УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

И. А. Калиев, М. Ф. Мугафаров

Стерлитамакский государственный педагогический институт, 453100 Стерлитамак

Доказывается корректность задачи линейной термоупругости в теории фазовых переходов Гинзбурга — Ландау.

Ключевые слова: фазовые переходы, начально-краевая задача, обобщенные решения.

В работе [1] предложены различные математические модели для описания фазовых переходов в многомерных упругих средах с использованием невыпуклой функции свободной энергии. В [2] исследовалась задача из [1], полученная в результате линеаризации уравнений теории фазовых переходов Ландау. В данной работе изучается начально-краевая задача для системы, полученной в [1] при линеаризации уравнений теории фазовых переходов Гинзбурга — Ландау.

Пусть Ω — ограниченная область n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^3$; $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$; $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ — боковая поверхность цилиндра Q_T; Ω_τ — сечение Q_T плоскостью $t = \tau$.

Задача 1. Требуется найти вектор перемещений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = (u^{(1)}(\boldsymbol{x},t),\ldots,u^{(n)}(\boldsymbol{x},t))$ и температуру $\theta(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющие в Q_T уравнениям

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\alpha\nabla\theta + \mu\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \gamma\nabla\Delta\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = k\Delta\theta - \beta\,\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + g, \tag{2}$$

начальным условиям

$$\boldsymbol{u}\big|_{\Omega_0} = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}); \tag{3}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{\Omega_0} = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}); \tag{4}$$

$$\theta\big|_{\Omega_0} = \theta_0(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

и граничным условиям

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\big|_{S_T} = b_1(\boldsymbol{s},t),$$

$$\Delta(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\big|_{S_T} = b_2(\boldsymbol{s},t),$$

$$\theta\big|_{S_T} = \theta_1(\boldsymbol{s},t).$$

Здесь $\mu > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$, α, β — константы; $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$, $g = g(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})$, $\theta_0(\boldsymbol{x})$, $b_1(\boldsymbol{s},t)$, $b_2(\boldsymbol{s},t)$, $\theta_1(\boldsymbol{s},t)$ — заданные функции; $\boldsymbol{x} = (x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ — пространственные переменные; t — время. Так как случай неоднородных граничных условий сводится к случаю однородных граничных условий, в дальнейшем будем полагать $b_1(\boldsymbol{s},t) = b_2(\boldsymbol{s},t) = \theta_1(\boldsymbol{s},t) = 0$.

Введем обозначения $v = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$, $\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{f}$. Применим оператор дивергенции к векторному уравнению (1) и условиям (3), (4). В результате возникает

Задача 1.1. Требуется найти функции $\theta(\boldsymbol{x},t)$, $v(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющие в Q_T уравнениям

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\alpha\Delta\theta + \mu\Delta v - \gamma\Delta^2 v + \phi; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = k\Delta\theta - \beta\,\frac{\partial v}{\partial t} + g, \tag{7}$$

начальным условиям (5) и

$$v\big|_{\Omega_0} = v_0(\boldsymbol{x}), \qquad v_0 = \operatorname{div}\boldsymbol{u}_0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{\Omega_0} = v_1(\boldsymbol{x}), \qquad v_1 = \operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 \tag{9}$$

и граничным условиям

$$v\big|_{S_T} = 0; \tag{10}$$

$$\Delta v\big|_{S_T} = 0; \tag{11}$$

$$\theta\big|_{S_T} = 0. \tag{12}$$

Предположим, что функции θ, v являются классическим решением задачи 1.1. Умножим (6) на функцию $\varphi \in C^2(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую условию

$$\varphi\big|_{S_T} = 0, \qquad \varphi\big|_{\Omega_T} = 0, \tag{13}$$

и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру Q_T. Предварительно преобразуем некоторые интегралы с учетом начального условия (9) и условий (13):

