УДК 532.135:532.52;539.374

ОБОБЩЕННАЯ РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СДВИГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД СО СТРУКТУРОЙ

С. В. Стебновский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: stest@hydro.nsc.ru

Построено макрореологическое уравнение релаксационного типа, описывающее сдвиговое деформирование упругопластичновязких сред, содержащих микрополости. Уравнение соответствует режимам установившейся ползучести, упругих и пластических деформаций, при высоких скоростях сдвигового деформирования переходящих в режим вязкого течения с ограниченным ростом полостей.

Ключевые слова: конденсированные среды, сдвиговое деформирование, вязкое течение, микрополости.

Как известно, для ряда твердопластичных материалов наряду с откольным разрушением характерно вязкое разрушение, при котором одной из составляющих этого процесса (помимо развития кавитационных пор) является макромасштабная пластическая деформация, при очень высоких сдвиговых нагрузках переходящая в режим вязкого течения [1, 2]. Примерами такого процесса являются течения в кумулятивной струе, а также в области формирования контактной поверхности при сварке взрывом металлов [3]. Кроме того, вязкое сдвиговое течение предшествует разрушению структуры жидкопластичных и жидких сред, свойства которых находятся в широком диапазоне реологических параметров [4–6]. Существует ряд работ, посвященных исследованию различных аспектов динамики пористых материалов в рамках упругопластичных модельных сред [7–11]. Наряду с этим представляет интерес проблема построения обобщенной модели, описывающей эволюцию структуры конденсированной среды с микрополостями (микропузырьками в жидкостях и микропорами в твердопластичных материалах) во всем диапазоне ее сдвигового деформирования от ползучести до вязкого течения. По определению реологическим аналогом таких сред является упругопластичновязкое тело (УПВТ) [5], в исходном состоянии содержащее микрополости.

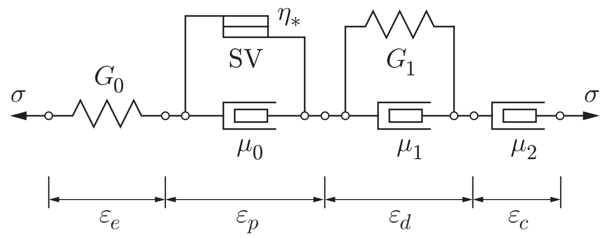

Рис. 1. Механический аналог упругопластичновязкой среды, содержащей микрополости

1. Рассмотрим процесс сдвигового деформирования УПВТ, содержащего микрополости. Механический аналог такой среды можно представить в виде схемы (рис. 1). Здесь G_0 — модуль сдвиговой упругости УПВТ; η_* — коэффициент пластической вязкости УПВТ при переходе элемента Сен-Венана (SV) через предел текучести среды; μ_0 — сдвиговая вязкость УПВТ после разрушения его структуры и перехода в режим вязкого (ньютоновского) течения; μ_1, G_1 — вязкий и упругий элементы (параллельное соединение G_1 и μ_1 — узел Фойхта, соответствующий вязкоупругим свойствам полостей); μ_2 — сдвиговая вязкость среды в режиме ползучести.

Общую деформацию УПВТ можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_d + \varepsilon_c,$$

где ε_e, ε_p — упругая и пластическая деформации среды; ε_d — деформация дисперсных элементов (полостей); ε_c — деформация среды, обусловленная ползучестью (крипом). Подставляя в это уравнение соотношения, связывающие напряжение σ, приложенное к механической модели, и деформации узлов:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{2\,G_0}, \qquad \varepsilon_p = \frac{\sigma}{2(\mu_0 + \eta_*)\,d/dt}, \qquad \varepsilon_d = \frac{\sigma}{2(G_1 + \mu_1\,d/dt)}, \qquad \varepsilon_c = \frac{\sigma}{2\mu_2\,d/dt},$$

получим

$$(\mu_0 + \eta_*)\mu_1\dddot{\sigma} + [G_0\mu_1 + (\mu_0 + \eta_*)(G_0 + G_1 + G_0\mu_1/\mu_2)]\ddot{\sigma} + G_0G_1[1 + (\mu_0 + \eta_*/\mu_2)]\dot{\sigma} =$$
$$= 2(\mu_0 + \eta_*)G_0\mu_1\dddot{\varepsilon} + 2(\mu_0 + \eta_*)G_0G_1\ddot{\varepsilon}. \quad (1)$$

