

УДК 539.374

## О РАЗРЫВНЫХ ПОЛЯХ СКОРОСТЕЙ В УПРОЧНЯЮЩЕМСЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

С. Е. Александров, Н. Н. Александрова\*

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

\* Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105007 Москва

Предложенная модель материала и полученные свойства на поверхностях разрыва скорости используются для анализа двух процессов пластического деформирования: боковой экструзии и скручивания полого диска. В обоих случаях получены аналитические решения. Определены границы применимости решения, полученного для боковой экструзии.

Приближенный анализ технологических процессов обработки металлов давлением в большинстве случаев основан на введении разрывных полей скоростей. Несмотря на то что в случае применения распространенных моделей материала разрывные поля скоростей в строгой постановке допустимы только для идеального жесткопластического материала, в приближенной постановке такие поля применяются в условиях ползучести [1], вязкопластичности [2] и пластичности с учетом упрочнения [3]. Кроме того, эксперименты, хотя и немногочисленные, показывают, что разрывы скорости без нарушения сплошности существуют (наблюдается картина течения, которая с достаточной для большинства практических приложений точностью может быть интерпретирована как течение с разрывом скорости) в реальных материалах [4].

В настоящей работе показано, что разрывы скоростей с определенными ограничениями возможны в строгой постановке в рамках модели упрочняющегося жесткопластического материала для некоторых кривых упрочнения, соответствующих реальным свойствам материалов. Для некоторых материалов, таких как мягкая малоуглеродистая сталь, кривая упрочнения имеет площадку текучести [5]. В этом случае возможны ограниченные разрывы скорости, если материальная точка пересекает поверхность разрыва скорости, двигаясь из недеформированной (или незначительно деформированной) области. Ограничения на величину скачка скорости определяются размером площадки текучести. В то же время закон упрочнения, впервые предложенный в [6], подтверждается экспериментально для многих материалов при развитых пластических деформациях [7–9]. Соответствующая идеализация кривой упрочнения позволяет вводить разрывы скоростей при величине пластических деформаций, реализующейся в традиционных процессах обработки металлов давлением. В качестве параметра упрочнения при построении идеализированной кривой упрочнения используется удельная пластическая работа или накопленная эквивалентная пластическая деформация. Для материала, подчиняющегося условию текучести Мизеса, эти гипотезы равносильны при непрерывном поле скоростей (см., например, [10]). Однако, если в качестве параметра упрочнения берется пластическая работа, то уравнению закона упрочнения можно придать дивергентную форму [11] и использовать ее для исследования свойств обобщенных решений. Если же за параметр упрочнения принимается эквивалентная деформация, то исследование обобщенных решений может быть выполнено методом, изложенным в [12].

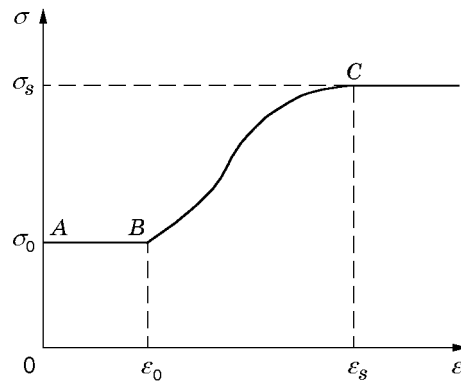


Рис. 1

**1. Кривая упрочнения и разрывы скорости.** На начальном этапе пластического течения кривая упрочнения многих металлов имеет площадку текучести. В этом случае пластическое течение при одноосном растяжении происходит при напряжении  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ . Это состояние существует, пока параметр упрочнения не достигнет определенной величины, после чего  $\sigma$  зависит от этого параметра. При умеренных деформациях эта зависимость описывается различными функциями, обзор которых приведен в [7]. Однако при больших деформациях кривые упрочнения многих материалов асимптотически приближаются к прямой, параллельной оси абсцисс, вдоль которой откладывается параметр упрочнения. Впервые аналитическое выражение для такой кривой упрочнения дано в [6], обзор других моделей приведен в [7]. Для материалов с гранецентрированной кубической решеткой кривая упрочнения практически достигает асимптоты при деформации  $\varepsilon \approx 3$  [7].

