полную систему уравнений (1.1), причем, как правило, в эквивалентной форме, когда ее первое уравнение заменено уравнением сохранения объема взвеси (1.4).

Систему уравнений (1.1) следует дополнить законом Дарси
$$\boldsymbol{v}=-\frac{k}{\mu}\nabla p, \tag{1.5}$$
где p — давление в потоке; μ — вязкость взвеси; k — проницаемость среды. При этом наибольшее влияние на характер течения оказывают изменения проницаемости среды в процессе кольматации. Поэтому с качественной точки зрения достаточно ограничиться классическим соотношением типа формулы Слихтера — Козени [8]
$$k=k_0(\varphi/\varphi_0)^n, \tag{1.6}$$
где k_0 — начальная проницаемость; $2<n\leqslant 4$.

Существенным элементом всех моделей кольматации является связь интенсивности изменения пористости с параметрами среды и потока. В ранних работах, посвященных изучению проблемы очистки вод от содержащихся в них примесей, использовалось эмпирическое соотношение [9, 10]

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\lambda c, \tag{1.7}$$

где λ — так называемый коэффициент фильтра. Вариант собственно уравнения кинетики кольматации приведен в работах [7, 11]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\beta c. \tag{1.8}$$

Аналогичное уравнение использовалось в работе [12], в которой коэффициент β характеризует тип отложения частиц на стенках поровых каналов. Представленная в работе [5] современная форма рассматриваемого замыкающего соотношения, явно учитывающая интенсивность потока, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varkappa c|\boldsymbol{v}|, \tag{1.9}$$

где $\varkappa$ — определяемый экспериментально коэффициент, имеющий смысл приходящейся на единицу длины пути вероятности задержки частицы пористой средой. При этом отмечалось, что в общем случае коэффициент $\varkappa$ не зависит от концентрации.

Принятую в настоящей работе форму уравнения кинетики кольматации поясним на примере переноса частиц одного размера, применив следующую схематизацию. Каждая частица в потоке может быть либо слишком крупной, чтобы попасть в какой-либо поровый канал, либо способной проникнуть в один из таких каналов. В первом случае жидкость в порах не будет содержать частицы, т. е. кольматация отсутствует. Предположим, что реализуется второй случай. Тогда при переходе взвешенной частицы к соседнему по потоку каналу имеется две возможности: если радиус соседнего канала меньше радиуса частицы, то она задержится внутри предыдущего канала и будет выведена из потока; в противном случае частица проникнет в следующий канал. При этом в элементарном объеме пористой среды уменьшается не только доступный потоку объем пор, но и вероятность перехода последующих частиц в “слишком узкий” соседний канал. Это обусловливает увеличение доли путей, состоящих из поровых каналов, минимальный радиус которых превышает размер взвешенной частицы. Следовательно, с увеличением количества частиц, захваченных пористой средой из потока, интенсивность кольматации должна уменьшаться.

Исходную пористую среду будем характеризовать длиной свободного пробега l_0 — средним расстоянием, которое проходит частица до задержки ее поровым каналом. Представим элементарный объем среды длиной dx по потоку с поперечным сечением площадью S в виде набора примыкающих друг к другу слоев толщиной l_0. За время dt сквозь этот элемент пространства проходят взвешенные частицы, общий объем которых равен $c|\boldsymbol{v}|S\,dt$. Пусть r — вероятность остановки частицы на каждом таком слое скелетом пористой среды. Тогда объем задержанных на одном слое частиц равен $rc|\boldsymbol{v}|S\,dt$. Так как число слоев в элементарном объеме равно dx/l_0, то общий объем задержанных частиц равен $rc|\boldsymbol{v}|S\,dt\,dx/l_0$. За промежуток времени dt на ту же величину должен уменьшиться поровый объем внутри рассматриваемого элемента среды. Это означает, что коэффициент $\varkappa$ в уравнении (1.9) можно представить в виде $\varkappa = r/l_0$. Состояние, когда все потоковые пути состоят только из поровых каналов с радиусом, не меньшим радиуса частиц, будем характеризовать соответствующим предельно минимальным значением пористости φ_*. Так как вероятность задержки частицы на одном слое естественно полагать равной $r = (\varphi - \varphi_*)/(\varphi_0 - \varphi_*)$, то

$$\varkappa = \frac{1}{l_0}\,\frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi_0 - \varphi_*}.$$

Поэтому далее будет использоваться уравнение кинетики кольматации

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\delta}\,(\varphi - \varphi_*)c|\boldsymbol{v}|, \qquad \delta = l_0(\varphi_0 - \varphi_*), \tag{1.10}$$

причем в общем случае параметр φ_* может быть равен нулю. Линейная связь коэффициентов λ, β или $\varkappa$ с пористостью как один из возможных вариантов эмпирической зависимости рассматривалась ранее (см. [9–11]). Однако лишь в работах [7, 11] было предложено использовать аналог параметра φ_* в качестве минимально допустимого в процессе кольматации значения пористости.

Среди простейших свойств принятой системы уравнений (1.1), (1.5), (1.6), (1.10) отметим следующие. Если в части области течения концентрация тождественно равна нулю, то согласно второму уравнению системы (1.1) будет выполнено равенство $\varphi = \varphi(x)$. Уравнение кинетики кольматации (1.10) выполнится тождественно, первое уравнение системы (1.1) и уравнение (1.4) совпадут. В результате имеем течение однородной жидкости, поле скоростей фильтрации которой определяется уравнением (1.4) и законом Дарси (1.5), при этом проницаемость среды не зависит от времени, но меняется по пространству в соответствии с законом (1.6).