Проинтегрировав (1) по времени и переходя к трехмерному случаю, имеем

$$(\mu_0 + \eta_*)\mu_1 T^{\oplus\oplus} + [G_0\mu_1 + (\mu_0 + \eta_*)(G_0 + G_1 + G_0\mu_1/\mu_2)]T^{\oplus} + G_0G_1[1 + (\mu_0 + \eta_*)/\mu_2]T =$$
$$= 2(\mu_0 + \eta_*)G_0\mu_1 D^{\oplus} + 2(\mu_0 + \eta_*)G_0G_1 D, \quad (2)$$

где “$\oplus$” — знак конвективной производной; T, D — тензор дополнительных вязких напряжений (пояснение смысла этого тензора приводится ниже) и тензор скорости деформации соответственно. Умножив (2) на T, с учетом того что при переходе через предел текучести θ выполняются соотношения $\eta_* \gg \mu_0$, $T\cdot T = 2\theta^2$ (равенство выполняется при достижении предела текучести), $T\cdot T^{\oplus} = 0$, $T\cdot T^{\oplus\oplus} = -T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}$, из полученного уравнения, умноженного на $(G_0G_1)^{-1}$, следует

$$\eta_* = \frac{\theta^2}{\lambda_1 T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}/(2G_0) + (D + \lambda_1 D^{\oplus})\cdot T - \theta^2/\mu_2}, \quad (3)$$

где $\lambda_1 = \mu_1/G_1$. Наконец, подставляя (3) в уравнение (2), разделенное на G_0G_1, после преобразований получим реологическое уравнение УПВТ, содержащего полости:

$$\frac{\lambda_1}{G_0}\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T + \lambda_1(D^{\oplus}\cdot T + T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}/(2G_0)) - \theta^2/\mu_2}\Big)T^{\oplus\oplus} +$$
$$+ \frac{1}{G_0}\Big[\mu_0 + \lambda_1 G_0 + \frac{(1 + G_0/G_1)\theta^2}{D\cdot T + \lambda_1(D^{\oplus}\cdot T + T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}/(2G_0)) - \theta^2/\mu_2} + \mu_0\,\frac{G_0}{G_1} +$$
$$+ \lambda_1\,\frac{G_0}{\mu_2}\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T + \lambda_1(D^{\oplus}\cdot T + T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}/(2G_0)) - \theta^2/\mu_2}\Big)\Big]T^{\oplus} +$$
$$+ \Big[1 + \frac{1}{\mu_2}\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T + \lambda_1(D^{\oplus}\cdot T + T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}/(2G_0)) - \theta^2/\mu_2}\Big)\Big]T =$$
$$= 2\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T + \lambda_1(D^{\oplus}\cdot T + T^{\oplus}\cdot T^{\oplus}/(2G_0)) - \theta^2/\mu_2}\Big)(D + \lambda_1 D^{\oplus}), \quad (4)$$

которое с учетом обозначений (3) записывается в виде

$$\frac{\lambda_1}{G_0}(\mu_0+\eta_*)T^{\oplus\oplus} + \frac{1}{G_0}\Big[\mu_0 + \lambda_1 G_0 + \Big(1+\frac{G_0}{G_1}\Big)\eta_* + \mu_0\frac{G_0}{G_1} + \lambda_1\frac{G_0}{\mu_2}(\mu_0+\eta_*)\Big]T^{\oplus} + \\ + \Big(1+\frac{\mu_0+\eta_*}{\mu_2}\Big)T = 2(\mu_0+\eta_*)(D+\lambda_1 D^{\oplus}).$$

В случае чистого сдвига реологическое уравнение УПВТ с полостями принимает вид

$$\frac{\lambda_1}{G_0}(\mu_0+\eta_*)\ddot{\tau} + \frac{1}{G_0}\Big[\mu_0 + \lambda_1 G_0 + \Big(1+\frac{G_0}{G_1}\Big)\eta_* + \mu_0\frac{G_0}{G_1} + \lambda_1\frac{G_0}{\mu_2}(\mu_0+\eta_*)\Big]\dot{\tau} + \\ + \Big(1+\frac{\mu_0+\eta_*}{\mu_2}\Big)\tau = 2(\mu_0+\eta_*)(\dot{\varepsilon}+\lambda_1\ddot{\varepsilon}), \qquad (5)$$

где

$$\eta_* = \frac{2\tau_*^2}{(\lambda_1/G_0)\dot{\tau}^2 + 2(\dot{\varepsilon}+\lambda_1\ddot{\varepsilon})\tau - 2\tau_*^2/\mu_2},$$

τ_* — предел текучести при чистом сдвиге.