$$\int\limits_{Q_T} v_{tt}\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} (v_t\varphi)_t\,dx\,dt - \int\limits_{Q_T} v_t\varphi_t\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_T} v_t\varphi\,dx - \int\limits_{\Omega_0} v_t\varphi\,dx - \int\limits_{Q_T} v_t\varphi_t\,dx\,dt = -\int\limits_{\Omega_0} v_1(x)\varphi(x,0)\,dx - \int\limits_{Q_T} v_t\varphi_t\,dx\,dt,$$

$$\int\limits_{Q_T} \varphi\Delta^2 v\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} \operatorname{div}(\varphi\nabla\Delta v)\,dx\,dt - \int\limits_{Q_T} \nabla\Delta v\nabla\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{S_T} \frac{\partial(\Delta v)}{\partial\boldsymbol{n}}\,\varphi\,ds\,dt - \int\limits_{Q_T} \nabla\Delta v\nabla\varphi\,dx\,dt = -\int\limits_{Q_T} \nabla\Delta v\nabla\varphi\,dx\,dt.$$

В результате получим

$$-\int\limits_{\Omega_0} v_1\varphi\,dx - \int\limits_{Q_T} v_t\varphi_t\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} (\phi - \alpha\Delta\theta)\varphi\,dx\,dt + \mu\int\limits_{Q_T} \Delta v\varphi\,dx\,dt + \gamma\int\limits_{Q_T} \nabla\Delta v\nabla\varphi\,dx\,dt.$$

С использованием полученного тождества введем понятие обобщенного решения задачи 1.1.

Определение. Пару функций $\{\theta, v\}$, $\theta \in W_2^{3,1}(Q_T)$, $v \in W_2^{3,1}(Q_T)$ назовем обобщенным решением задачи 1.1, если θ удовлетворяет уравнению (7) почти всюду в Q_T и условиям (5), (12), а функция v удовлетворяет начальному условию (8), граничным условиям (10), (11) и тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (\gamma \nabla \Delta v \nabla \varphi + \mu \Delta v\, \varphi + v_t \varphi_t)\, dx\, dt = -\int\limits_{\Omega_0} v_1 \varphi\, dx - \int\limits_{Q_T} (\phi - \alpha \Delta \theta) \varphi\, dx\, dt \tag{14}$$

при всех $\varphi \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнены условия

$$\varphi\big|_{S_T} = 0, \qquad \varphi\big|_{\Omega_T} = 0. \tag{15}$$

Имея решение $\{\theta, v\}$ задачи 1.1, можно определить обобщенное решение задачи 1 как $\{\theta, \boldsymbol{u}\}$, где $\boldsymbol{u}$ находится из уравнения

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\alpha \nabla \theta + \mu \nabla v - \gamma \nabla \Delta v + \boldsymbol{f}$$

с известной правой частью и начальных условий (3), (4).

Теорема. *Пусть $\partial\Omega \in C^3$, $\phi, g \in W_2^1(Q_T)$, $\theta_0 \in W_2^3(\Omega)$, $v_0 \in W_2^3(\Omega)$, $v_1 \in W_2^1(\Omega)$, $\phi\big|_{S_T} = g\big|_{S_T} = 0$, $\theta_0\big|_{\partial\Omega} = v_0\big|_{\partial\Omega} = \Delta v_0\big|_{\partial\Omega} = v_1\big|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда обобщенное решение $\{\theta, v\}$ задачи 1.1 существует и единственно. При этом справедливы оценки*

$$\|\theta\|_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant C(\|\theta_0\|_{W_2^3(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|_{W_2^1(\Omega)} + \|g\|_{W_2^1(Q_T)} + \|\phi\|_{W_2^1(Q_T)}); \tag{16}$$

$$\|v\|_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant C(\|\theta_0\|_{W_2^3(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|_{W_2^1(\Omega)} + \|g\|_{W_2^1(Q_T)} + \|\phi\|_{W_2^1(Q_T)}), \tag{17}$$

где C — константы, не зависящие от θ_0, v_0, v_1, g, ϕ; C могут зависеть от T.