Рассмотрим случай, когда в части области течения при $t = t_0$ пористость достигает минимального значения: $\varphi(x, t_0) = \varphi_*$. Записывая уравнение кинетики кольматации (1.10) в проинтегрированной по времени форме

$$(\varphi(x,t) - \varphi_*)^2 = (\varphi(x,t_0) - \varphi_*)^2 \exp\Big(-\frac{2}{\delta}\int\limits_{t_0}^{t} c|\boldsymbol{v}|\,dt\Big), \tag{1.11}$$

можно показать, что в указанной области равенство $\varphi(x,t) \equiv \varphi_*$ сохранится и в последующие моменты времени. Значит, второе уравнение системы (1.1) перейдет в уравнение переноса

$$\varphi_*\,\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla c = 0,$$

а уравнение неразрывности (1.4), как и связь (1.5) скорости фильтрации с давлением, останутся неизменными. При этом в соответствии с соотношением (1.6) в указанной части области течения проницаемость достигнет и будет сохранять в дальнейшем минимальное значение $k_* = k_0(\varphi_*/\varphi_0)^n$. В результате имеет место простой конвективный перенос взвеси в пористой среде с постоянными по времени и пространству минимально возможными значениями пористости и проницаемости.

Соотношение (1.11) позволяет сделать дополнительные выводы. С одной стороны, если при $t = t_0$ пористость в точке x_0 равна φ_*, то независимо от изменения во времени концентрации в этой точке равенство $\varphi(x_0,t) = \varphi_*$ будет справедливо при всех $t \geqslant t_0$. С другой стороны, если предположить, что при $t > 0$ пористость в точке x_0 равна φ_*, то согласно соотношению (1.11) при $t < t_0$ указанное равенство также должно выполняться. Значит, при $t \geqslant 0$ в произвольной точке области течения может реализоваться лишь одна из возможностей: $\varphi(x,t) = \varphi_*$ или $\varphi(x,t) > \varphi_*$. Поэтому с учетом начальных данных область течения можно разбить на несколько практически независимых частей. В той области, где $\varphi(x,0) = \varphi_*$, взвесь будет перемещаться, не вызывая изменения свойств самой среды. В той области, где $\varphi(x,0) > \varphi_*$, течение взвеси во все последующие моменты времени будет сопровождаться изменением свойств пористой среды. Таким образом, в первом приближении можно ограничиться начальными данными для пористости φ_0, удовлетворяющими ограничению $\varphi_0 > \varphi_*$.

Следующее свойство процесса кольматации основывается на том факте, что уравнение неразрывности (1.4) позволяет записать уравнение (1.2) в виде

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla c = (1-c)\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Поэтому изменения концентрации, вызывающие соответствующие изменения пористости и проницаемости, происходят в основном вдоль линий тока, т. е. в указанном смысле кольматация — одномерный процесс. Вместе с тем из закона Дарси (1.5) и соотношения (1.6) следует, что линии тока зависят от пористости и концентрации. Ниже показано, например, что пористость, являющаяся коэффициентом при производной $\partial c/\partial t$ в уравнении (1.12), определяется совокупностью значений параметров потока в предшествующие моменты времени. Поэтому полное расщепление многомерных течений на независимые одномерные потоки, вообще говоря, невозможно. Тем не менее в общем случае предположение об одномерности сохраняет значительную часть особенностей процессов кольматации.

2. Начально-краевая задача. По указанным выше причинам, а также в силу недостаточной изученности рассматриваемых процессов далее проводится исследование описанной в п. **1** модели на конкретном примере, который представляет значительный практический интерес [13] и характеризует явление проникновения жидкости в процессе бурения в пласт в окрестности забоя.

Рассмотрим течение взвеси в направлении оси x в пористом слое, правая граница которого $x = L$ неподвижна, а левая монотонно смещается вправо согласно заданной зависимости $x = x_-(t)$, причем $x_-(0) = 0$. В начальный момент пористую среду будем считать однородной ($\varphi(x,0) = \varphi_0$) и заполненной взвесью постоянной концентрации $c(x,0) = c_0$. Задана концентрация частиц во входном потоке $c(x_-(t),t) = c_l$, а также известен перепад давления. В результате возникает начально-краевая задача для определения распределений пористости $\varphi(x,t)$, концентрации $c(x,t)$, давления $p(x,t)$ и скорости фильтрации $v(x,t)$ в части криволинейного сектора $\Omega_- = \{x_-(t) < x < L, t > 0\}$. До некоторого момента указанная область течения будет состоять из двух подобластей. В первой из них $\Omega_+(t) = \{x_*(t) < x < L\}$, примыкающей к выходной границе, перемещается взвесь, первоначально заполнявшая весь пористый слой. Оставшаяся подобласть $\Omega_-(t) = \{x_-(t) < x < x_*(t)\}$ заполнена взвесью, успевшей к моменту времени t проникнуть через входную границу в пористую среду. Указанные подобласти разделены подвижной границей — фронтом проникновения взвеси, положение которого $x = x_*(t)$ заранее неизвестно. Потребуем, чтобы внутри $\Omega_\pm$ пористость, концентрация, давление и скорость фильтрации не только были непрерывными, но и обладали всеми частными производными, которые присутствуют в системе (1.1), уравнениях (1.10), (1.4) и соотношении (1.5).

Фронт проникновения взвеси $x = x_*(t)$ характеризуется тем, что при переходе через него могут претерпевать разрыв некоторые зависимые переменные. Вывод условий на этой кривой незначительно отличается от стандартного. Так, интегральный вариант первого закона сохранения в (1.1) порождает соотношение

$$x = x_*(t): \qquad (1-c)v - (1-c)\varphi \frac{dx_*}{dt} = 0, \tag{2.1}$$

где $[u] = u_+ - u_-$ — скачок, который претерпевает величина u при переходе через рассматриваемую кривую. Аналогично из интегральной формы второго закона сохранения в системе (1.1) находим

$$x = x_*(t): \qquad cv + (1 - c)\varphi \, \frac{dx_*}{dt} = 0. \tag{2.2}$$

Складывая равенства (2.1) и (2.2), получаем условие непрерывности скорости фильтрации взвеси

$$x = x_*(t): \qquad [v] = 0. \tag{2.3}$$

Ограничение (2.3) является следствием несжимаемости твердой и жидкой фаз, несмотря на то что при этом концентрации твердой фазы в потоке со стороны областей $\Omega_-(t)$ и $\Omega_+(t)$ могут не совпадать. При выполнении ограничения (2.3) соотношения (2.1) и (2.2) становятся эквивалентными и представляются в виде

$$x = x_*(t): \qquad [c]\Big(v - \varphi_+ \, \frac{dx_*}{dt}\Big) + (1 - c)_-[\varphi] \, \frac{dx_*}{dt} = 0. \tag{2.4}$$