Таким образом, с достаточной для большинства практических приложений точностью кривая упрочнения может быть принята в форме, показанной на рис. 1. Участок  $AB$  соответствует площадке текучести с  $\sigma = \sigma_0$ . Положение точки  $B$  определяется деформацией  $\varepsilon_0$ . На участке  $BC$  происходит упрочнение при произвольной зависимости  $\sigma$  от  $\varepsilon$ . Асимптота, к которой стремится реальная кривая упрочнения, определяется уравнением  $\sigma = \sigma_s$ . Предполагается, что идеализированная кривая упрочнения сливается с асимптотой в точке  $C$ , которая определяется деформацией  $\varepsilon_s$ . Как отмечено выше, для некоторых материалов  $\varepsilon_s \approx 3$ . При обобщении кривой упрочнения на сложное напряженное состояние считаем справедливым условие текучести Мизеса

$$\sqrt{3/2} (s_{ij}s_{ij})^{1/2} = \sigma_e. \quad (1.1)$$

Здесь  $s_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений;  $\sigma_e$  — известная функция параметра упрочнения. Вид функции  $\sigma_e$  определяется кривой упрочнения при одноосном растяжении (рис. 1). Таким образом, эта функция представляется различными аналитическими выражениями в зависимости от величины параметра упрочнения. Если в качестве параметра упрочнения принимается накопленная пластическая деформация  $\varepsilon_{eq}$ , то

$$\sigma_e = \sigma_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_0; \quad (1.2)$$

$$\sigma_e = \sigma_s \quad \text{при} \quad \varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_s. \quad (1.3)$$

При  $\varepsilon_0 < \varepsilon_{eq} < \varepsilon_s$  функция  $\sigma_e(\varepsilon_{eq})$  может быть принята в виде одного из известных соотношений [7]. Накопленная пластическая деформация определяется уравнением

$$\frac{d\varepsilon_{eq}}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}. \quad (1.4)$$

Здесь  $t$  — время;  $\xi_{ij}$  — компоненты тензора скорости деформации. За параметр упрочнения также может быть принята пластическая работа  $W$ . В этом случае роль величин  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_s$ , определяющих границы между качественно различными законами поведения материала, будут играть  $W_0$  и  $W_s$  соответственно.

Решения с разрывными полями скоростей возможны, если выполняется условие (1.2) или (1.3). При этом общие соотношения на поверхностях разрыва скорости являются такими же, как в идеальной пластичности, и определены, например, в [5, 11]. Однако в предлагаемой модели материала на эти соотношения накладываются дополнительные ограничения. Прежде всего, выполнение на поверхности разрыва условия (1.2) или (1.3) само является ограничением. В случае выполнения условия (1.3) других ограничений нет. Если выполняется условие (1.2), то имеется еще ограничение на величину скачка скорости. Принимая пластическую работу в качестве параметра упрочнения, на поверхности разрыва имеем [11]

$$v_n[W] = [v_\tau]\sigma_0/\sqrt{3}. \quad (1.5)$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции;  $v_n$  и  $v_\tau$  — проекции скорости на нормаль и касательную к поверхности разрыва. Пусть в материальной точке непосредственно перед пересечением ею поверхности разрыва величина  $W$  была равна  $W_n$ . Очевидно, что для выполнения (1.2) величина  $W_n$  должна удовлетворять неравенствам  $0 \leq W_n \leq W_0$ . Тогда из (1.5) находим, что скачок скорости ограничен условием

$$0 \leq [v_\tau] \leq \sqrt{3}v_n(W_0 - W_n)/\sigma_0. \quad (1.6)$$

Если в качестве параметра упрочнения принимается величина накопленной пластической деформации, то соотношение на поверхности разрыва скорости может быть найдено из (1.4) методом, предложенным в [12]:  $[\varepsilon_{eq}] = [v_\tau]/(\sqrt{3}v_n)$ . В этом случае неравенство, аналогичное (1.6), примет вид

$$0 \leq [v_\tau] \leq \sqrt{3}v_n(\varepsilon_0 - \varepsilon_n), \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon_n$  — значение  $\varepsilon_{eq}$  в материальной точке непосредственно перед пересечением ею поверхности разрыва скорости,  $0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_0$ .