2. Проведем анализ поведения УПВТ с микрополостями при различных режимах нагружения.

2.1. К среде приложено постоянное сдвиговое напряжение $\tau < \tau_*$, такое что $\dot{\tau} = 0$. Поскольку при этом микрополости не деформируются, $G_1 \to \infty$, $\lambda_1 \to 0$, $G_0/G_1 \ll 1$. Кроме того, так как при данных условиях нагружения структура среды еще не разрушается или очень слабо изменяется, то начальное значение μ_2 практически не меняется. Следовательно, в случае твердопластичных сред $\mu_2 \gg \mu_0$, $\eta_* \gg \mu_0$ и уравнение (5) сводится к уравнению вида

$$\dot{\varepsilon}_c = f(\tau,t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\eta_*}+\frac{1}{\mu_2}\Big)\tau, \qquad (6)$$

где $\eta_* = \tau_*^2/(\dot{\varepsilon}\tau - \tau_*^2/\mu_2)$. Отсюда в простейшем случае, когда $\mu_2 = \mathrm{const}$, получим решение для установившейся ползучести

$$\varepsilon_c = \varepsilon_c(0) + \frac{\tau}{2}\Big(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\eta_*}\Big)t. \qquad (7)$$

Выясним, каким образом выражения (6) и (7) соотносятся с известными зависимостями $\dot{\varepsilon}_c$ и ε_c от t для режима ползучести твердых материалов. В случае полимеров деформация состоит из упругой, вязкоупругой и вязкотекучей составляющих [12]. (Последний вид деформации обусловлен необратимым скольжением макромолекул относительно друг друга при температурах, превышающих температуру текучести.) При этом скорость ползучести асимптотически стремится к постоянной величине [2]: $\dot{\varepsilon}_c = A(\tau)$, т. е. зависимость деформации от времени в случае ползучести можно аппроксимировать соотношением

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(0) + A(\tau)t. \qquad (8)$$

Для металлов при нелинейной зависимости $\dot{\varepsilon}_c$ от τ используется теория течения

$$\dot{\varepsilon}_c = f(\tau), \qquad (9)$$

если τ медленно и монотонно изменяется во времени. Таким образом, полученные в данной работе зависимости (6) и (7) аналогичны (9) и (8) соответственно, т. е. обобщенное уравнение сводится к известным уравнениям установившейся ползучести [2, 12].

2.2. К среде приложено изменяющееся во времени сдвиговое напряжение, значение которого меньше предела текучести, т. е. $\tau < \tau_*$, $\dot{\tau} \neq 0$. В данном случае также $G_1 \to \infty$, $\lambda_1 \to 0$, $G_0/G_1 \ll 1$. С учетом этого, разделив (5) на η_*, получим

$$\frac{1}{G_0}\Big(1 + \frac{\mu_0}{\eta_*}\Big)\dot{\tau} + \Big[\frac{1}{\eta_*} + \Big(1 + \frac{\mu_0}{\eta_*}\Big)\frac{1}{\mu_2}\Big]\tau = 2\Big(1 + \frac{\mu_0}{\eta_*}\Big)\dot{\varepsilon}_e.$$

Поскольку $\mu_0/\eta_* \ll 1$, отсюда следует

$$\frac{1}{G_0}\,\dot{\tau} + \Big(\frac{1}{\eta_*} + \frac{1}{\mu_2}\Big)\tau = 2\dot{\varepsilon}_e. \tag{10}$$

Если τ достаточно мало, так что $(1/\eta_* + 1/\mu_2)\tau \ll \dot{\tau}/G_0$, то уравнение (10) сводится к закону Гука $\tau = 2G_0\varepsilon_e$, соответствующему процессу упругой деформации среды. В случае трехмерного деформирования при $T < \theta$, $T^{\oplus} \neq 0$, $G_1 \to \infty$ с учетом того, что $\mu_0/\mu_2 \ll 1$, уравнение (4) сводится к уравнению вида

$$\Big(1 + \frac{\theta^2}{\mu_2 D\cdot T - \theta^2}\Big)T + \frac{\mu_0}{G_0}\Big(1 + \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\theta^2}{D\cdot T - \theta^2/\mu_2}\Big)T^{\oplus} = 2\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T - \theta^2/\mu_2}\Big)D, \tag{11}$$

