

УДК 532.529

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ КЛАСТЕРНОЙ СТРУКТУРЫ

В. Е. Донцов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: dontsov@itp.nsc.ru

Экспериментально исследовано распространение ударной волны ступенчатой формы в жидкости, содержащей сферические газожидкостные кластеры. Результаты измерений сопоставлены с известными теоретическими моделями. Показано, что резонансное взаимодействие газожидкостных кластеров в волне может приводить к усилению амплитуды осцилляций в ударной волне.

Ключевые слова: ударная волна, газожидкостный кластер.

Распространение волн давления в жидкости с пузырьками газа достаточно подробно исследовалось теоретически и экспериментально [1–9]. Показано, что нелинейное возмущение конечной длительности в жидкости с пузырьками газа распадается на уединенные волны — солитоны. Ударные волны в пузырьковых средах могут иметь осциллирующую структуру. Изучены эволюция, структура и затухание волн. В экспериментах [10–12] обнаружен и исследован новый тип волновых структур — мультисолитоны, в жидкости с пузырьками газа двух размеров при различных соотношениях радиусов пузырьков. Влияние неоднородности газожидкостной смеси и сжимаемости жидкости на структуру волны давления исследовалось в работах [13, 14]. В [15, 16] экспериментально изучены структура и затухание волн давления умеренной амплитуды в жидкости с пузырьками двух разных газов и в пузырьковых средах с расслоенной структурой. Генерация импульсов давления большой мощности сферическими пузырьковыми кластерами численно исследовалась в [17], где впервые предложена постановка задачи и объяснен механизм усиления ударных волн сферическим пузырьковым кластером. В [18] экспериментально изучено взаимодействие плоской ударной волны со сферическим пузырьковым кластером в жидкости.

В данной работе экспериментально исследованы эволюция и структура ударной волны умеренной амплитуды в жидкости, содержащей пузырьковые кластеры.

Опыты проводились на установке “ударная труба” (рис. 1). Рабочий участок представлял собой вертикально расположенную толстостенную стальную трубу внутренним диаметром 53 мм и длиной 1 м. На оси вдоль рабочего участка располагалась проволока из нержавеющей стали диаметром 1 мм, концы которой крепились к стенкам рабочего участка. Рабочий участок частично заполнялся жидкостью под вакуумом, что позволяло избежать появления пузырьков газа в жидкости. В качестве рабочей жидкости использовалась дистиллированная вода. В рабочем участке вода насыщалась воздухом до равновесного состояния при комнатной температуре и атмосферном давлении, при которых и

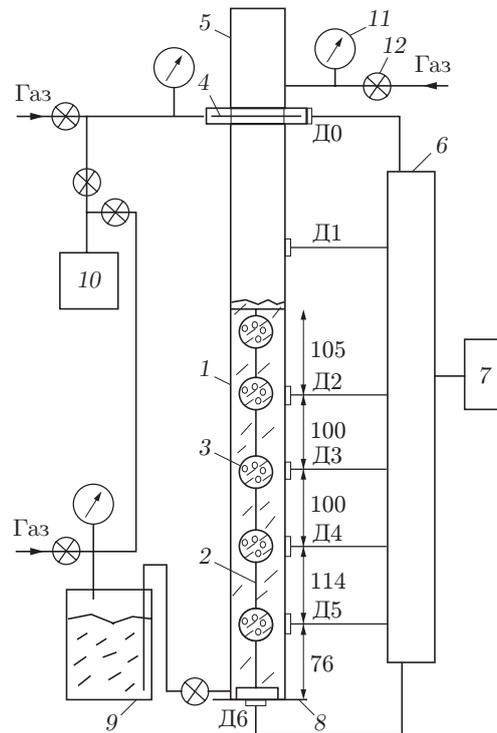


Рис. 1. Схема установки:

1 — рабочий участок; 2 — тонкая проволока; 3 — газожидкостный кластер; 4 — диафрагма; 5 — камера высокого давления; 6 — аналого-цифровой преобразователь; 7 — компьютер; 8 — дно рабочего участка; 9 — заливочная емкость; 10 — вакуумный насос; 11 — манометры, мановакуумметры; 12 — краны; Д0–Д6 — датчики давления

были проведены опыты. На проволоку по центру надевались пять пузырьковых кластеров — поролоновых шариков диаметром 30 мм, заполненных жидкостью с пузырьками газа. Верхний край верхнего кластера находился на расстоянии 10 мм от поверхности жидкости. Центры остальных кластеров располагались точно напротив датчиков давления Д2–Д5.