Таким образом, разрывы скорости в упрочняющихся материалах, определяемых кривой упрочнения, показанной на рис. 1, возможны при напряженных состояниях, удовлетворяющих (1.2) или (1.3), и при выполнении ограничений (1.6) или (1.7). Отметим, что ситуация, когда все эти ограничения могут выполняться, характерна для многих установленных процессов обработки металлов давлением, таких как прокатка или экструзия. При моделировании этих процессов поверхности разрыва скорости обычно вводятся при входе материала в очаг деформации, где выполняется условие (1.2), и при выходе, где вероятно выполнение условия (1.3). Возможность выполнения неравенств (1.6) или (1.7) определяется параметрами конкретного процесса.

**2. Боковая экструзия.** Рассмотрим процесс боковой экструзии (рис. 2), в последнее время широко применяющийся для улучшения свойств материала [4, 13–15]. Простейшее решение может быть получено в предположении, что деформация сосредоточена на поверхности (плоскости) разрыва скорости  $AB$ . Без ограничения общности можно положить, что скорость  $v$  жестких зон, которые движутся поступательно, равна единице. Форма поперечного сечения изделия может быть произвольной. Из условия непрерывности нормальной составляющей скорости следует, что  $\beta = \alpha/2$ . Тогда величина скачка скорости составляет

$$[v_\tau] = 2 \cos(\alpha/2). \quad (2.1)$$

Пусть исходная заготовка находилась в недеформированном состоянии:  $\varepsilon_n = 0$ . Примем  $\varepsilon_{eq}$  в качестве параметра упрочнения. Тогда из (1.7) и (2.1) следует

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) \geq (2/\sqrt{3})\varepsilon_0^{-1}. \quad (2.2)$$

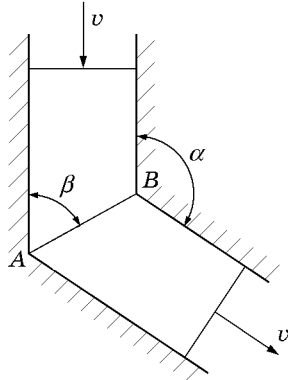


Рис. 2

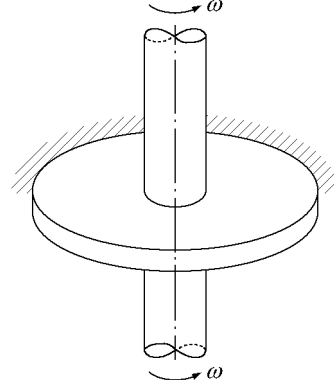


Рис. 3

Для заданного материала неравенство (2.2) определяет максимальный угол  $\alpha$ , при котором предложенное решение имеет силу.

**3. Скручивание полого диска.** Рассмотрим деформацию полого диска, в отверстие которого заделан стержень, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 3). Внешний край диска неподвижно закреплен, на поверхности контакта стержня и диска задано условие прилипания. В диске предполагается плоскодеформированное состояние. Для идеального жесткопластического материала такая задача не имеет решения [16], точнее, существует только решение, при котором диск является жестким, а деформация локализуется на поверхности разрыва скорости, совпадающей с поверхностью контакта стержня и диска. Для упрочняющегося жесткопластического материала при выполнении неравенства  $d\sigma_e/d\varepsilon_{eq} > 0$  для всех значений  $\varepsilon_{eq}$  решение получено в [17], а для порошкового материала — в [18].