Потребуем, чтобы при переходе через кривую $x = x_*(t)$ непрерывно менялась также пористость [6]:

$$x = x_*(t): \qquad [\varphi] = 0. \tag{2.5}$$

Условие (2.5), являющееся естественным с точки зрения физики, означает, что при переходе через фронт проникновения взвеси скорость изменения пористости может претерпевать скачок, однако эти изменения должны начинаться при значении пористости, достигнутом на рассматриваемой кривой до перехода через нее. При выполнении ограничения (2.5) равенство (2.4) сводится к требованию, чтобы либо скачок концентрации обращался в нуль, либо выполнялось соотношение

$$x = x_*(t): \qquad v = \varphi \, \frac{dx_*}{dt}. \tag{2.6}$$

Однако в общем случае непрерывность концентрации не может быть обеспечена во всей области течения, поскольку уже в начальный момент на входе в пористую среду равенство $c_l = c_0$ может не выполняться. Поэтому остается только один вариант, а именно условие (2.6).

Последнее из условий на фронте проникновения является стандартным и представляет собой требование непрерывности давления при переходе через рассматриваемую кривую:

$$x = x_*(t): \qquad [p] = 0. \tag{2.7}$$

Переходя к построению решения сформулированной начально-краевой задачи в случае одномерного течения, будем учитывать тот факт, что в соответствии с уравнением (1.4) и условием (2.3) скорость фильтрации непрерывна во всей области течения и может зависеть только от времени: $v = v(t)$. Это позволяет заменить время t интегральным расходом взвеси τ, определенным по формуле

$$\tau(t) = \int\limits_0^t v(z) \, dz. \tag{2.8}$$

При этом для физически содержательного случая $v(t) > 0$ указанная замена обратима. С использованием (2.8) уравнение фронта проникновения взвеси принимает вид $x = x_*(\tau)$, где $x_*(\tau)$ — некоторая функция. Ниже показано, что конкретная форма функции $x_*(\tau)$ однозначно определяется начальными данными. Положение входной границы задается уравнением $x = x_l(\tau)$, при этом в общем случае функция $x_l(\tau)$ является искомой и должна определяться с использованием соотношения $x_-(t) = x_l(\tau(t))$.

Несмотря на указанную сложность, замена (2.8) целесообразна, поскольку позволяет разделить процесс на две стадии. Первая стадия соответствует собственно кольматации, когда роль времени выполняет интегральный расход τ, поскольку именно им обусловлены все изменения, происходящие в поровом пространстве и в потоке. Второй, гидродинамической стадии соответствует установление определенной связи между скоростью фильтрации и временем с учетом изменений, имевших место на первой стадии. Именно на этой стадии соотношения (1.5), (1.6) необходимы для восстановления поля давлений. Указанное расщепление применимо в общем случае многомерных течений, кроме того, его можно использовать для численных расчетов.

В плоскости (x, τ) уравнения (1.12), (1.10) несколько упрощаются:

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial x} = -c(1-c)\,\frac{\varphi - \varphi_*}{\delta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{\varphi - \varphi_*}{\delta}\, c. \tag{2.9}$$

Для того чтобы описать все многообразие возникающих режимов течения, необходимо рассмотреть для системы (2.9) начальные условия общего вида

$$\tau = 0: \qquad \varphi = \varphi_0(x), \quad c = c_0(x) \tag{2.10}$$

с заданными функциями $\varphi_0(x)$ и $c_0(x)$, определенными при $x \geqslant 0$. На входной границе также имеет смысл рассмотреть общий случай

$$x = x_l(\tau): \qquad c = c_l(\tau). \tag{2.11}$$

При построении решения в части $\Omega_+(t)$ области течения обозначим через $x = x(\tau; x_0)$ выходящую из точки $(x_0, 0)$ $(x_0 > 0)$ характеристику первого уравнения системы (2.9). Значения пористости на этой кривой $\varphi(\tau; x_0)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau; x_0) = g \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{2.12}$$

Чтобы определить правую часть g этого соотношения, проинтегрируем второе уравнение системы (2.9) по τ, используя начальные данные (2.10):

$$\varphi(x, \tau) = \varphi_* + [\varphi_0(x) - \varphi_*] \exp\Big(-\frac{1}{\delta} \int_0^\tau c(x, z)\, dz \Big). \tag{2.13}$$

Полученное равенство продифференцируем по x:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\varphi - \varphi_*)\Big(\frac{\varphi_0'}{\varphi_0 - \varphi_*} - \frac{1}{\delta} \int_0^\tau \frac{\partial c}{\partial x}(x, z)\, dz \Big). \tag{2.14}$$

Заменяя в (2.12) производные $\partial\varphi/\partial\tau$ и $\partial\varphi/\partial x$ правыми частями второго уравнения системы (2.9) и представления (2.14) соответственно, получаем

$$g = \frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi}\Big(-\frac{c\varphi}{\delta} + \frac{\varphi_0'}{\varphi_0 - \varphi_*} - \frac{1}{\delta} \int_0^\tau \frac{\partial c}{\partial x}(x, z)\, dz \Big).$$

С использованием записанного в переменных (x, τ) уравнения (1.12)

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial\,[(1-c)\varphi]}{\partial \tau} \tag{2.15}$$

для функции g находим требуемое представление

$$g = \frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi}\Big(\frac{\varphi_0'}{\varphi_0 - \varphi_*} + \frac{(1-c_0)\varphi_0}{\delta} - \frac{\varphi}{\delta} \Big).$$