Пузырьковые кластеры готовились на дополнительной установке следующим образом. Поролоновые шарики помещались в рабочий объем установки и насыщались дистиллированной водой под вакуумом. Далее через жидкость в рабочем объеме прокачивались воздушные пузырьки при повышенном (по сравнению с атмосферным) статическом давлении. Жидкость в рабочем объеме насыщалась воздухом до равновесного состояния при данном статическом давлении, и вследствие диффузии газ растворялся внутри поролоновых шариков. Время выравнивания концентрации растворенного в жидкости газа на поверхности и в центре шарика $\tau \approx 15$ ч ($\tau \approx R^2/(2D)$ [19], R — радиус кластера, D — коэффициент диффузии). После сброса статического давления до атмосферного происходило выделение газовых пузырьков из жидкости. Они прилипали к поролоновому скелету и формировали газожидкостный кластер.

Отметим, что пористость поролонового шарика достаточно велика (около 98 %), а жесткость мала, и пористый скелет не оказывал влияния на распространение волны давления [20].

Считая процесс образования зародышей газовых пузырьков в кластере при сбросе статического давления гетерогенным, что справедливо для обычной дистиллированной воды, можно оценить критический радиус зародыша, с которого начинается его рост,

и далее — размер пузырька, до которого вырастает зародыш при сбросе статического давления [4, 20]. Для воздушных пузырьков диаметр $d \approx 10^{-4}$ м. Однако на поверхности кластера наблюдались пузырьки газа размером вплоть до $d \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м, что могло быть обусловлено слиянием пузырьков в процессе их роста после сброса статического давления.

Изменяя величину сброса статического давления, можно изменять начальное объемное газосодержание в кластерах φ_c . Среднее объемное газосодержание в кластерах определялось по увеличению объема жидкости при уменьшении начального статического давления в среде и объему кластеров [20].

Волны давления ступенчатой формы возникали в воздухе при разрыве диафрагмы, разделяющей камеру высокого давления и рабочий участок, и далее распространялись в жидкость. Профили волн давления регистрировались пьезоэлектрическими датчиками давления, расположенными на боковой поверхности (Д1–Д5) и на дне рабочего участка (Д6), вставленными заподлицо с внутренней поверхностью рабочего участка. Д0 — датчик для запуска аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Сигналы с датчиков подавались на АЦП и далее обрабатывались на компьютере.

На рис. 2 показаны профили волн давления во времени на разных расстояниях x от входа ударной волны в среду для различных начальных амплитуд волн и начальных объемных газосодержаний в кластерах. Здесь ΔP_0 — амплитуда ударной волны, входящей в жидкость. Она равна амплитуде воздушной ударной волны, отраженной от поверхности жидкости (рис. 2, а, $x < 0$); ΔP_{\max} — амплитуда первой осцилляции волны давления в жидкости; P_0 — начальное статическое давление в среде. Над профилями волн показаны их амплитуды, а под ними дан временной масштаб. Датчик на расстоянии $x = 0,495$ м (рис. 2, б) от входа волны в среду заделан заподлицо с дном рабочего участка и регистрирует отраженную от дна волну. Видно, что из начальной волны ступенчатого профиля уже на втором пузырьковом кластере формируется осциллирующая ударная волна (рис. 2, а, $x = 0,105$ м). Как и для гомогенной пузырьковой смеси [3], амплитуда первой осцилляции в полтора раза превышает среднее давление в волне для малых амплитуд волн. На рис. 2, а ($x = 0,205$ и $0,305$ м) приведено сравнение формы первой осцилляции ударной волны (линия 1) с формой солитона той же амплитуды, рассчитанного по уравнению Буссинеска для газожидкостной среды (линия 2) [3]:

$$\Delta P(t) = \Delta P_{\max} \sec h^2(t/\Delta t_B); \quad (1)$$

$$\Delta t_B = (6\beta/(B\Delta P_{\max}))^{0,5}. \quad (2)$$

Здесь Δt_B — полуширина расчетного солитона Буссинеска, равная длительности волны от уровня $0,42\Delta P_{\max}$ до максимального значения давления в волне ΔP_{\max} ; β , B — коэффициенты дисперсии и нелинейности соответственно. Для газожидкостной среды кластерной структуры выражения для коэффициентов при изотермическом поведении газа в пузырьках имеют вид [21]

$$\beta = R^2 \frac{1 + 0,2(1 - \varphi_c)}{3\varphi_0(1 - \varphi_0\varphi_c)}, \quad B = \frac{1 - \varphi_0\varphi_c}{(\rho_1(1 - \varphi_0) + \rho_2\varphi_0)\varphi_0\varphi_c},$$

где φ_0 — объемное содержание кластеров в среде; ρ_1 , ρ_2 — плотности жидкости и газа соответственно. В отличие от гомогенной пузырьковой среды дисперсия в газожидкостной среде кластерной структуры определяется радиусом кластера R и объемным содержанием кластеров в среде φ_0 [21]. Видно, что, как и для гомогенных пузырьковых сред [3], форма первой осцилляции ударной волны близка к форме солитона для малых амплитуд волн. Отклонение экспериментального профиля от расчетной формы солитона может быть обусловлено двумя причинами. Во-первых, на данных расстояниях осциллирующая ударная волна могла еще полностью не сформироваться. Во-вторых, в опытах не выполнялось