соответствующему модели гомогенного УПВТ. Если положить $\theta^2/\mu_2 \ll 1$, то (11) преобразуется в уравнение

$$T + \frac{1}{G_0}\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T}\Big)T^{\oplus} = 2\Big(\mu_0 + \frac{\theta^2}{D\cdot T}\Big)D \tag{12}$$

($\mu_0 + \theta^2/(D\cdot T) = \mu_z$ — структурная вязкость гомогенной среды), которое подтверждено экспериментально [5]. При большой интенсивности сдвиговых напряжений ($\theta^2(\mu_0 D \times T)^{-1} \ll 1$) вследствие разрушения упорядоченной структуры среды ($\mu_z \to \mu_0$) уравнение (12) сводится к хорошо исследованному уравнению Максвелла для ньютоновских жидкостей [13]

$$T + \lambda_0 T^{\oplus} = 2\mu_0 D, \qquad \lambda_0 = \mu_0/G_0. \tag{13}$$

2.3. Если $T > \theta$, $D\cdot T \gg \theta^2/\mu_2$, т. е. деформация происходит в режиме высокоскоростного пластического течения, и при этом $(1 + G_0/G_1)\theta^2\{D\cdot T + \lambda_1[D^{\oplus}\cdot T + T\cdot T/(2G_0)] - \theta^2/\mu_0\}^{-1} \ll \mu_0$, то с учетом того, что $\mu_0/\mu_2 \ll 1$, из (4) получим

$$T + (\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_0/G_1)T^{\oplus} + \lambda_0\lambda_1 T^{\oplus\oplus} = 2\mu_0(D + \lambda_1 D^{\oplus}). \tag{14}$$

Если режим нагружения таков, что слагаемое $\lambda_0\lambda_1 T^{\oplus\oplus}$ очень мало по сравнению с первыми двумя членами в левой части уравнения (14), то это уравнение сводится к классическому уравнению Джеффриса, описывающему поведение гелей, эмульсий, суспензий (в том числе газовых, т. е. жидкостей с пузырьками) [14, 15]:

$$T + \tilde{\lambda}T^{\oplus} = 2\mu_0(D + \lambda_1 D^{\oplus}). \tag{15}$$

Здесь $\tilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 + \mu_0/G_1$; λ_1 — время ретардации (запаздывающего восстановления формы деформированного объема среды после снятия напряжения). Очевидно, что ретардация обусловлена наличием в среде полостей: при $G_1 \to \infty$ уравнение (15) сводится к уравнению Максвелла (13).

Проведем анализ реологических характеристик УПВТ, содержащего полости, на примере течения Куэтта, для которого в декартовой системе координат (x^1, x^2, x^3) компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$ имеют вид $v^1 = \dot{\varepsilon}x^2$, $v^2 = v^3 = 0$. При этом будем учитывать, что полный тензор напряжений имеет вид

$$\chi = -pI + T = -pI + ((1/3)\,\mathrm{tr}\,T)I + S = -(p - (1/3)\,\mathrm{tr}\,T)I + S,$$

где p — термодинамическое давление; I — единичный тензор; T — тензор дополнительных вязких напряжений; $\operatorname{tr} T$ — след тензора T; S — девиатор тензора T. В уравнение (15), записанное в матричной форме, подставим значения конвективных производных

$$T^{\oplus} = \frac{dT}{dt} + T \cdot W + (T \cdot W)^{\text{т}} + a(T \cdot D + D \cdot T),$$

$$D^{\oplus} = \frac{dD}{dt} + D \cdot W + (D \cdot W)^{\text{т}} + 2D^2,$$

где $D = (\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\text{т}})/2$; $W = (\nabla \boldsymbol{v} - \nabla \boldsymbol{v}^{\text{т}})/2$. С учетом того что для установившегося сдвигового течения $dT/dt = 0$, $dD/dt = 0$, после разложения уравнения (15) по i-, j-компонентам получим систему алгебраических уравнений, в которых компоненты симметричного тензора дополнительных вязких напряжений

$$T = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \tau^{12} & \tau^{13} \\ \tau^{21} & \sigma^{22} & \tau^{23} \\ \tau^{31} & \tau^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