Таким образом, значения пористости на характеристике определяются уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi}\Big(\frac{\varphi_0'}{\varphi_0 - \varphi_*} + \frac{(1 - c_0)\varphi_0}{\delta} - \frac{\varphi}{\delta}\Big).$$

Выбрав x в качестве параметра вдоль кривой $x = x(\tau; x_0)$, с учетом равенства $\varphi\,dx = d\tau$ запишем полученное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d\varphi}{dx} = (\varphi - \varphi_*)\Big(f(x) - \frac{\varphi - \varphi_*}{\delta}\Big), \qquad f(x) = \frac{\varphi_0'}{\varphi_0 - \varphi_*} + \frac{\varphi_0(1 - c_0) - \varphi_*}{\delta}. \tag{2.16}$$

Используя замену $\varphi = \varphi_* + 1/u$, сведем это уравнение к линейному. Тогда решением $\varphi(x; x_0)$ уравнения (2.16), удовлетворяющим условию $\varphi(x_0; x_0) = \varphi_0(x_0)$, является функция

$$\varphi(x; x_0) = \varphi_* + \Phi(x; x_0) \Big/ \Big(1 + \frac{1}{\delta}\int\limits_{x_0}^{x} \Phi(y; x_0)\,dy\Big),$$

$$\Phi(x; x_0) = [\varphi_0(x) - \varphi_*] \exp\Big(\frac{1}{\delta}\int\limits_{x_0}^{x} u_0(y)\,dy\Big), \qquad u_0(x) = \varphi_0(x)[1 - c_0(x)] - \varphi_*. \tag{2.17}$$

В свою очередь в силу первого уравнения (2.9) имеет место соотношение

$$\frac{dc}{dx} = -\frac{\varphi - \varphi_*}{\delta}\,c(1 - c).$$

Учитывая это соотношение, начальное условие $c(x_0; x_0) = c_0(x_0)$, а также определение (2.17) функции $\Phi(x; x_0)$, для значений концентрации на кривой $\tau = \tau(x; x_0)$ получаем представление

$$c(x; x_0) = \frac{c_0(x_0)(\varphi(x; x_0) - \varphi_*)}{(1 - c_0(x_0))\Phi(x; x_0) + c_0(x_0)(\varphi(x; x_0) - \varphi_*)}. \tag{2.18}$$

Что касается самой характеристики, то она должна определяться из соотношения

$$\tau = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(y; x_0)\,dy. \tag{2.19}$$

Выражения (2.17), (2.18) и соотношение (2.19) представляют собой искомое параметрическое представление решения с параметром, являющимся абсциссой x_0 начальной точки характеристики. В соответствии с (2.17), (2.18) для каждого $x_0 > 0$ при $x \geqslant x_0$ можно определить зависимости $\varphi(x; x_0)$ и $c(x; x_0)$, а подставляя первую из них в соотношение (2.19) — найти соответствующее значение переменной τ. Возникающий в результате набор точек (x, τ) формирует искомую область Ω_+ зависимости решения от начальных данных. Определим структуру этой области.

В правой части соотношения (2.19) под знаком интеграла заменим функцию $\varphi(x; x_0)$ ее выражением из (2.17) и определим вспомогательную функцию $G_0(x; x_0)$ по правилу

$$G_0(x; x_0) = \varphi_*(x - x_0) + \delta \ln\Big(1 + \frac{1}{\delta}\int\limits_{x_0}^{x} \Phi(y; x_0)\,dy\Big). \tag{2.20}$$

Тогда соотношение (2.19) можно рассматривать как уравнение для определения зависимости параметра x_0 от переменных (x, τ):

$$x_0 = x_0(x, \tau)\colon \qquad \tau - G_0(x; x_0) = 0. \tag{2.21}$$

Определим также кривую

$$\tau = \tau_*(x) = G_0(x;0) \tag{2.22}$$

и потребуем, чтобы начальные значения $\varphi_0(x)$, $c_0(x)$ были непрерывными. Тогда из выражений (2.17) следует, что функция $\Phi(x;x_0)$ непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по x_0, причем в квадранте $\{x \geqslant x_0,\ \tau \geqslant 0\}$ она принимает только неотрицательные значения. Отсюда, из (2.20) и (2.22) следует, что $\tau_*(x)$ не только определена при $x \geqslant 0$, но и строго монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема. Покажем, что область Ω_+ совпадает с множеством $\{0 < \tau < \tau_*(x),\ x > 0\}$.

Действительно, из выражения (2.17) для зависимости $\Phi(x;x_0)$ и выражения (2.20) для функции $G_0(x;x_0)$ следует непрерывная дифференцируемость последней по x, x_0, а также неотрицательность частной производной $\partial G_0/\partial x_0$. Таким образом, $G_0(x;x_0)$ строго монотонно убывает по x_0, поэтому с увеличением x_0 определяемые представлением (2.21) характеристики $\tau = \tau(x;x_0)$ будут сдвигаться вправо и одновременно прижиматься к оси $\tau = 0$. Если (x,τ) — произвольная точка в области $\{0 < \tau < \tau_*(x)\}$, то с увеличением x_0 от $x_0 = 0$ до $x_0 = x$ функция $G_0(x;x_0)$ будет монотонно убывать от $\tau_*(x)$ до нуля. Значит, решение $x_0(x,\tau)$ уравнения (2.21) существует и единственно, а область Ω_+ действительно заполняется характеристиками.

Подставляя зависимость $x_0(x,\tau)$ в (2.17) и (2.18), получаем требуемые представления для пористости и концентрации как функций x и τ. При сформулированных ограничениях на начальные данные непрерывной и отграниченной снизу от нуля в области $0 \leqslant x_0 \leqslant x$ оказывается частная производная $\partial G_0/\partial x$. Таким образом, решение уравнения (2.21) является непрерывно дифференцируемой функцией. Следовательно, функция $\varphi(x,\tau)$ непрерывна по (x,τ) и имеет непрерывную частную производную по τ. Что касается зависимости $c(x,\tau)$, то при сформулированных ограничениях на начальные данные она будет лишь непрерывной по своим аргументам. Анализ представления (2.18) показывает, что необходимым и достаточным условием существования частных производных $\partial c/\partial\tau$, $\partial c/\partial x$ является требование дифференцируемости начального значения $c_0(x)$ функции $c(x,\tau)$. Далее это условие будем считать выполненным.