Доказательство. Существование обобщенного решения задачи 1.1 будем доказывать, используя принцип сжатых отображений. Построим отображение

$$F\colon \quad M_T \to W_2^{3,1}(Q_T),$$

где $M_T = \{\theta \in W_2^{3,1}(Q_T)\colon \|\theta\|_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant m_0,\ \theta\big|_{\Omega_0} = \theta_0(\boldsymbol{x}),\ \theta\big|_{S_T} = 0\}$, действующее следующим образом. По заданной функции $\theta(\boldsymbol{x}, t) \in M_T$ найдем функцию $v(\boldsymbol{x}, t) \in W_2^{3,1}(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству (14) и условиям (8), (10), (11). Затем по найденной функции v найдем функцию $\tilde\theta(\boldsymbol{x}, t) \in W_2^{3,1}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению

$$\tilde\theta_t = k \Delta \tilde\theta - \beta v_t + g$$

и условиям $\tilde\theta\big|_{\Omega_0} = \theta_0(\boldsymbol{x})$, $\tilde\theta\big|_{S_T} = 0$.

Положим $\tilde\theta = F\langle\theta\rangle$. Покажем, что отображение F при достаточно малых T отображает M_T в себя и является сжимающим.

Лемма 1. *Пусть $\theta(\boldsymbol{x}, t) \in M_T$. Тогда для функции v, найденной по заданной функции θ при построении F, справедливы оценки*

$$\|v\|^2_{W_2^3(\Omega_t)} + \|v_t\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant c(\|v_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|^2_{W_2^1(\Omega)}) + cT(\|\theta\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} + \|\phi\|^2_{W_2^1(Q_T)}); \tag{18}$$

$$\|v\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant cT(\|v_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|^2_{W_2^1(\Omega)}) + cT^2(\|\theta\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} + \|\phi\|^2_{W_2^1(Q_T)}), \tag{19}$$

где c — константы, не зависящие от T, θ_0, v_0, v_1, ϕ.

Доказательство. Пусть $u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система, включающая все обобщенные собственные функции задачи

$$\Delta u_k = \lambda_k u_k, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u_k\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Система $u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots$ является ортонормированным базисом в $L_2(\Omega)$, $\lambda_k < 0$ и $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$ [3, с. 191]. Функция $\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \phi - \alpha\Delta\theta$ принадлежит $W_2^1(Q_T)$, тогда по теореме Фубини $\Phi(\boldsymbol{x}, t) \in L_2(\Omega_t)$ при $t \in (0, T)$. Функции $v_0(\boldsymbol{x}), v_1(\boldsymbol{x})$ и $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ для всех $t \in (0, T)$ разложим в ряды Фурье по системе функций $u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots$:

$$v_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{0k} u_k(\boldsymbol{x}), \quad v_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k} u_k(\boldsymbol{x}), \quad \Phi(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) u_k(\boldsymbol{x}). \tag{20}$$

Здесь $v_{0k} = (v_0, u_k)_{L_2(\Omega)}$; $v_{1k} = (v_1, u_k)_{L_2(\Omega)}$; $\Phi_k(t) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{x}, t) u_k(\boldsymbol{x})\, dx$.

Так как $|\Phi_k(t)|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} \Phi^2(\boldsymbol{x}, t)\, dx \int\limits_{\Omega} u_k^2(\boldsymbol{x})\, dx = \int\limits_{\Omega} \Phi^2(\boldsymbol{x}, t)\, dx$, то $\Phi_k(t) \in L_2(0, T)$. Согласно равенству Парсеваля — Стеклова

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{0k}^2 = \|v_0\|_{L_2(\Omega)}^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}^2 = \|v_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{21}$$

и при $t \in (0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2(t) = \int\limits_{\Omega} \Phi^2(\boldsymbol{x}, t)\, dx.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T \Phi_k^2(t)\, dt = \int\limits_{Q_T} \Phi^2(\boldsymbol{x}, t)\, dx\, dt. \tag{22}$$

При заданной функции $\theta \in M_T$ решение v задачи (14), (8), (10), (11) может быть представлено в виде ряда

$$v(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) u_k(\boldsymbol{x}), \tag{23}$$