Введем цилиндрическую систему координат  $(r\theta z)$  с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии стержня, радиус которого обозначим  $R$ . Согласно результатам [16] решение, соответствующее условию (1.2), должно вырождаться в поверхность разрыва скорости  $r = r_d$ , причем при  $\varepsilon_n = 0$  на этой поверхности, как следует из (1.7), должно выполняться условие  $[v_\tau] = \sqrt{3} v_n \varepsilon_0$ . Поскольку диск неподвижен при  $r \geq r_d$ , то  $[v_\tau] = |v_\theta|$ , где  $v_\theta$  вычисляется при  $r = r_d$  в деформируемой области диска. Таким образом,

$$|v_\theta| = \sqrt{3} v_n \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad r = r_d. \quad (3.1)$$

Кроме того,

$$v_n = \frac{dr_d}{dt}. \quad (3.2)$$

В деформируемой области диска  $\sigma_e$  в (1.1) соответствует участку  $BC$  на кривой упрочнения (см. рис. 1). Полагая, что отлична от нуля только компонента  $\tau_{r\theta}$  тензора напряжений, из (1.1) имеем

$$\tau_{r\theta} = \sigma_e / \sqrt{3}. \quad (3.3)$$

Из ассоциированного закона течения следует, что отлична от нуля только компонента  $\xi_{r\theta}$  тензора скоростей деформации. Полагая, что  $v_r = 0$  и  $v_\theta = v(r, t)$ , получим

$$2\xi_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (3.4)$$

Из (1.4) и (3.4) найдем

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial t} = \frac{r}{\sqrt{3}} \frac{\partial(v/r)}{\partial r}. \quad (3.5)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия имеет вид  $\partial\tau_{r\theta}/\partial r + 2\tau_{r\theta}/r = 0$ . Его общее решение имеет вид

$$\tau_{r\theta} = \tau_0 r^{-2}. \quad (3.6)$$

Функция времени  $\tau_0$  определяется из условия  $\tau_{r\theta} = \sigma_0/\sqrt{3}$  при  $r = r_d$ . Тогда решение (3.6) может быть записано следующим образом:

$$\tau_{r\theta} = \sigma_0 (r_d/r)^2 / \sqrt{3}. \quad (3.7)$$

Из (3.3) и (3.7) следует

$$\sigma_e = \sigma_0 (r_d/r)^2. \quad (3.8)$$

Поскольку  $\sigma_e$  — известная функция  $\varepsilon_{eq}$ , то, таким образом, определена зависимость  $\varepsilon_{eq}$  от  $r$  и  $r_d$ . Участок кривой  $BC$  (см. рис. 1) заменим прямой. Тогда

$$\sigma_e = \sigma_0 + \frac{\sigma_s - \sigma_0}{\varepsilon_s - \varepsilon_0} (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_0). \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) найдем

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_0 + (\varepsilon_s - \varepsilon_0) [(r_d/r)^2 - 1] / (p - 1), \quad p = \sigma_s / \sigma_0. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.5) с учетом (3.2), получим

$$\frac{\partial(v/r)}{\partial r} = \frac{2\sqrt{3}(\varepsilon_s - \varepsilon_0)r_d v_n}{(p - 1)r^3}.$$

Отсюда

$$v = -\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_s - \varepsilon_0)v_n}{p - 1} \frac{r_d}{r} + v_0 \frac{r}{r_d}, \quad (3.11)$$

где  $v_0$  — произвольная функция  $r_d$ . Из (3.1) и (3.11) следует  $v_0 = \sqrt{3}v_n(\varepsilon_s - p\varepsilon_0)/(p - 1)$ , тогда

$$v = \frac{\sqrt{3}v_n}{p - 1} [(\varepsilon_s - p\varepsilon_0)(r/r_d) - (\varepsilon_s - \varepsilon_0)(r_d/r)]. \quad (3.12)$$

Здесь учтено, что  $v < 0$ , так как из (3.7) следует, что  $\tau_{r\theta} > 0$ . Из (3.2) и краевого условия  $v_\theta = -\omega R$  при  $r = R$  найдем

$$v_n = \frac{dr_d}{dt} = -\frac{\omega(p - 1)R}{\sqrt{3}[(\varepsilon_s - p\varepsilon_0)(R/r_d) - (\varepsilon_s - \varepsilon_0)(r_d/R)]}.$$