имеют вид

$$\tau^{12} = \tau^{21} = \frac{\mu_0 \dot{\varepsilon}_\tau + \lambda_1 \tilde{\lambda} \mu_0 \dot{\varepsilon}_\tau^3 (1 - a^2)}{(1 - a^2) \tilde{\lambda}^2 \dot{\varepsilon}_\tau^2 + 1}, \qquad \tau^{13} = \tau^{23} = \tau^{31} = \tau^{32} = 0,$$

$$\sigma^{11} = (1 - a)(\tilde{\lambda} \tau^{12} - \mu_0 \lambda_1 \dot{\varepsilon}_\tau) \dot{\varepsilon}_\tau, \qquad \sigma^{22} = (1 + a)(\lambda_1 \mu_0 \dot{\varepsilon}_\tau - \tilde{\lambda} \tau^{12}) \dot{\varepsilon}_\tau, \qquad \sigma^{33} = 0$$

и, следовательно,

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} T = \frac{1}{3} (\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33}) = -\frac{2}{3} a \mu_0 \dot{\varepsilon}_\tau^2 \, \frac{\tilde{\lambda} - \lambda_1}{1 + (1 - a^2) \tilde{\lambda}^2 \dot{\varepsilon}_\tau^2}.$$

Таким образом, если происходит чисто сдвиговое деформирование (сдвиговое течение), т. е. $\dot{\varepsilon}_\tau \neq 0$, то в идеальной жидкости $\mu_0 = 0$, $\tilde{\sigma} = 0$ и $\chi = -pI + S$; если же среда вязкая, то $\tilde{\sigma} \neq 0$, т. е. в ней формируются нормальные к плоскости сдвига напряжения σ^{11} и σ^{22}, что подтверждается экспериментально (эффект Вейзенберга) [16]. При этом вискозиметрические функции для исследуемой среды, т. е. эффективная сдвиговая вязкость μ_*, а также первая N_1 и вторая N_2 разности нормальных напряжений записываются в виде

$$\mu_* = \frac{\tau^{12}}{\dot{\varepsilon}_\tau} = \mu_0 \, \frac{1 + (1 - a^2) \lambda_1 \dot{\varepsilon}_\tau \, \mathrm{De}}{1 + (1 - a^2) \, \mathrm{De}^2}; \tag{16}$$

$$N_1 = \sigma^{11} - \sigma^{22} = 2\mu_0 \, \frac{(\tilde{\lambda} - \lambda_1) \dot{\varepsilon}_\tau^2}{1 + (1 - a^2) \, \mathrm{De}^2} = 2\mu_0 \, \frac{(1 + G_0/G_1) \dot{\varepsilon}_\tau \, \mathrm{De}}{1 + (1 - a^2) \, \mathrm{De}^2}; \tag{17}$$

$$N_2 = \sigma^{22} - \sigma^{33} = -\frac{(1 + a) \mu_0 (\tilde{\lambda} - \lambda_1) \dot{\varepsilon}_\tau^2}{1 + (1 - a^2) \, \mathrm{De}^2} = -\frac{(1 + a)(1 + G_0/G_1) \mu_0 \dot{\varepsilon}_\tau \, \mathrm{De}}{1 + (1 - a^2) \, \mathrm{De}^2}, \tag{18}$$

где $\mathrm{De} = \tilde{\lambda} \dot{\varepsilon}_\tau$ — число Деборы. Вследствие того что эффективная вязкость всегда должна оставаться положительной, для параметра a, согласно (16), должно выполняться неравенство $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Из [13] следует, что реальным процессам в жидкостях соответствуют только верхние конвективные производные от тензоров напряжения и скорости деформации, т. е. $-1 \leqslant a \leqslant 0$. Необходимо отметить, что в случае среды, содержащей только практически недеформируемые микрозародыши полостей, $G_1 \to \infty$, $\lambda_1 \to 0$ и функции (16)–(18) переходят в систему вискозиметрических функций модели Максвелла [5].