где

$$U_k(t) = v_{0k} \cos\left(\sqrt{\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k}\, t\right) + \frac{v_{1k}}{\sqrt{\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k}} \sin\left(\sqrt{\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k}\, t\right) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k}} \int\limits_0^t \Phi_k(\tau) \sin\left(\sqrt{\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k}\, (t - \tau)\right) d\tau. \tag{24}$$

Действительно, функция $U_k(t)$ принадлежит $W_2^2(0, T)$, при $t = 0$ удовлетворяет начальным условиям $U_k(0) = v_{0k}$, $U_k'(0) = v_{1k}$ и является решением уравнения

$$U_k'' + (\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k) U_k = \Phi_k.$$

Поскольку для функции $V_k(\boldsymbol{x}, t) = U_k(t) u_k(\boldsymbol{x})$ и любой функции $\varphi \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющей условиям (15), справедливы соотношения

$$\int\limits_{Q_T} \nabla\Delta V_k \nabla\varphi\, dx\, dt = \lambda_k \int\limits_{Q_T} \nabla V_k \nabla\varphi\, dx\, dt = -\lambda_k^2 \int\limits_{Q_T} V_k \varphi\, dx\, dt,$$

$$\mu \int\limits_{Q_T} \Delta V_k \varphi \, dx \, dt = \mu\lambda_k \int\limits_{Q_T} V_k \varphi \, dx \, dt,$$

$$\int\limits_{Q_T} V_{kt}\varphi_t \, dx \, dt = \int\limits_{\Omega} u_k(\boldsymbol{x}) \Big(\int\limits_0^T U_k'(t)\varphi_t \, dt \Big) \, dx = \int\limits_{\Omega} u_k(\boldsymbol{x}) \Big(-v_{1k}\varphi(\boldsymbol{x}, 0) - \int\limits_0^T U_k''(t)\varphi \, dt \Big) \, dx =$$

$$= -v_{1k} \int\limits_{\Omega} u_k(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}, 0) \, dx - \int\limits_{Q_T} u_k(\boldsymbol{x})\Phi_k\varphi \, dx \, dt + (\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k) \int\limits_{Q_T} V_k \varphi \, dx \, dt,$$

то функция $V_k(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (\gamma\nabla\Delta V_k \nabla\varphi + \mu\Delta V_k \varphi + V_{kt}\varphi_t) \, dx \, dt = -v_{1k} \int\limits_{\Omega_0} u_k(\boldsymbol{x})\varphi \, dx - \int\limits_{Q_T} \Phi_k(t) u_k(\boldsymbol{x})\varphi \, dx \, dt.$$

Из формулы (24) следует, что для всех $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |v_{0k}| + |v_{1k}| \, |\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k|^{-1/2} + |\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k|^{-1/2} \int\limits_0^T |\Phi_k(t)| \, dt,$$

$$U_k^2(t) \leqslant 3\Big(v_{0k}^2 + v_{1k}^2 |\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k|^{-1} + T|\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k|^{-1} \int\limits_0^T \Phi_k^2(t) \, dt \Big),$$

$$\Big| \frac{dU_k}{dt} \Big| \leqslant |v_{0k}| \, |\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k|^{1/2} + |v_{1k}| + \int\limits_0^T |\Phi_k(t)| \, dt,$$

$$\Big| \frac{dU_k}{dt} \Big|^2 \leqslant 3\Big(v_{0k}^2 |\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k| + v_{1k}^2 + T \int\limits_0^T \Phi_k^2(t) \, dt \Big).$$

Так как по условию теоремы функция $v_0 \in W_2^3(\Omega)$, $v_0\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta v_0\big|_{\partial\Omega} = 0$, то ее ряд Фурье (20) по системе функций $\{u_k\}$ сходится к ней в норме пространства $W_2^3(\Omega)$ [3, с. 253]. Аналогично для функций v_1 и Φ соответствующие ряды Фурье будут сходиться к ним в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. При этом справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{0k}^2 |\lambda_k^3| \leqslant c\|v_0\|^2_{W_2^3(\Omega)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}^2 |\lambda_k| \leqslant c\|v_1\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \int\limits_0^T \Phi_k^2 \, dt \leqslant c\|\Phi\|^2_{W_2^1(Q_T)}. \qquad (25)$$