При построении решения в приграничной зоне полагаем зависимость $x = x_l(\tau)$ монотонно возрастающей. Пусть $\tau_l(x)$ — обратная функция. Также считаем выполненным неравенство $\tau_l(x) > \tau_*(x)$ ($\tau_*(x)$ определена в (2.22)). Пусть $\varphi_1(x)$ — предельные изнутри области Ω_+ значения пористости на кривой $\tau = \tau_*(x)$, а $x = x(\tau;\tau_0)$ — характеристика первого уравнения системы (2.9), выходящая из произвольной точки $(x_l(\tau_0),\tau_0)$ подвижной границы. Как и выше, для восстановления значений пористости на указанной кривой будем использовать соотношение (2.12). Для определения правой части (2.12) используем подобное (2.13) равенство

$$\varphi(x,\tau) = \varphi_* + [\varphi_1(x) - \varphi_*]\exp\Big(-\frac{1}{\delta}\int\limits_{\tau_*(x)}^{\tau} c(x,z)\,dz\Big), \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x;0).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем аналогичное (2.14) выражение для $\partial\varphi/\partial x$. В свою очередь производную $\partial\varphi/\partial\tau$ выразим из второго уравнения системы (2.9). Подставляя найденные таким способом выражения в правую часть равенства (2.12), используя уравнение (2.15) и учитывая соотношение на характеристике $\varphi\,dx = d\tau$, а также определение (2.22) зависимости $\tau_*(x)$, находим $g = (\varphi - \varphi_*)[\varphi_1'/(\varphi_1 - \varphi_*) - (\varphi - \varphi_1)/\delta]/\varphi$. Это означает, что в области зависимости решения от граничных данных справедливо дифференциальное уравнение (2.16), если в нем $f(x)$ заменить функцией $f_1(x) = \varphi_1'(x)/(\varphi_1(x) - \varphi_*) + (\varphi_1(x) - \varphi_*)/\delta$. Однако, так как $\varphi_1(x)$ — решение уравнения (2.16), то $f_1(x) = f(x)$, т. е. и в области зависимости решения от граничных данных распределение пористости на характеристике удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.16). Решая (2.16), находим

$$\varphi(x; x_l) = \varphi_* + \Phi(x; x_l) \Big/ \Big(\frac{\varphi_0(x_l) - \varphi_*}{\varphi_l(x_l) - \varphi_*} + \frac{1}{\delta} \int\limits_{x_l}^{x} \Phi(y; x_l)\, dy\Big). \qquad (2.23)$$

Здесь x_l — расположенная на подвижной границе точка, из которой выходит характеристика; $\varphi_l(x) = \varphi(x; \tau_l(x))$ — значение пористости на этой кривой. Различие между представлениями (2.23) и (2.17) состоит в том, что первое из них включает заранее неизвестное значение $\varphi_l(x_l)$. Чтобы найти $\varphi_l(x_l)$, вместо соотношения (2.12) используем равенство

$$\frac{d\varphi_l}{dx} = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{d\tau_l}{dx}\Big)\Big|_{\tau=\tau_l}.$$

Затем, как и при определении правой части g соотношения (2.12), производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial\tau$ заменим соответствующими им представлениями. Учитывая дифференциальное соотношение (2.15), а также граничное условие (2.11), в результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi_l}{dx} = (\varphi_l - \varphi_*)\Big\{\frac{\varphi_1'}{\varphi_1 - \varphi_*} - \frac{1}{\delta}\Big[\varphi_l - \varphi_1 + c_l\Big(\frac{d\tau_l}{dx} - \varphi_l\Big)\Big]\Big\}.$$

Используя в полученном уравнении выражение (2.16) для функции $f(x)$ и тот факт, что $\varphi_1(x)$ является решением уравнения (2.16), имеем

$$\frac{d\varphi_l}{dx} = -\frac{\varphi_l - \varphi_*}{\delta}\, [(1 - c_l)(\varphi_l - \varphi_*) + f_l(x)], \qquad (2.24)$$

где функция $f_l(x)$ задается выражением

$$f_l(x) = c_l \frac{d\tau_l}{dx} + (1 - c_l)\varphi_* - (1 - c_0)\varphi_0 - \frac{\delta\varphi_0'}{\varphi_0 - \varphi_*}. \qquad (2.25)$$

Решение уравнения (2.24), (2.25) построим прежним способом, сводя его к линейному. В результате распределение пористости вдоль подвижной границы описывается представлением

$$\varphi_l(x) = \varphi_* + \Phi_l(x) \Big/ \Big(1 + \frac{1}{\delta} \int\limits_0^x [1 - c_l(y)]\Phi_l(y)\, dy\Big). \qquad (2.26)$$

Входящая в указанное представление функция $\Phi_l(x)$ задается выражением

$$\Phi_l(x) = \Phi(x; 0) \exp\Big(-\frac{1}{\delta} \int\limits_0^x c_l(y)[\tau_l'(y) - \varphi_*]\, dy\Big). \qquad (2.27)$$

Таким образом, если зависимость $\tau_l(x)$ известна, то в соответствии с выражениями (2.26), (2.27) сначала вычисляется значение пористости $\varphi_l(x_l)$ в начальной точке $(x_l, \tau_l(x_l))$ характеристики $\tau = \tau(x; x_l)$. Затем это значение подставляется в представление (2.23), (2.17), после чего строится распределение пористости $\varphi(x; x_l)$ вдоль кривой $\tau = \tau(x; x_l)$.

