

УДК 532.546.06

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ДРЕНАЖЕ В ИНФИЛЬТРАЦИОННОЙ КАЙМЕ ПРЕСНЫХ ГРУНТОВЫХ ВОД НАД СОЛЕННЫМИ

Ю. И. Капранов, В. Н. Эмих

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: emikh@hydro.nsc.ru

В прямой постановке решена и детально исследована многопараметрическая краевая задача о фильтрации в дренируемой кайме пресных инфильтрационных вод над полежащими солеными водами.

Ключевые слова: кайма пресных вод, инфильтрация, параметры отображения, критический режим дренирования.

В работе [1] получено решение задачи об установившемся течении к горизонтальным трубчатым дренам в кайме пресных грунтовых вод над солеными при равномерной инфильтрации на свободную поверхность каймы и исследованы предельные режимы дренирования, связанные с каждой из двух свободных границ каймы: свободной поверхностью и поверхностью раздела. На основе этих результатов в настоящей работе выполнен полный анализ указанного фильтрационного процесса в прямой постановке краевой задачи.

1. Постановка задачи, построение решения. В почву, содержащую слой пресных вод толщиной M_0 над солеными водами, в некоторый момент начинает происходить инфильтрация с равномерно распределенной по площади интенсивностью ϵ . Одновременно в слое на высоте T_0 над поверхностью соленых вод включаются с одинаковыми фильтрационными расходами, компенсирующими инфильтрацию, равноудаленные горизонтальные трубчатые дрена, моделируемые точечными стоками. Будем считать, что соленые воды изолированы от внешних источников и стоков, вследствие чего остается неизменным их первоначальный объем. Сохраняется и объем слоя пресных вод; последний трансформируется в так называемую кайму. Периодичность течения в кайме, обусловленная принятыми допущениями, позволяет ограничиться изучением процесса в одном из полупериодов (рис. 1).

Краевая задача, соответствующая изложенной схеме течения, состоит в нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости фильтрации; ψ — функция тока), отнесенного к величине αL (α — коэффициент фильтрации грунта; L — половина расстояния между соседними дренами), как аналитической в области течения функции комплексной координаты $z = x + iy$, отнесенной к L , при граничных условиях

$$\begin{aligned} CD: \quad x = 0, \quad \psi = 0; \quad ED: \quad x = 0, \quad \psi = \epsilon; \quad AG: \quad x = 1, \quad \psi = \epsilon; \\ AC: \quad \varphi + y = 0, \quad \psi - \epsilon x = 0; \quad EG: \quad \varphi - \rho y = \text{const}, \quad \psi = \epsilon \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1).$$

Первое условие на участке EG основано на допущениях о неподвижности соленых вод при фильтрации пресных и непрерывности давления при переходе через границу раздела между пресными и солеными водами [2], плотности которых равны соответственно ρ_1 и ρ_2 .

Для решения поставленной задачи используется аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений, основы применения которой к задачам двумерной установив-

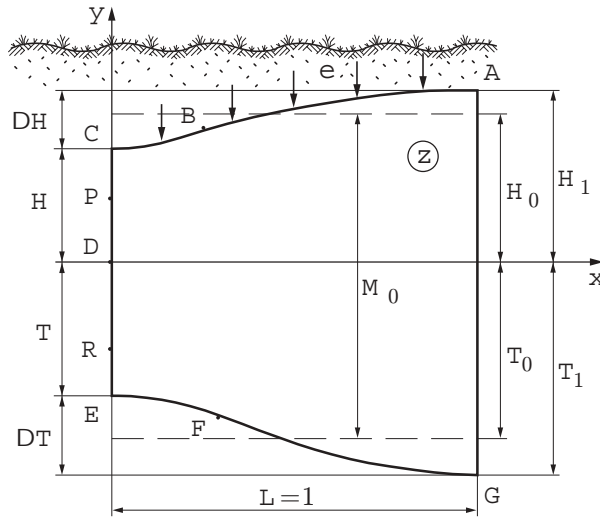


Рис. 1. Область течения в кайме пресных вод

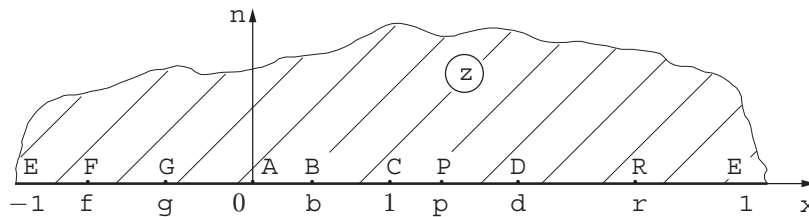


Рис. 2. Полу плоскость вспомогательной комплексной переменной

шейся фильтрации разработаны П. Я. Полубариновой-Кочиной [2]. Цель метода — нахождение функций $\Omega = d\omega/d\zeta$ и $Z = dz/d\zeta$, определенных в полу плоскости $\text{Im } \zeta \geq 0$ вспомогательной комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2). Поскольку в рассматриваемой задаче, как и в других задачах плоской фильтрации, область годографа скорости $\bar{w} = w_x + iw_y$ — круговой многоугольник (рис. 3), функция $w = w_x - iw_y$, конформно отображающая область комплексной скорости фильтрации w на полу плоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$, является отношением двух линейно независимых решений V_1 и V_2 следующего линейного дифференциального уравнения класса Фукса [2–4]:

$$\frac{d^2V}{d\zeta^2} + p(\zeta) \frac{dV}{d\zeta} + q(\zeta)V = 0, \tag{2}$$

где

$$p(\zeta) = -\frac{1}{\zeta - f} + \frac{1}{2(\zeta - g)} + \frac{1}{2\zeta} - \frac{1}{\zeta - b} + \frac{1}{2(\zeta - 1)};$$

$$q(\zeta) = \frac{\zeta^3/2 + \mu_0\zeta^2 + \mu_1\zeta + \mu_2}{(\zeta - f)(\zeta - g)\zeta(\zeta - b)(\zeta - 1)}.$$

Кроме параметров отображения b, f, g , подлежащих определению, в коэффициент $q(\zeta)$ уравнения (2) входят так называемые аксессуарные (дополнительные) параметры μ_0, μ_1, μ_2 . В их определении не возникает необходимости, если воспользоваться формулой Лиувилля

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = \frac{C \exp(-\int p(\zeta)d\zeta)}{V_2^2} = \frac{C(\zeta - f)(\zeta - b)}{V_2^2 \sqrt{(\zeta - g)\zeta(\zeta - 1)}}. \tag{3}$$

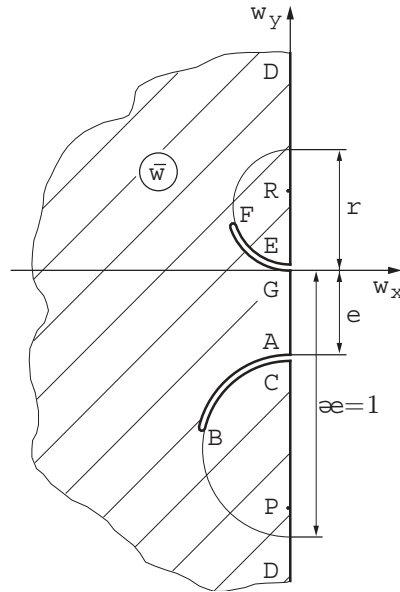


Рис. 3. Годограф скорости фильтрации

Формула (3), в которой C — постоянный множитель, включает в себя только коэффициент $p(\zeta)$ и позволяет определить функции V_1 и V_2 , если известна зависимость $w(\zeta)$.

Для нахождения последней годограф скорости преобразуется в прямолинейный многоугольник W (рис. 4), который отображается затем на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (см. рис. 2). В результате имеем

$$W(\zeta) = \ln \frac{2i + \beta w}{2i\sigma - \alpha w} = i c_0 \int_0^\zeta \Phi(u) du \quad (c_0 > 0), \tag{4}$$

где

$$\Phi(u) = \frac{(b-u)(u-f)}{(p-u)(r-u)} \Phi_0(u), \quad \Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{(u-g)u(1-u)}},$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\epsilon + \rho} + \sqrt{\epsilon(1 + \rho)}}{\sqrt{\epsilon + \rho} - \sqrt{\epsilon(1 + \rho)}}, \quad \alpha = \frac{\sigma - 1}{\epsilon} + \sigma + 1, \quad \beta = \frac{\sigma - 1}{\epsilon} - \sigma - 1.$$

На рис. 4 буквами C и E в кружках указано положение соответствующих точек в предельных случаях, которые будут рассмотрены в п. 3.

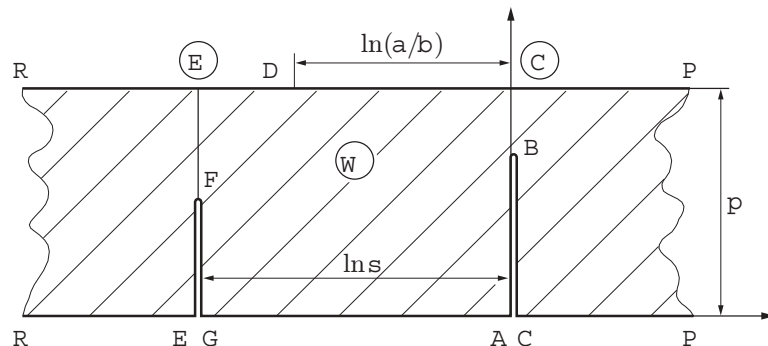


Рис. 4. Промежуточная область при отображении годографа скорости на полуплоскость