Рассмотрим частичную сумму ряда (23)

$$v_N(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) u_k(\boldsymbol{x}).$$

При любом $t \in [0,T]$ функция $v_N(\boldsymbol{x},t)$ и ее производная по t принадлежат $W_2^3(\Omega)$ и справедливы оценки

$$\|v_N\|^2_{W_2^3(\Omega_t)} = \Big\| \sum_{k=1}^N U_k(t) u_k(\boldsymbol{x}) \Big\|^2_{W_2^3(\Omega_t)} = \int\limits_\Omega \Big[\Big(\sum_{k=1}^N U_k(t) u_k(\boldsymbol{x}) \Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N U_k(t) u_{kx_i}(\boldsymbol{x}) \Big)^2 +$$

$$+ \Big(\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N U_k(t) u_{kx_ix_j}(\boldsymbol{x}) \Big)^2 + \Big(\sum_{i,j,l=1}^n \sum_{k=1}^N U_k(t) u_{kx_ix_jx_l}(\boldsymbol{x}) \Big)^2 \Big] \, dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j,l=1}^n \sum_{k=1}^N U_k(t) u_{kx_ix_jx_l}(\boldsymbol{x}) \Big)^2 dx \leqslant c \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N U_k^2(t) \Big| \frac{\partial(\nabla u_k(\boldsymbol{x}))}{\partial x_i \partial x_j} \Big|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^N U_k^2(t) |\Delta \nabla u_k|^2 \, dx \leqslant c \sum_{k=1}^N U_k^2(t) \lambda_k^2 \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx = \tag{26}$$

$$= c \sum_{k=1}^N U_k^2(t) |\lambda_k|^3 \leqslant c \sum_{k=1}^N \Big(v_{0k}^2 |\lambda_k|^3 + v_{1k}^2 \frac{\lambda_k^2}{\gamma|\lambda_k - \mu/\gamma|} + T \frac{\lambda_k^2}{\gamma|\lambda_k - \mu/\gamma|} \int\limits_0^T \Phi_k^2 \, dt \Big) \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{k=1}^N \Big(v_{0k}^2 |\lambda_k|^3 + v_{1k}^2 |\lambda_k| + T|\lambda_k| \int\limits_0^T \Phi_k^2 \, dt \Big),$$

$$\Big\| \frac{\partial v_N}{\partial t} \Big\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \Big\| \sum_{k=1}^N U_k'(t) u_k(\boldsymbol{x}) \Big\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \sum_{k=1}^N (U_k'(t))^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{k=1}^N \Big(v_{0k}^2 |\gamma\lambda_k^2 - \mu\lambda_k| + v_{1k}^2 + T \int\limits_0^T \Phi_k^2 \, dt \Big) \leqslant c \sum_{k=1}^N \Big(v_{0k}^2 (\gamma\lambda_k^2 + \mu|\lambda_k|) + v_{1k}^2 + T \int\limits_0^T \Phi_k^2 \, dt \Big).$$

Переходя в (26) к пределу при $N \to \infty$, согласно (21), (22), (25) получим оценку (18) в лемме 1. Оценка (19) получается из (18) интегрированием по времени от 0 до T.

Лемма 2. *Пусть $\theta(\boldsymbol{x},t) \in M_T$. Тогда для функции $\tilde\theta = F\langle\theta\rangle$ справедлива оценка*

$$\|\tilde\theta\|^2_{W_2^3(\Omega_t)} + \|\tilde\theta\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant c\, \mathrm{e}^{2c_1 T}(T+1)(\|\theta_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} + \|g\|^2_{W_2^1(Q_T)}),$$

где c, c_1 — константы, не зависящие от T, θ_0, v_0, v_1, g, ϕ.

Лемма 2 является следствием оценки (6.10) из [4, с. 207].