Распределение концентрации вдоль характеристики находится, как и выше, с использованием дифференциального соотношения, соответствующего первому уравнению системы (2.9). Приведем лишь конечный результат, а именно представление

$$c(x; x_l) = \frac{c_l(x_l)[\varphi(x; x_l) - \varphi_*]}{[1 - c_l(x_l)]\Phi(x; x_l)(\varphi_l(x_l) - \varphi_*)/(\varphi_0(x_l) - \varphi_*) + c_l(x_l)[\varphi(x; x_l) - \varphi_*]}. \qquad (2.28)$$

В свою очередь характеристику, выходящую из точки $(x_l, \tau_l(x_l))$, можно определить из соотношения

$$\tau = \tau_l(x_l) + \int\limits_{x_l}^{x} \varphi(y; x_l)\, dy. \tag{2.29}$$

Однако для исследования области определения построенного решения, а также для изучения его свойств целесообразно использовать другую его форму. Для этого выражение $\varphi(x; x_l)$ под интегралом в правой части равенства (2.29) заменим выражением (2.23) и определим вспомогательную функцию $G_l(x; x_l)$ по формуле

$$G_l(x; x_l) = \varphi_*(x - x_l) + \delta \ln \Big(1 + \frac{1}{\delta}\, \frac{\varphi_l(x_l) - \varphi_*}{\varphi_0(x_l) - \varphi_*} \int\limits_{x_l}^{x} \Phi(y; x_l)\, dy\Big). \tag{2.30}$$

В результате соотношение (2.29) принимает форму уравнения, из которого можно определить зависимость $x_l = x_l(x, \tau)$:

$$x_l = x_l(x, \tau): \qquad \tau - \tau_l(x_l) - G_l(x; x_l) = 0. \tag{2.31}$$

Разрешимость уравнения (2.31) исследуем в области $\Omega_- = \{\tau_*(x) < \tau < \tau_l(x),\ x > 0\}$. Для этого потребуем непрерывности граничного значения концентрации $c_l(x)$ и гладкости кривой $\tau_l(x)$. Тогда согласно (2.27), (2.26), (2.17) непрерывным будет также граничное значение пористости $\varphi_l(x)$. Из этого замечания и из (2.30) следует непрерывность по x_l функции $G_l(x; x_l)$. При этом в левом конце интервала $(0, x)$, на котором изменяется переменная x_l, указанная функция равна

$$G_l(x; 0) = \varphi_* x + \delta \ln \Big(1 + \frac{1}{\delta} \int\limits_{0}^{x} \Phi(y; 0)\, dy\Big).$$

Сравнение данного представления с выражениями (2.22), (2.20) показывает, что $G_l(x; 0) = \tau_*(x)$, поэтому при $x_l = 0$ левая часть уравнения (2.31) будет положительной. В то же время в соответствии с определением (2.30) имеем $G_l(x; x) = 0$, поэтому левая часть уравнения (2.31) равна $\tau - \tau_l(x)$, т. е. отрицательна. Из сказанного выше следует существование решения $x_l(x, \tau)$ уравнения (2.31) в области Ω_-.

Для анализа единственности целесообразно использовать подстановку

$$\Psi(x; x_l) = u(x_l) \int\limits_{x_l}^{x} \Phi(y; x_l)\, dy \quad (x_l < x), \qquad u(x) = \frac{\varphi_l(x) - \varphi_*}{\varphi_0(x) - \varphi_*}. \tag{2.32}$$

При этом в соответствии с выражениями (2.26), (2.27), (2.17) имеем

$$\begin{gathered} u(x) = w(x) \Big/ \Big(1 + \frac{1}{\delta} \int\limits_{0}^{x} [1 - c_l(y)][\varphi_0(y) - \varphi_*] w(y)\, dy\Big), \\ w(x) = \exp\Big(-\frac{1}{\delta} \int\limits_{0}^{x} [c_l(\tau_l' - \varphi_*) - u_0]\, dy\Big). \end{gathered} \tag{2.33}$$

Значит, функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема, что в силу представлений (2.32), (2.17) обусловливает гладкость функции $\Psi(x; x_l)$ относительно второго аргумента. Однако, поскольку справедливо равенство

$$G_l(x; x_l) = \varphi_*(x - x_l) + \delta \ln\left(1 + \delta^{-1} \Psi(x; x_l)\right), \tag{2.34}$$

непрерывно дифференцируемой по x_l будет также функция G_l. Поэтому тем же свойством обладает и левая часть уравнения (2.31).

Отметим, что выражение для частной производной $\partial\Psi/\partial x_l$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_l} = -\frac{\Psi(x;x_l)}{\delta}\Big[(1-c_l(x_l))(\varphi_0(x_l)-\varphi_*)u(x_l)+c_l(x_l)\Big(\frac{d\tau_l}{dx}(x_l)-\varphi_*\Big)\Big]-u(x_l)(\varphi_0(x_l)-\varphi_*).$$

С учетом полученного выражения и равенства (2.34) находим искомое соотношение

$$\frac{\partial\,[\tau_l(x_l)+G_l(x;x_l)]}{\partial x_l} = \frac{1+(1-c_l(x_l))\Psi(x;x_l)/\delta}{1+\Psi(x;x_l)/\delta}\Big(\frac{d\tau_l(x_l)}{dx_l}-\varphi_l(x_l)\Big). \qquad (2.35)$$

Предположим, что выполнено неравенство

$$\frac{d\tau_l}{dx}(x) > \varphi_l(x), \qquad (2.36)$$

из которого следует неотрицательность правой части соотношения (2.35). Тогда левая часть уравнения (2.31) — монотонно убывающая функция параметра x_l и в каждой точке (x,τ) области Ω_- уравнение (2.31) имеет только одно решение $x_l(x,\tau)$. Подставляя это решение в выражения (2.26), (2.27), (2.23), (2.17) и (2.28), в области зависимости решения задачи от граничных данных получаем искомые распределения пористости и концентрации в виде непрерывных функций x и τ. Из сказанного выше следует также существование у зависимости $x_l = x_l(x,\tau)$ непрерывной частной производной первого порядка по τ. То же справедливо и для производной $\partial x_l/\partial x$, если в уравнение (2.31) подставить представление (2.34) для функции $G_l(x;x_l)$.