Выполним анализ зависимости изотропной составляющей полного тензора напряжений $\chi = -(p - \tilde{\sigma})I + S$ от скорости сдвиговой деформации $\dot{\varepsilon}_\tau$. С учетом того что $-1 \leqslant a \leqslant 0$, $\tilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 + \mu_0/G_1$, изотропная составляющая тензора χ записывается в виде

$$-\tilde{P}I = -(p - \tilde{\sigma})I = -\Big(p - \frac{2}{3}\,|a|\,\frac{(G_0 + G_1)\mu_0^2\dot{\varepsilon}_\tau^2}{G_0G_1[(1 - a^2)\tilde{\lambda}^2\dot{\varepsilon}_\tau^2 + 1]}\Big)I,$$

т. е. при $\mu_0 \neq 0$, $\dot{\varepsilon}_\tau \neq 0$ гидростатическое давление $\tilde{P}$ в среде понижается и в окрестности микрополостей формируется растягивающее напряжение. Если это напряжение удовлетворяет условию расширения микрополостей [17], то их объемная концентрация увеличивается. Однако при дальнейшем увеличении $\dot{\varepsilon}_\tau$, так что $(1 - a^2)\tilde{\lambda}^2\dot{\varepsilon}_\tau^2 \gg 1$, имеем

$$-\tilde{P}I \approx -\Big(p - \frac{2}{3}\,|a|\mu_0^2\,\frac{G_0^{-1} + G_1^{-1}}{(1 - a^2)\tilde{\lambda}^2}\Big)I = -\Big(p - \frac{2}{3}\,\frac{|a|}{1 - a^2}\,G_1\,\frac{1 + G_1/G_0}{(G_1/G_0 + \mu_1/\mu_0 + 1)^2}\Big)I.$$

Так как G_1 уменьшается с ростом полостей, то будет выполнено условие $G_1/G_0 \ll 1$ и

$$\tilde{P} \to p - \frac{2}{3}\,\frac{|a|}{1 - a^2}\,\frac{G_1}{(1 + \mu_1/\mu_0)^2}.$$

Таким образом, с уменьшением G_1 гидростатическое давление $\tilde{P}$ возрастает, стремясь к термодинамическому (“исходному”) давлению p, рост полостей при этом замедляется.

Поскольку здесь речь идет о принципиально важном эффекте — отрицательной обратной связи в механизме роста полостей (в зоне сдвигового течения), ограничивающей процесс развития кавитации, представляется целесообразным провести сравнительный анализ этого процесса, используя другой подход.

3. С учетом того что в механической модели, схема которой представлена на рис. 1, и соответственно в построенном по этой модели реологическом уравнении (4) отсутствуют явные зависимости модуля сдвиговой упругости G_1 и эффективной вязкости μ_* от объемной концентрации полостей α, используем следующий подход к построению реологического уравнения УПВТ с полостями.

Выражения для эффективного модуля сдвиговой упругости G и эффективной вязкости среды, содержащей полости с фиксированной объемной концентрацией α, можно представить в виде [18]

$$G(\alpha) = \frac{(1 - \alpha)G_\infty}{1 + [(8 - 10\nu)/(7 - 5\nu)][1 + (1 - \alpha_m\alpha)/\alpha_m^2]\alpha}; \tag{19}$$

$$\mu = \mu_0/(1 - 1{,}09\sqrt[3]{\alpha}\,), \qquad \alpha < \alpha_m, \tag{20}$$

где G_∞ — динамический модуль сдвиговой упругости гомогенной матрицы; $0{,}4 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5$ — коэффициент Пуассона матрицы; $\alpha_m \simeq 0{,}75$ — объемная концентрация предельной упаковки полостей; μ_0 — сдвиговая вязкость матрицы. Механическая модель гомогенной среды, реологически эквивалентной исследуемой, содержащей полости с фиксированным значением $0 \leqslant \alpha < \alpha_m$, представлена на рис. 2. Здесь $G(\alpha)$, $\mu(\alpha)$ — модуль упругости и вязкость реологически эквивалентной среды, определяемые из (19) и (20) соответственно; η_*, μ_c — пластическая и сдвиговая вязкость реологически эквивалентной среды в режиме ползучести.