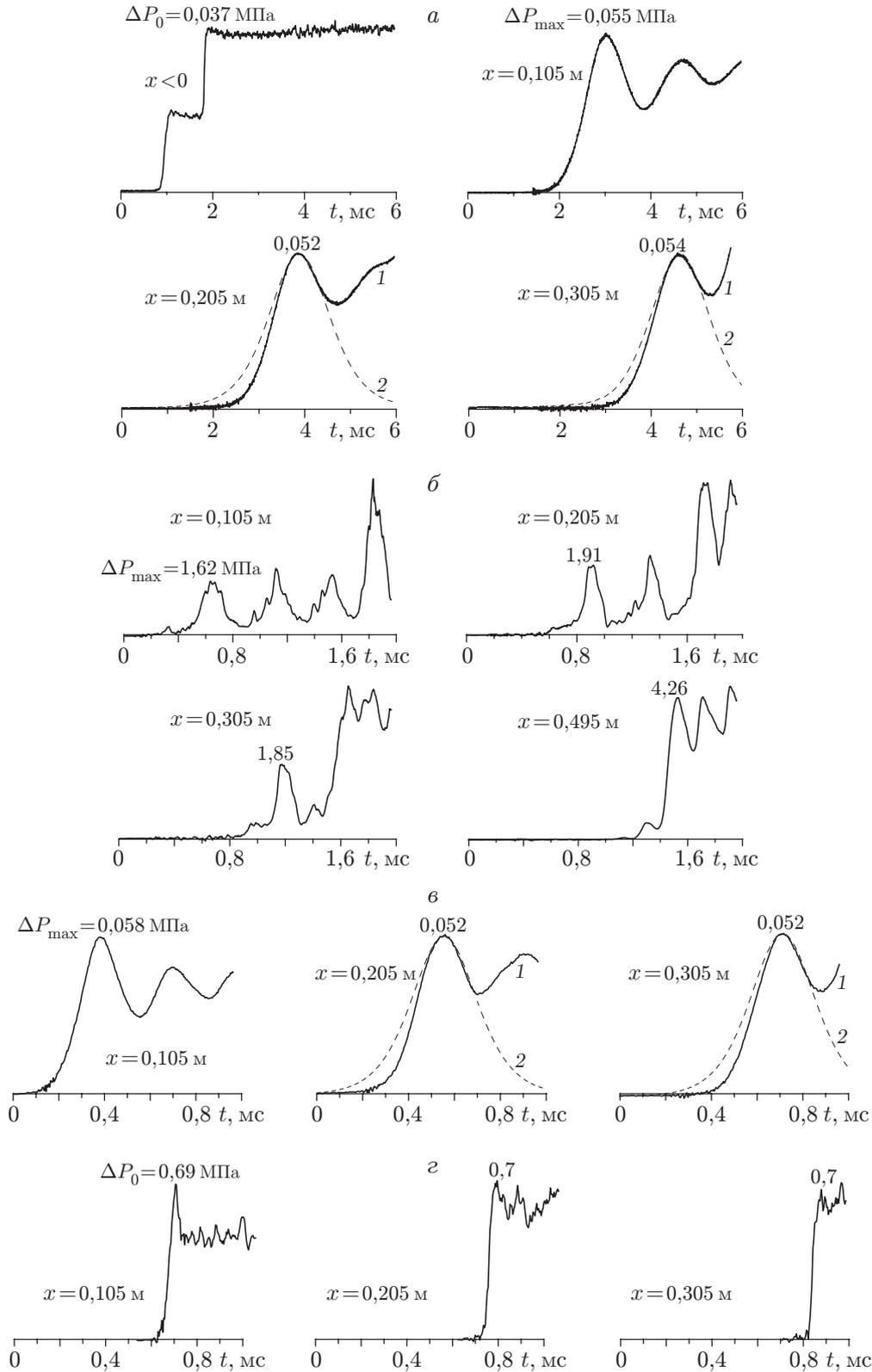


Рис. 2. Эволюция ударной волны в газожидкостной среде кластерной структуры: *a, б* — $P_0 = 0,101$ МПа, $\varphi_0 = 7,5\%$, $\varphi_c = 9,8\%$; *a* — $\Delta P_0 = 0,037$ МПа (1 — эксперимент, 2 — расчет по (1), (2)); *б* — $\Delta P_0 = 0,83$ МПа; *в, з* — $P_0 = 0,1$ МПа, $\varphi_0 = 7,5\%$, $\varphi_c = 0,38\%$; *в* — $\Delta P_0 = 0,037$ МПа (1 — эксперимент, 2 — расчет по (1), (2)); *з* — $\Delta P_0 = 0,69$ МПа

условие длинноволнового приближения для уравнения Буссинеска в газожидкостных средах, а именно: длина волны должна быть много больше размера кластера и расстояния между ними.