Заметим, что выражение (2.23) можно записать через функции $u(x)$ и $\Psi(x;x_l)$ из (2.32):

$$\varphi(x;x_l) = \varphi_* + \frac{u(x_l)\Phi(x;x_l)}{1+\Psi(x;x_l)/\delta}. \qquad (2.37)$$

Правая часть этого представления непрерывно дифференцируема по x_l, но по x она является такой же гладкой, как и начальное распределение $\varphi_0(x)$. Поэтому при сформулированных выше ограничениях у функции $\varphi(x,\tau)$ непрерывной будет только частная производная первого порядка по τ. Для распределения концентрации удобнее использовать представление (2.28), записав его через функции $u(x)$ и $\Psi(x;x_l)$ из (2.32). Если в полученном выражении учесть представление (2.37), то значения концентрации на характеристике можно описать формулой

$$c(x;x_l) = \frac{c_l(x_l)u(x_l)}{[1-c_l(x_l)][1+\Psi(x;x_l)/\delta]+c_l(x_l)u(x_l)}. \qquad (2.38)$$

В этом представлении в соответствии с определением (2.32) функция $\Psi(x;x_l)$ непрерывно дифференцируема по x. Следовательно, зависимость $c(x,\tau) = c(x;x_l(x,\tau))$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по x и τ лишь в том случае, если непрерывно дифференцируемо граничное значение $c_l(x)$.

Таким образом, в предположении гладкости подвижной границы, непрерывности начального значения пористости, непрерывной дифференцируемости граничного и начального значений концентрации, а также при выполнении неравенства (2.36) классическое решение смешанной задачи (2.9)–(2.11) существует, единственно и задается описанными выше представлениями. Что касается неравенства (2.36), то его смысл достаточно ясен: согласно этому неравенству характеристика, выпущенная из произвольной точки (x_0,τ_0) подвижной границы, при $x > x_0$ или $\tau > \tau_0$ должна входить внутрь приграничной зоны. Вместе с тем распределение пористости вдоль указанной границы заранее неизвестно, причем в силу сказанного выше оно представляет собой нелинейный функционал относительно $\tau_l(x)$. Поэтому поиск условий, гарантирующих выполнение ограничения (2.36), в общем случае оказывается достаточно сложной задачей. Однако существует частный случай, простой с точки зрения проверки условия (2.36), но очень важный для выяснения особенностей принятой модели. Предположим, что в переменных (x, τ) подвижная граница представляет собой прямую линию:

$$\tau_l(x) = \sigma x, \qquad \sigma \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{2.39}$$

В случае если начальные данные и граничное значение являются постоянными величинами, полученное представление решения в области зависимости его от начальных данных упрощается. По аналогии с работой [6] можно в некотором смысле исключить параметр x_0 из выражений (2.17), (2.18). Тогда выражение (2.22) для фронта проникновения взвеси принимает форму

$$\tau_*(x) = (\varphi_* + u_0)x + \delta \ln \frac{1}{s_*(x)}, \quad s_*(x) = \frac{s_0}{1 - (1 - s_0)\exp(-u_0 x/\delta)}, \quad s_0 = \frac{u_0}{\varphi_0 - \varphi_*}, \tag{2.40}$$

представления (2.17), (2.18) приводятся к виду

$$\varphi = \varphi_* + s(\varphi - \varphi_*), \quad s(x,\tau) = S\Big(\frac{u_0}{\varphi_*}\,\frac{\tau}{\delta}\Big), \quad c = c_0 \frac{s - s_0}{s - s_0 + (1 - c_0)(1 - s)}, \tag{2.41}$$

а уравнение (2.20), (2.21) преобразуется в определение функции $S(y)$ с помощью соотношения

$$s\Big(\frac{1 - s_0}{s - s_0}\Big)^{1 + u_0/\varphi_*} = \mathrm{e}^y, \qquad s \in [s_0, 1]. \tag{2.42}$$

Следует отметить, что в соответствии с выражениями (2.40)–(2.42) пористость и концентрация не зависят от x. В силу (2.8) получаем пример течения, свойства которого зависят только от времени, причем, возможно, только на ограниченном промежутке его изменения. Однако такое поведение решения невозможно в рамках приближения (1.7), так как в этом случае концентрация также отлична от нуля. В реальных ситуациях длина свободного пробега частицы l_0, а значит, и определенного в (1.10) параметра δ малы. Таким образом, даже при конечных значениях интегрального расхода τ аргумент функции $S(y)$ представления (2.41) оказывается достаточно большим и решение уравнения (2.42) сравнительно быстро выходит на предельное значение $s = s_0$. В результате коэффициент при производной по времени в левой части уравнения (1.3) достаточно быстро изменяется от φ_0 до предельного значения $\varphi_0(1 - c_0)$. Следовательно, если начальная концентрация взвеси мала, то в расположенной перед фронтом вытеснения зоне достаточно точными являются приближения типа уравнения (1.3).

Возвращаясь к исследованию режимов течения, возможных при выполнении равенства (2.39), ограничимся для краткости начальными значениями концентрации, для которых $u_0 > 0$. Простейшему из указанных режимов соответствует неравенство

$$\sigma \leqslant \varphi_0(1 - c_0). \tag{2.43}$$

Можно показать, что определяемая выражением (2.40) функция $\tau_*(x)$ является выпуклой вверх и монотонно возрастает, имея в качестве асимптоты прямую

$$\tau = \tau_\infty(x) = \varphi_0(1 - c_0)x - \delta \ln s_0.$$

Поэтому при выполнении неравенства (2.43) подвижная граница будет опережать фронт проникновения, что соответствует высоким скоростям срезания, когда область течения представляет собой только часть полной области зависимости решения от начальных данных. В этом случае приграничная зона не образуется, входная концентрация не оказывает влияния на поток, поэтому ограничение (2.36) не требуется.