Используя методику построения уравнения (4), на основе механической модели реологически эквивалентной среды получим

$$\frac{\mu(\alpha) + \eta_*}{G(\alpha)}\,T^{\otimes} + \Big(1 + \frac{\mu(\alpha) + \eta_*}{\mu_c}\Big)T = 2[\mu(\alpha) + \eta_*]D, \tag{21}$$

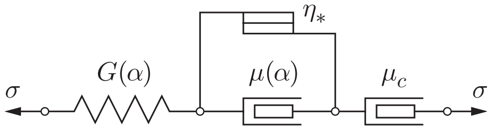

Рис. 2. Механический аналог гомогенной среды, реологически эквивалентной упругопластичновязкой среде, содержащей микрополости

где $\eta_* = \theta^2/(D\cdot T - \theta^2/\mu_c)$. При $T < \theta$, $T^\oplus = 0$ полости представляют собой микрозародыши $(\mu\big|_{\alpha\simeq 0} \simeq \mu_0)$. С учетом того что $\mu_0 \ll \eta_*$, из (21) следует уравнение

$$(1 + \eta_*/\mu_c)T = 2\eta_* D.$$

Отсюда в случае чистого сдвига получаем уравнения установившейся ползучести

$$\dot\varepsilon_c = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\eta_*} + \frac{1}{\mu_c}\Big)\tau, \qquad \varepsilon_c = \varepsilon_c(0) + \frac{\tau}{2}\Big(\frac{1}{\mu_c} + \frac{1}{\eta_*}\Big)t,$$

аналогичные уравнениям (6) и (7), совпадающим с известными уравнениями установившейся ползучести [2, 12].

В случае $T > \theta$, $D \cdot T \gg \theta^2/\mu_c$, т. е. в режиме высокоскоростной пластической деформации с переходом среды в состояние с разрушенной структурой, с учетом того что $\mu(\alpha) \ll \eta_*$, уравнение (21) сводится к уравнению вида

$$\Big(1 + \frac{\theta^2}{\mu_c D\cdot T}\Big)T + \frac{1}{G}\Big(\mu + \frac{\theta^2}{D\cdot T}\Big)T^\oplus = 2\Big(\mu + \frac{\theta^2}{D\cdot T}\Big)D.$$

При $D \cdot T \gg \theta^2$ это уравнение сводится к известному уравнению Максвелла [13]

$$T + \lambda T^\oplus = 2\mu D, \qquad \lambda = \mu/G.$$

Из последнего уравнения с помощью модели, использованной в п. **2**, для течения Куэтта получим

$$\mu_* = \frac{\mu}{1 + (1-a^2)\,\mathrm{De}}, \qquad \sigma^{11} = \frac{(1-a)\mu\lambda\dot\varepsilon_\tau^2}{1 + (1-a^2)\lambda^2\dot\varepsilon_\tau^2}, \qquad \sigma^{22} = -\frac{(1+a)\mu\lambda\dot\varepsilon_\tau^2}{1 + (1-a^2)\lambda^2\dot\varepsilon_\tau^2},$$

$$\sigma^{33} = 0, \qquad \tilde\sigma = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,T = \frac{2|a|}{3}\,\mu^2\,\frac{\dot\varepsilon_\tau^2}{G[1 + (1-a^2)\lambda^2\dot\varepsilon_\tau^2]}, \tag{22}$$

$$N_1 = \sigma^{11} - \sigma^{22} = \frac{2\mu\dot\varepsilon_\tau\,\mathrm{De}}{1 + (1-a^2)\,\mathrm{De}^2}, \qquad N_2 = \sigma^{22} - \sigma^{33} = -\frac{(1+a)\mu\dot\varepsilon_\tau\,\mathrm{De}}{1 + (1-a^2)\,\mathrm{De}^2}, \qquad \mathrm{De} = \lambda\dot\varepsilon_\tau.$$

Анализ поведения этих функций в зависимости от $\dot\varepsilon_\tau$ и α показал следующее. С увеличением $\dot\varepsilon_\tau$ величина μ_* сначала убывает, а N_1, N_2 и $N_1 - N_2$ увеличиваются. При увеличении $\dot\varepsilon_\tau$, когда выполняется соотношение $(1 - a^2)\,\mathrm{De} \gg 1$, вискозиметрические функции стремятся к асимптотическим выражениям

$$\mu_* \to \frac{G(\alpha)}{(1-a^2)\dot\varepsilon_\tau}, \qquad N_1 \to \frac{2G(\alpha)}{1-a^2}, \qquad N_2 \to -\frac{G(\alpha)}{1-a}, \qquad N_1 - N_2 \to \frac{3+a}{1-a^2}\,G(\alpha),$$

т. е. так же, как и $G(\alpha)$, эти функции монотонно убывают с увеличением α.