С увеличением амплитуды входящей в среду волны длительность осцилляций уменьшается и осциллирующая ударная волна начинает распадаться на уединенные волны. На рис. 2,б уединенные волны еще связаны между собой, их амплитуда почти в 2 раза превышает среднее давление в падающей ударной волне. В результате нелинейного отражения от жесткого дна амплитуда волны значительно увеличивается (см. рис. 2,б, $x = 0,495$ м). Характерной особенностью для волн большой амплитуды является формирование предвестника перед основным сигналом (рис. 2,б, $x = 0,205, 0,305$ м). Отметим, что он отличается от предвестника в пузырьковых жидкостях, распространяющегося со скоростью звука в чистой жидкости. Предвестник в данной работе формируется, по-видимому, высокочастотными пульсациями, образующимися при нелинейных колебаниях кластеров в жидкости и имеющими большую скорость, чем скорость основной волны. Скорость предвестника близка к адиабатической, а скорость основной волны, как будет показано далее, равна изотермической скорости.

С уменьшением начального объемного газосодержания в кластере длительность осцилляций в осциллирующей ударной волне при одинаковых амплитудах волн уменьшается (рис. 2,в и 2,а), в то время как для гомогенной пузырьковой структуры длительность осцилляций не зависит от объемного газосодержания и определяется только размером пузырьков и амплитудой волны [3]. Линией 2 на рис. 2,в показана расчетная форма солитона. Видно, что структура первой осцилляции ударной волны близка к форме солитона для малых амплитуд волн.

С увеличением амплитуды волны в среде с малым значением начального объемного газосодержания в кластерах влияние нелинейности преобладает над дисперсией, и входящая в среду волна при распространении практически сохраняет свою ступенчатую форму (рис. 2,г).

На рис. 3 представлены зависимости скорости ударной волны U в газожидкостной среде кластерной структуры от ее амплитуды (c_0 — скорость звука в газожидкостной смеси, c_1 — скорость звука в жидкости). Точки 1, 2 соответствуют экспериментальным значениям скорости ударной волны в среде с достаточно большим объемным газосодержанием, когда сжимаемость жидкости не оказывает существенного влияния на скорость волны. Скорость ударной волны определялась по времени прихода пика первой осцилляции на два соседних датчика (Д3 и Д4) и расстоянию между ними. Скорость звука в газожидкостной среде кластерной структуры для изотермического поведения газа в пузырьках вычислялась по гомогенной [3] и кластерной [21] моделям соответственно:

$$c_0 = \left(\frac{P_0}{(\rho_1(1 - \varphi_0\varphi_c) + \rho_2\varphi_0\varphi_c)\varphi_0\varphi_c} \right)^{0,5}; \quad (3)$$

$$c_0 = \left(\frac{P_0}{(\rho_1(1 - \varphi_0) + \rho_2\varphi_0)\varphi_0\varphi_c} \right)^{0,5}. \quad (4)$$

Точки 1 соответствуют гомогенной модели (3), точки 2 — кластерной модели (4). Для малых значений объемных содержаний кластеров в среде φ_0 скорости звука по моделям (3) и (4) близки, и, соответственно, опытные точки 1 и 2 близки для соответствующих амплитуд волн. Линией 3 представлен расчет по изотермической модели для скорости ударной волны [3, 4]:

$$U/c_0 = (1 + \Delta P_0/P_0)^{0,5}. \quad (5)$$

Видно, что изотермическое приближение для скорости ударной волны (5) хорошо описывает опытные данные (точки 1, 2). Действительно, если время тепловой релаксации газа

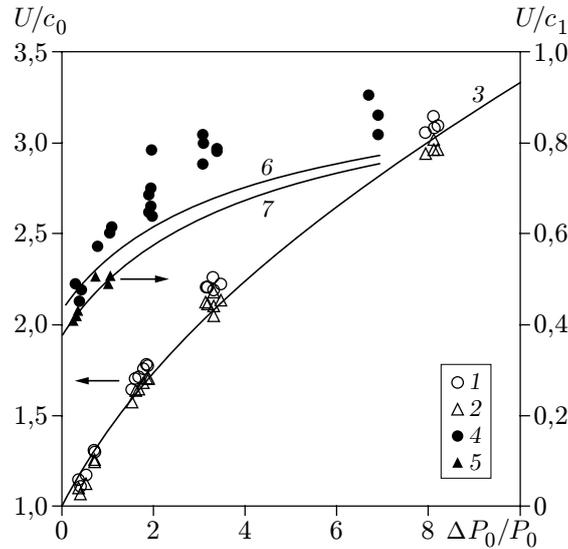


Рис. 3. Зависимость скорости ударной волны от ее амплитуды: $\varphi_0 = 7,5\%$, $\varphi_c = 8,4 \div 9,8\%$ (1, 2 — эксперимент, 3 — расчет по (5)); $\varphi_c = 0,38\%$ (4, 5 — эксперимент, 6, 7 — расчет по (6) и (7) соответственно)