Тогда из (3.12)

$$v = -\frac{\omega R[(\varepsilon_s - p\varepsilon_0)(r/r_d) - (\varepsilon_s - \varepsilon_0)(r_d/r)]}{(\varepsilon_s - p\varepsilon_0)(R/r_d) - (\varepsilon_s - \varepsilon_0)(r_d/R)}. \quad (3.13)$$

Решение (3.7), (3.13) справедливо в пластической зоне  $R \leq r \leq r_d$ , причем в начале процесса  $r_d = R$ . Кроме того, решение теряет силу при  $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_s$ . В этом случае выполняется условие (1.3) при  $r = R$  и дальнейшая деформация локализуется на поверхности разрыва скорости. Эта поверхность, в отличие от поверхности  $r = r_d$ , соответствует условию (1.3), поэтому никаких дополнительных ограничений на скачок скорости в данном случае не накладывается. Из (3.10) следует, что переход к этой стадии деформирования осуществляется при  $r_d = Rp^{1/2}$ .

Таким образом, из полученного решения следует, что при  $r \geq Rp^{1/2}$  материал находится в исходном состоянии, а при  $R \leq r \leq Rp^{1/2}$  материал упрочняется и распределение предела текучести по радиусу определяется уравнениями (3.9), (3.10) при  $r_d = Rp^{1/2}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Малинин Н. Н.** Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986.
2. **Cristescu N.** Plastic flow through conical converging dies, using a viscoplastic constitutive equation // Intern. J. Mech. Sci. 1975. V. 17. P. 425–433.
3. **Коробкин В. Д., Чудаков П. Д.** Диссипация мощности на поверхностях разрыва скоростей в упрочняющемся материале // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 3. С. 158–161.
4. **Becker R., Denzer D. K., Sample V. M.** Velocity discontinuities in a large strain forming process // Scripta Materialia. 1997. V. 37, N 12. P. 1963–1965.
5. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
6. **Voce E.** The relationship between stress and strain for homogeneous deformation // J. Inst. Metals. 1948. V. 74. P. 537–562.
7. **Sevillano J. G., van Houtte P., Aernoudt E.** Large strain work hardening and textures // Progress Materials Sci. 1981. V. 25, N 1. P. 69–112.
8. **Kocks U. F.** Laws for work-hardening and low-temperature creep // Trans. ASME. J. Engng Materials Technol. 1976. V. 98, N 1. P. 76–85.
9. **Barlat F., Brem J. C., Lege D. J., Chung K.** Characterization of the formability for aluminum alloy and steel sheets // Advanced methods in materials processing defects / Ed. by M. Predeleanu, P. Gilormini. Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 265–272.
10. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
11. **Друянов Б. А.** Обобщенные решения в теории пластичности // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 3. С. 483–489.
12. **Hill R.** Discontinuity relations in mechanics of solids // Progress in solid mechanics / Ed. by I. N. Sneddon, R. Hill. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1961. V. 2. P. 245–276.
13. **Segal V. M.** Materials processing by simple shear // Materials Sci. Engng. Ser. A. 1995. V. 197. P. 157–164.
14. **Wu Y., Baker I.** An experimental study of equal channel angular extrusion // Scripta Materialia. 1997. V. 37, N 4. P. 437–442.
15. **Iwahashi Y., Horita Z., Nenioto M., Langton T. G.** An investigation of microstructural evolution during equal-channel angular pressing // Acta Materials. 1997. V. 45, N 11. P. 4733–4741.
16. **Каменярж Я. А.** О разрывных решениях задачи теории предельной нагрузки // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 566–569.
17. **Collins I. F.** Boundary value problems in plane strain plasticity // Mechanics of solids: The Rodney Hill 60th anniversary volume / Ed. by H. G. Hopkins, M. J. Sewell. Oxford: Pergamon Press, 1982. P. 135–184.
18. **Lippmann H.** Mechanik des Plastischen Fließens. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

*Поступила в редакцию 8/IV 1998 г.*