Рассмотрим режим течения, описываемый неравенствами
$$\varphi_0(1 - c_0) < \sigma < \varphi_0, \tag{2.44}$$
с учетом вытекающего из представления (2.40) равенства $\tau'_*(0) = \varphi_0$. В этом случае существует единственная точка (x_1, τ_1) пересечения кривых $\tau = \tau_*(x)$ и $\tau = \sigma x$. Анализ уравнения (2.42) и функции $s_*(x)$ позволяет сделать вывод, что на характеристике $\tau = \tau_*(x)$ значения пористости равны $\varphi_* + (\varphi_0 - \varphi_*)s_*(x)$. Значит, в точке (x_1, τ_1) ограничение (2.36) выполняется. При $\tau > \tau_1$ получаем описанную выше начально-краевую задачу для системы (2.9) с начальными данными (2.10), вообще говоря, общего вида. Однако в данном случае, когда пористость и концентрация при $\tau < \tau_1$ не зависят от x, в качестве новых начальных значений имеем $\varphi_0 = \varphi(\tau_1)$, $c_0 = c(\tau_1)$. Поэтому в области зависимости решения от начальных данных при $\tau > \tau_1$ сохраняются прежние представления (2.40)–(2.42). Для приграничной зоны в представлениях (2.23), (2.26)–(2.28) достаточно в качестве x_0 выбрать x_1. Не приводя подробных преобразований, отметим, что для построенных указанным выше способом зависимостей функция $\varphi_l(x)$ оказывается монотонно убывающей, поэтому ограничение (2.36) будет выполнено при всех $x \geqslant x_1$.

Последний из возможных режимов течения характеризуется неравенством
$$\varphi_0 \leqslant \sigma. \tag{2.45}$$
В этом случае приграничная зона присутствует при всех $\tau > 0$. Решение в расположенной перед фронтом проникновения части области течения определяется зависимостями (2.40)–(2.42). Решение внутри приграничной зоны является частным случаем представлений (2.23), (2.26)–(2.28) и уравнения (2.31), (2.30). В этой зоне граничное значение $\varphi_l(x)$ монотонно уменьшается, что гарантирует выполнение ограничения (2.36) во всех точках подвижной границы.

В заключение отметим еще одну особенность описанных режимов — существование характерного для параметра σ значения σ_0, определяемого по формуле
$$\sigma_* = \frac{(1 - c_0)\varphi_0 - \varphi_*}{c_l}. \tag{2.46}$$
Нетрудно проверить, что значение σ_* равно количеству взвеси, которое необходимо пропустить сквозь пористую среду, чтобы пористость последней уменьшилась до минимального значения φ_*. Однако, поскольку неравенства $\sigma_* > \varphi_0(1 - c_0)$ и $u_0 > 0$ эквивалентны, причем последнее в большинстве случаев выполняется, течения с $\sigma = \sigma_*$ удовлетворяют условию (2.44) или (2.45). Отметим, что при выполнении неравенства $\sigma < \sigma_*$ с увеличением τ пористость на подвижной границе относительно быстро приближается к значению $\varphi_0(1 - c_0)$. Следовательно, в условиях меньшей по сравнению со случаем (2.44) скорости срезания слоя течение также стремится выйти на тот режим, который определяется в основном начальным состоянием. При $\sigma > \sigma_*$ пористость на подвижной границе и вблизи нее достаточно быстро достигает минимального возможного значения φ_*, но при этом в передней части приграничной зоны определяющим остается начальное состояние. Следовательно, при умеренных скоростях смещения подвижной границы, по крайней мере в одной из частей приграничной зоны, диапазон значений пористости уже не является малой величиной, поэтому использовать приближения типа уравнения (1.3) в этих условиях не представляется возможным.

Заключение. В работе предложена постановка задачи, описывающей изменения свойств пористой среды в процессе кольматации в условиях перемещения входной границы. В плоскости переменных продольная координата — интегральный расход найдено параметрическое представление решения, которое при естественных условиях гладкости начальных и граничных данных позволяет получить искомые распределения характеристик среды и потока во всей области течения. На специальном классе подвижных границ исследованы возможные режимы течения. Установлено существование характерного значения скорости смещения границы, при переходе через которое предельные состояния потока резко изменяются. Рассмотренный класс подвижных границ служит основой построения итерационного процесса численного решения описанной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жужиков В. А.** Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. М.: Химия, 1971.
2. **Шехтман Ю. М.** Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. **Маковей Н.** Гидравлика бурения. М.: Недра, 1986.
4. **Михайлов Н. Н.** Изменение физических свойств горных пород в околоскважинных зонах. М.: Недра, 1987.
5. **Herzig J. P., Leclerc D. M., le Goff P.** Flow of suspensions through porous media-application to deep filtration // Industr. Engng Chem. 1970. V. 62, N 5. P. 8–35.
6. **Капранов Ю. И.** О фильтрации взвеси твердых частиц // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 4. С. 620–628.
7. **Litwyniszhyn J.** On suspension flow in a porous medium // Intern. J. Engng Sci. 1967. V. 5, N 5. P. 435–454.
8. **Развитие** исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969.
9. **Iwasaki T.** Some notes on sand filtration // J. Amer. Water Works Assoc. 1937. V. 29, N 10. P. 1591–1602.
10. **Ives K. J.** Deep filters // Filtrat. Separat. 1967. V. 4, N 2. P. 125–134.
11. **Litwiniszyn J.** Colmatage considered as a certain stochastic process // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. techn. 1963. V. 11, N 3. P. 81.
12. **Gruesbeck C., Collins R. E.** Entrainment and deposition of fine particles in porous media // SPE J. 1982. N 12. P. 847–856.
13. **Свалов А. М.** Механика процессов бурения и нефтегазодобычи. М.: Кн. дом “Либроком”, 2008.

Поступила в редакцию 1/X 2010 г.,
в окончательном варианте — 10/XII 2010 г.