Лемма 3. *Существуют константа $m_0 > 0$ и время $T_1 > 0$ такие, что F отображает M_{T_1} в себя и является сжимающим отображением.*

Доказательство. Пусть $\theta \in M_T$. Тогда

$$\|\theta\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant m_0^2.$$

Из лемм 1, 2 следует оценка

$$\|\tilde\theta\|^2_{W_2^{3,1}(Q_T)} \leqslant c\,\mathrm{e}^{2c_1T}(T+1)(\|\theta_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|g\|^2_{W_2^1(Q_T)} + \\ + T(\|v_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|^2_{W_2^1(\Omega)}) + T^2(m_0^2 + \|\phi\|^2_{W_2^1(Q_T)})) \leqslant \\ \leqslant C_1(T)(\|\theta_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|g\|^2_{W_2^1(Q_T)} + \|v_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\phi\|^2_{W_2^1(Q_T)}) + C_2(T)T^2m_0^2.$$

Если выбрать

$$m_0^2 > 2C_1(T)(\|\theta_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^3(\Omega)} + \|v_1\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|g\|^2_{W_2^1(Q_T)} + \|\phi\|^2_{W_2^1(Q_T)}),$$

то при достаточно малых $T_1 > 0$ можно добиться выполнения оценки

$$\|\tilde\theta\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})} \leqslant m_0^2,$$

т. е. отображение F действует из M_{T_1} в M_{T_1}.

Покажем, что отображение F является сжимающим. Пусть $\theta^{(i)} \in M_{T_1}$, $i = 1, 2$. Для соответствующих функций $v^{(i)}$ из леммы 1 имеем оценку

$$\|v^{(1)} - v^{(2)}\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})} \leqslant cT_1^2\|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})}.$$

Из леммы 2 следует оценка

$$\|F\langle\theta^{(1)}\rangle - F\langle\theta^{(2)}\rangle\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})} = \|\tilde\theta^{(1)} - \tilde\theta^{(2)}\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})} \leqslant \\ \leqslant c\,\mathrm{e}^{2c_1T_1}(T_1+1)\|v^{(1)} - v^{(2)}\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})} \leqslant c\,\mathrm{e}^{2c_1T_1}(T_1+1)T_1^2\|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|^2_{W_2^{3,1}(Q_{T_1})}.$$

Если выбрать T_1 так, что $c\,\mathrm{e}^{2c_1T_1}(T_1+1)T_1^2 = q < 1$, то отображение F будет сжимающим.

По теореме Банаха о сжатых отображениях множество M_{T_1} содержит единственную неподвижную точку θ^*, которая вместе с соответствующей ей функцией v^* является решением задачи 1.1 на временном интервале $[0, T_1]$. Полученное решение можно продолжить на отрезки $[T_1, T_2]$, ..., $[T_k, T_{k+1}]$, причем $T_{k+1} - T_k > \delta > 0$ и δ не зависит от номера k. Это следует из оценок в леммах 1, 2. Тем самым решение может быть продолжено до любого $T > 0$.

Единственность решения доказывается от противного с использованием оценок из лемм 1, 2.

Оценка (16) следует из того, что $\theta^*(\boldsymbol{x}, t) \in M_T$. Оценка (17) следует из (16) и леммы 1. Теорема доказана.

Замечание 1. Все результаты могут быть перенесены на случай, когда граничные условия (10) и (12) заменяются на условия вида

$$\Big(\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{n}} + \sigma_1 \operatorname{div}\boldsymbol{u}\Big)\Big|_{S_T} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{n}} + \sigma_2\theta\Big)\Big|_{S_T} = 0,$$

где σ_i — заданные на S_T функции; $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Замечание 2. Если от границы области $\partial\Omega$ и данных задачи потребовать бóльшую гладкость, то можно получить решения, обладающие большей гладкостью, в том числе классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Калиев И. А.** Математическое моделирование фазовых превращений в упругих средах // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 64–72.
2. **Калиев И. А.** Корректность одной задачи линейной термоупругости // Актуальные проблемы современной математики: Сб. науч. тр. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1995. Т. 1. С. 67–72.
3. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
4. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 31/III 2003 г.