в пузырьках, содержащихся в кластере, оценить как $\tau_0 = d^2/(4\pi^2 a)$ [4], то получим, что длительность переднего фронта осциллирующей ударной волны много больше τ_0 (a — коэффициент температуропроводности газа в пузырьках). Следовательно, поведение газа в пузырьках в переднем фронте волны близко к изотермическому. Определить же, какая из моделей для скорости звука — (3) или (4) — лучше соответствует эксперименту, невозможно, так как их различие находится в пределах погрешности измерения скорости волны.

Точки 4, 5 соответствуют опытным значениям скорости ударной волны в среде с достаточно малым объемным газосодержанием, когда сжимаемость жидкости существенно влияет на скорость волны. Скорость ударной волны определялась по времени прихода начала переднего фронта ударной волны (точки 4) и пика первой осцилляции (точки 5) на два соседних датчика (ДЗ и Д4). Линиями 6 и 7 представлены расчеты для скорости ударной волны с учетом сжимаемости жидкости по адиабатическому [22] и изотермическому [4] приближениям соответственно:

$$\frac{U}{c_1} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{\Delta P_0}{\rho_1(1 - \varphi_0\varphi_c)} \left(1 - \varphi_0\varphi_c \left(1 + \frac{\Delta P_0}{P_0} \right)^{-1/\gamma} - (1 - \varphi_0\varphi_c) \left(1 + \frac{\gamma^* \Delta P_0}{\rho_1 c_1^2} \right)^{-1/\gamma^*} \right)^{-1} \right)^{0,5}; \quad (6)$$

$$\frac{U}{c_1} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{P_0 + \Delta P_0}{\rho_1(1 - \varphi_0\varphi_c)\varphi_0\varphi_c} \frac{1 + \Delta P_0/(\rho_1 c_1^2)}{(1 + \Delta P_0/P_0 - \varphi_0\varphi_c)P_0/(\rho_1 c_1^2 \varphi_0\varphi_c)} \right)^{0,5} \quad (7)$$

(γ, γ^* — показатели адиабаты для газа и жидкости соответственно). Видно, что опытные значения скорости, определенные по пику первой осцилляции ударной волны (точки 5), хорошо описываются изотермическим приближением (7), а точки 4 (скорость определялась по началу фронта ударной волны) расположены ближе к адиабатическому приближению (6). Это обусловлено тем, что на начальном участке переднего фронта ударной волны поведение газа в пузырьках близко к адиабатическому. Отклонение опытных точек 4 от расчетной кривой 6 с увеличением амплитуды волны связано, по-видимому, с уменьшением начального объемного газосодержания в кластере в процессе эксперимента, т. е. после прохождения по среде ударной волны достаточно большой амплитуды происходит частичное выделение газовых пузырьков из кластера и уменьшение φ_c .

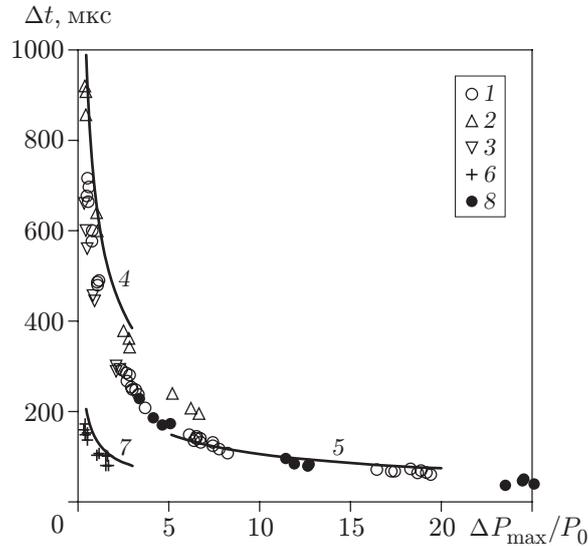


Рис. 4. Зависимость полуширины волны давления от ее амплитуды:

1–3, 6, 8 — эксперимент (1 — $\varphi_0 = 7,5\%$, $\varphi_c = 8,4 \div 9,8\%$; 2 — $\varphi_c = 10,3\%$; 3 — $\varphi_0 = 18,7\%$, $\varphi_c = 10,3\%$; 6 — $\varphi_0 = 7,5\%$, $\varphi_c = 0,38\%$; 8 — одиночный кластер, $\varphi_c = 12\%$); 4, 7 — расчет по (2) при $\varphi_c = 9,1\%$ и $\varphi_c = 0,38\%$ соответственно; 5 — расчет по формуле $\Delta t = 0,5\Delta t_B$

На рис. 4 точками 1–3, 6 представлены результаты измерения полуширины первой осцилляции ударной волны в газожидкостной среде кластерной структуры. Полуширина первой осцилляции, как и для солитона Буссинеска, это длительность волны от уровня $0,42\Delta P_{\max}$ до максимального значения давления в первой осцилляции ΔP_{\max} . Полуширина волны измерялась только по показаниям датчиков, стоящих у 3-го и 4-го кластеров, считая от входа волны в среду, т. е. когда осциллирующая ударная волна практически сформировалась. Точками 1 и 6 представлены данные для геометрии расположения кластеров, показанной на рис. 1. Точки 2 соответствуют полуширине волны с 4-го датчика в среде без 3-го кластера. Точки 3 соответствуют измерениям со 2-го датчика для среды с достаточно большим объемом содержанием кластеров (центры кластеров расположены на расстоянии 40 мм друг от друга, а первый сверху кластер сохраняет свое местоположение). Линиями 4 и 7 представлены результаты расчетов полуширины солитона по уравнению (2) для параметров среды, соответствующих эксперименту. Видно, что для достаточно однородных сред кластерной структуры (кластеры достаточно равномерно расположены в жидкости по длине рабочего участка) значения полуширины первых осцилляций одинаковы (точки 1 и 3). Отклонение точек 2 от опытных данных 1 и 3 обусловлено, по-видимому, влиянием существенной неоднородности кластерной структуры (3-й кластер был убран из среды). В случае малых амплитуд волн ($\Delta P_{\max}/P_0 \leq 1$), как и для однородных пузырьковых сред, расчет по уравнению (2) согласуется с опытными данными для соответствующих параметров среды (точки 1–3 и линия 4; точки 6 и линия 7). Отклонение экспериментальных данных от расчетов обусловлено, как было отмечено выше, нестационарностью и нарушением длинноволнового приближения в опытах.

В работе [23] показано, что полуширина уединенных волн с амплитудой $\Delta P_{\max}/P_0 \geq 5$ в однородной пузырьковой среде близка к величине $0,5\Delta t_B$. Экспериментальные точки 1 с амплитудой $\Delta P_{\max}/P_0 \geq 5$ для волн в газожидкостной среде кластерной структуры также хорошо обобщаются расчетной зависимостью 5 ($\Delta t = 0,5\Delta t_B$). Для сравнения на рис. 4 приведены экспериментальные значения полуширины уединенной волны — точ-

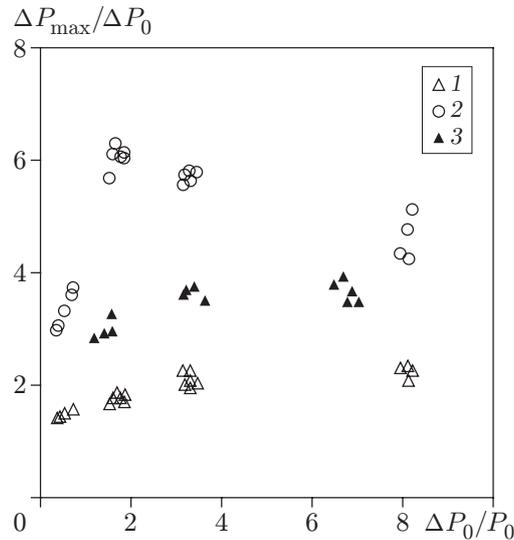


Рис. 5. Зависимость амплитуды первой осцилляции ударной волны в газожидкостной среде от амплитуды входящей в среду волны:

1, 2 — прямая и отраженная ударные волны соответственно ($\varphi_0 = 7,5 \%$, $\varphi_c = 8,4 \div 9,8 \%$); 3 — одиночный кластер ($\varphi_c = 12 \%$)

ки 8, формируемой в жидкости одиночным кластером того же размера [16]. Видно, что длительность первой осцилляции осциллирующей ударной волны в газожидкостной среде кластерной структуры (точки 1) равна длительности уединенной волны, формируемой одиночным кластером в жидкости (точки 8) при одинаковых параметрах среды и волны.