Проведем анализ зависимости гидростатического давления $\tilde P$, а следовательно, и растягивающего напряжения в среде от $\dot\varepsilon_\tau$. Изотропная часть полного тензора напряжений $\chi = -pI + T = -(p - \tilde\sigma)I + S$ имеет вид

$$-\tilde P I = -(p - \tilde\sigma)I = -\Big(p - \frac{2}{3}\,|a|\,\frac{\mu\dot\varepsilon_\tau}{G[1 + (1-a^2)\lambda^2\dot\varepsilon_\tau^2]}\Big)I,$$

т. е. при $\mu \neq 0$, $\dot{\varepsilon}_\tau \neq 0$ результирующее гидростатическое давление $\tilde{P}$ в среде понижается. Вследствие этого в окрестности микрополостей формируется поле растягивающих напряжений, что при выполнении полученного в работе [17] энергетического неравенства может привести к увеличению размера микрополостей. При дальнейшем увеличении $\dot{\varepsilon}_\tau$, когда выполняется условие $(1-a^2)\lambda^2\dot{\varepsilon}_\tau^2 \gg 1$, формула (22) сводится к выражению

$$\tilde{\sigma} = \frac{2|a|}{3(1-a^2)}\, G(\alpha),$$

т. е. с учетом (19) $\tilde{\sigma}$ является убывающей функцией α, при этом давление $\tilde{P}$ восстанавливается до исходного уровня p, приостанавливая рост полостей. Из анализа реологического уравнения (21) также следует наличие в механизме роста полостей отрицательной обратной связи, не позволяющей развиваться неограниченной кавитации при сдвиговом деформировании УПВТ, содержащего в начальный момент микрополости.

Таким образом, реологическое уравнение (4) соответствует обобщенной модели сдвигового деформирования конденсированных сред (жидких, жидкообразных и твердопластичных), содержащих микрополости. Во всех режимах деформирования (установившейся ползучести, упругого деформирования, пластического деформирования и вязкой текучести среды) обобщенная модель переходит в ряд известных, экспериментально проверенных моделей, соответствующих этим режимам сдвигового деформирования конденсированных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Разрушение** / Под ред. Г. Любовица. М.: Мир, 1973. Т. 1.
2. **Рыбин В. В.** Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986.
3. **Лаврентьев М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1977.
4. **Стебновский С. В.** О сдвиговой прочности структурированной воды // Журн. техн. физики. 2004. Т. 74, вып. 1. С. 21–23.
5. **Стебновский С. В.** Тангенциальные разрывы параметров полярной жидкости при сдвиговом деформировании // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 3. С. 41–49.
6. **Стебновский С. В.** Сдвиговая неустойчивость структуры сред, обладающих вязкой текучестью // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 70–76.
7. **Tvergaard V.** Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions // Intern. J. Fracture. 1981. V. 17, N 4. P. 389–407.
8. **Роменский Е. И.** Релаксационная модель для описания деформирования пористых материалов // ПМТФ. 1988. № 5. С. 145–149.
9. **Мержиевский Л. А., Реснянский А. Д.** О моделировании динамического деформирования сферопластика // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 3. С. 119–121.
10. **Киселев С. П., Фомин В. М.** О модели пористого материала с учетом пластической зоны, возникающей в окрестности поры // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 6. С. 125–133.
11. **Стебновский С. В.** Условия развития кавитации в склерономных средах // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 87–97.
12. **Бартенев Г. М.** Физика и механика полимеров / Г. М. Бартенев, Ю. В. Зеленов. М.: Высш. шк., 1983.
13. **Астаритта Д.** Основы механики неньютоновских жидкостей / Д. Астаритта, Д. Маруччи. М.: Мир, 1978.

14. **Рейнер М.** Реология. М.: Наука, 1965.
15. **Артюшков Л. С**. Динамика неньютоновских жидкостей. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. мор. техн. ун-та, 1997.
16. **Берд Р. Б., Кертис Ч. Ф.** Удивительные полимерные жидкости // Физика за рубежом — 86. Сер. А. Исследования. М.: Мир, 1986. С. 29–51.
17. **Стебновский С. В.** Обобщенная реологическая модель кавитирующих конденсированных сред // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 3. С. 116–129.
18. **Стебновский С. В.** Сдвиговая упругость жидких сред, содержащих пузырьки // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 3. С. 127–128.

Поступила в редакцию 21/II 2006 г.,
в окончательном варианте — 25/VII 2006 г.