Экспериментальные зависимости амплитуды первой осцилляции ударной волны (точки 1) и первой осцилляции отраженной от твердой стенки волны (точки 2) от амплитуды входящей в среду ударной волны показаны на рис. 5. Амплитуда первой осцилляции прямой ударной волны измерялась только по показаниям датчиков, стоящих у 3-го и 4-го кластеров, т. е. когда осциллирующая ударная волна практически сформировалась. Как и для гомогенных пузырьковых сред [3, 23], амплитуда первой осцилляции (точки 1) в полтора раза превышает среднее давление в ударной волне при малых амплитудах волн ($\Delta P_{\max}/P_0 \leq 1$). С увеличением амплитуды падающей ударной волны значения $\Delta P_{\max}/\Delta P_0$ возрастают, что также соответствует данным работы [21] для пузырьковых сред. Отметим, что экспериментальные значения амплитуды уединенной волны давления, сформированной одиночным кластером (точки 3) для соответствующих параметров среды и волны [18], лежат значительно выше точек 1. В случае малых амплитуд волн $\Delta P_{\max}/P_0 \leq 1$ амплитуда отраженной от твердого дна волны в два раза превышает амплитуду падающей волны, что соответствует линейному закону отражения (точки 2). С увеличением амплитуды падающей ударной волны закон отражения становится нелинейным.

Рассмотрим структуру волны давления далеко от кластеров. В этих экспериментах 3-й кластер от входа волны в среду убирался и 3-й датчик измерял профиль волны давления в среде на расстоянии от соседних кластеров, много большем их размера (см. рис. 1). На рис. 6,а представлены профили волн давления, регистрируемые датчиками, расположенными рядом с кластерами (линии 1 и 3), и датчиком, далеко отстоящим от кластеров (линия 2), для малой амплитуды входящей в среду ударной волны. Видно, что вблизи датчиков, стоящих у кластеров, формируется осциллирующая ударная волна (линии 1 и 3), а между кластерами форма волны соответствует суперпозиции волн с соседних кластеров

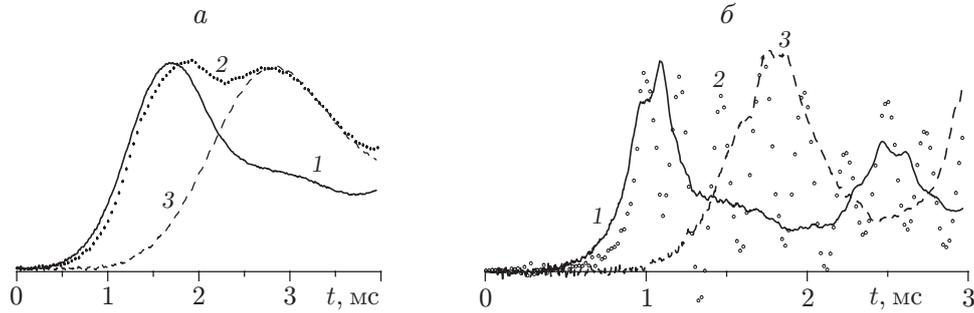


Рис. 6. Структура волны давления в среде:

$\varphi_c = 10,3\%$; 1 — $x = 0,105$ м; 2 — $x = 0,205$ м; 3 — $x = 0,305$ м; а — $\Delta P_0 = 0,038$ МПа (1 — $\Delta P_{\max} = 0,071$ МПа; 2 — $\Delta P_{\max} = 0,044$ МПа; 3 — $\Delta P_{\max} = 0,046$ МПа); б — $\Delta P_0 = 0,2$ МПа (1 — $\Delta P_{\max} = 0,54$ МПа; 2 — $\Delta P_{\max} = 0,375$ МПа; 3 — $\Delta P_{\max} = 0,282$ МПа)

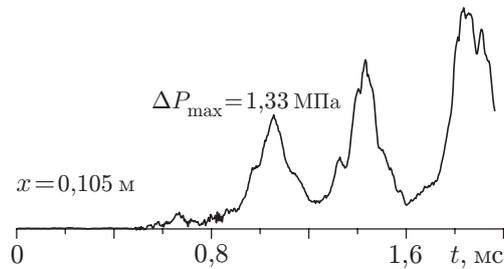


Рис. 7. Усиление амплитуды осцилляций в ударной волне умеренной амплитуды в газожидкостной среде кластерной структуры:

$\varphi_0 = 11,3\%$, $\varphi_c = 10,8\%$, $\Delta P_0 = 0,81$ МПа

(линия 2). С увеличением амплитуды начинает влиять переотражение волн, формируемых соседними кластерами, друг от друга. Это приводит к тому, что на профилях волн у кластеров появляются пульсации давления (линии 1 и 3 на рис. 6, б), а профиль волны регистрируемый датчиком между кластерами, представляет собой высокоамплитудные высокочастотные пульсации давления (линия 2 на рис. 6, б). Период пульсаций соответствует времени пробега волны между соседними кластерами туда и обратно со скоростью звука в жидкости.

Известно, что в гомогенных пузырьковых жидкостях колебания давления в осциллирующей ударной волне затухают за ее передним фронтом [3]. Это обусловлено влиянием диссипативных потерь в среде. На рис. 7 показана структура осциллирующей ударной волны умеренной амплитуды в газожидкостной среде кластерной структуры. Вместо затухающих осцилляций наблюдается рост амплитуды колебаний давления в волне за ее передним фронтом. Это может быть связано с резонансными колебаниями кластеров в жидкости. При определенных параметрах среды и волны колебания трех соседних кластеров происходят следующим образом. Два крайних кластера колеблются в фазе между собой и в противофазе среднему кластеру. Это приводит к увеличению амплитуды пульсаций среднего кластера и соответственно к росту амплитуды осцилляций в ударной волне.

Таким образом, получены опытные данные по скорости и структуре ударных волн умеренной амплитуды в жидкости, содержащей сферические пузырьковые кластеры, и проведено сравнение с теоретическими моделями. Показано, что для волн малой амплитуды

ды уравнение Буссинеска хорошо описывает структуру переднего фронта осциллирующей ударной волны. Также показано, что резонансное взаимодействие пузырьковых кластеров в волне может приводить к усилению амплитуды осцилляций в ударной волне.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бетчелор Г. К.** Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости // *Механика*. 1968. Т. 109, № 3. С. 67–84.
2. **Wijngaarden L. Van.** On the equation of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. P. 465–474.
3. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990.
4. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
5. **Watanabe M., Prosperetti A.** Shock waves in dilute bubbly liquids // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 274. P. 349–381.
6. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // *ПМТФ*. 1960. № 6. С. 102–110.
7. **Когарко Б. С.** Об одной модели кавитирующей жидкости // *Докл. АН СССР*. 1961. Т. 137, № 6. С. 1331–1333.
8. **Кедринский В. К.** Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // *ПМТФ*. 1968. № 4. С. 29–34.
9. **Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Жидкость с пузырьками газа как пример среды Кортевега де Вриза // *Письма в ЖЭТФ*. 1976. Т. 23, № 4. С. 194–198.
10. **Гасенко В. Г., Донцов В. Е., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е.** Осциллирующие уединенные волны в жидкости с пузырьками газа // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*. 1987. Т. 21, № 6. С. 43–45.
11. **Накоряков В. Е., Донцов В. Е.** Мультисолитоны в жидкости с пузырьками газа двух разных размеров // *Докл. РАН*. 2001. Т. 378, № 4. С. 483–486.
12. **Nakoryakov V. E., Dontsov V. E., Gasenco V. G.** On the structure of complicated shape solitary waves in a liquid with gas bubbles due two different bubbles sizes // *Poromechanics 2. Proc. of the 2nd Biot conf. on Poromechanics, Grenoble, France, 26–28 Aug. 2002*. Lisse: A.A. Balkema Publ., 2002. P. 715–721.
13. **Beylich A. E., Gulhan A.** On the structure of nonlinear waves in liquids with gas bubbles // *Phys. Fluids A*. 1990. V. 2, N 8. P. 1412–1428.
14. **Kameda M., Shimauro N., Higashino F., Matsumoto Y.** Shock waves in a uniform bubbly flow // *Phys. Fluids*. 1998. V. 10, N 10. P. 2661–2668.
15. **Накоряков В. Е., Донцов В. Е.** Затухание волн давления в жидкости с пузырьками двух сортов газа // *Докл. РАН*. 2002. Т. 382, № 5. С. 637–640.
16. **Накоряков В. Е., Донцов В. Е.** Волны давления в расслоенной среде жидкость — газожидкостная смесь // *Докл. РАН*. 2002. Т. 386, № 1. С. 48–50.
17. **Кедринский В. К., Шокин Ю. И., Вшивков В. А. и др.** Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // *Докл. РАН*. 2001. Т. 381, № 6. С. 773–776.
18. **Накоряков В. Е., Донцов В. Е.** Взаимодействие ударной волны со сферическим пузырьковым кластером // *Докл. РАН*. 2003. Т. 391, № 2. С. 199–202.
19. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.

20. **Dontsov V. E., Nakoryakov V. E.** Enhancement of shock waves in a porous medium saturated with liquid having soluble-gas bubbles // Intern. J. Multiphase Flow. 2001. V. 27, N 12. P. 2023–2041.
21. **Лежнин С. И.** Волновая динамика двухфазных сред со сложной внутренней структурой: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1994.
22. **Ляхов Г. М.** Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982.
23. **Nakoryakov V. E., Kuznetsov V. E., Dontsov V. E., Markov P. G.** Pressure waves of moderate intensity in liquid with gas bubbles // Intern. J. Multiphase Flow. 1990. V. 16, N 5. P. 741–749.

*Поступила в редакцию 9/IV 2004 г.,
в окончательном варианте — 13/VIII 2004 г.*