На основе зависимости (4) получим функцию $w(\zeta)$ и далее из (3) — функции V_1 и V_2 . Вместе с тем $w = d\omega/dz = \Omega/Z$, и, следовательно, искомые функции Ω и Z могут отличаться соответственно от функций V_1, V_2 одним и тем же функциональным множителем, вид которого устанавливается путем анализа его поведения в окрестности каждой особой точки. В результате приходим к следующим зависимостям [1]:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -2c_1 \frac{F_1(\zeta)}{d-\zeta} \lambda(\zeta), \quad \frac{dz}{d\zeta} = ic_1 \frac{F_2(\zeta)}{d-\zeta} \lambda(\zeta), \quad \lambda(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta-p)(\zeta-r)}{(\zeta-g)\zeta(\zeta-1)}}, \quad (5)$$

$$F_1(\zeta) = \sigma U - 1/U, \quad F_2(\zeta) = \alpha U + \beta/U, \quad U = \exp[W(\zeta)/2], \quad c_1 > 0.$$

Для функции $\lambda(\zeta)$ выбирается ветвь, положительная при $\zeta > r$.

2. Определение параметров отображения. Наряду с постоянными множителями c_0 и c_1 зависимости (4), (5) содержат неизвестные аффиксы b, g, d, f, p, r особых точек. Принятая в настоящей работе прямая постановка краевой задачи предусматривает определение всех указанных параметров.

Рассмотрим вначале в качестве внутренней задачу нахождения параметров c_0, b, d, f, p , считая заданными величины ϵ, ρ и аффиксы g, r . Используя известные элементы области W и учитывая соответствие особых точек при ее отображении на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (см. рис. 2, 4), получим на основе (4) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(b-u)(u-f) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(1-u)}} &= 0, \\ c_0 \int_g^0 \frac{(b-u)(u-f) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)(-u)(1-u)}} &= \ln \sigma, \\ c_0 \int_1^d \frac{(b-u)(u-f) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(u-1)}} &= \ln \frac{\alpha}{\beta}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$c_0(p-f)(p-b)\Phi_0(p) = r-p, \quad c_0(r-f)(r-b)\Phi_0(r) = r-p.$$

Для удобства изложения произведем замену

$$k = \sqrt{\frac{-g}{1-g}}, \quad s = \sqrt{\frac{1-g}{r-g}}, \quad t = \sqrt{\frac{1-g}{p-g}}, \quad \Theta = \sqrt{\frac{1-g}{d-g}}, \quad (7)$$

при которой задание параметров отображения g, r равнозначно заданию параметров k, s . Величины t, Θ , с которыми связаны параметры отображения p, d , подлежат определению наряду с величинами c_0, b, f , входящими в систему (6). Процедура ее решения основана на ряде преобразований, при которых используются эллиптические интегралы и функции, наиболее полно представленные в [5].

Используя разложение

$$\frac{(b-u)(u-f)}{(p-u)(r-u)} = \frac{(r-f)(r-b)}{(r-p)(r-u)} - \frac{(p-f)(p-b)}{(r-p)(p-u)} - 1,$$

запишем первое уравнение системы (6) в виде

$$\frac{\nu(r) - \nu(p)}{r-p} - K' = 0, \quad (8)$$

где

$$\nu(u) = \frac{(u-f)(u-f)}{u-1} \Pi\left(-\frac{1}{u-1}, k'\right); \quad K' = K(k'); \quad k' = \sqrt{1-k^2};$$

K, Π — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода, причем для последних при $\gamma^2 < 0$ имеет место представление

$$\Pi(\gamma^2, k') = \frac{k'^2 K'}{k'^2 - \gamma^2} - \frac{\pi \gamma^2 \Lambda_0(\delta, k')}{2\sqrt{\gamma^2(1-\gamma^2)(\gamma^2 - k'^2)}}, \quad \delta = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - k'^2}}.$$

В нем содержится стандартизованная лямбда-функция

$$\Lambda_0(\delta, k') = (2/\pi)[E'F(\delta, k) + K'E(\delta, k) - K'F(\delta, k)],$$

посредством которой интеграл $\Pi(\gamma^2, k')$ выражается через неполные $F(\delta, k)$, $E(\delta, k)$ и полные K', E' эллиптические интегралы первого и второго рода. При этом уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\nu_1(r) - \nu_1(p)}{r-p} + \frac{(r-f)(r-b)}{(r-p)(r-g)} K' - \frac{(p-f)(p-b)}{(r-p)(p-g)} K' &= K', \\ \nu_1(u) &= \frac{\pi(u-f)(u-b)\sqrt{1-g}}{2\sqrt{u(u-g)(u-1)}} \Lambda_0\left(\arcsin \sqrt{\frac{1-g}{u-g}}, k'\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для сокращения записи будем опускать далее \arcsin во всех аргументах неполных эллиптических интегралов.

Исключим из уравнения (9) параметры b и f , используя два последних уравнения системы (6) с функцией Φ_0 , определенной согласно (4). Переходя по формулам (7) к параметрам k, s, t , выразим через них одну из искомым величин — коэффициент c_0 :

$$c_0 k' = \pi/(2K')[\Lambda_0(s, k') - \Lambda_0(t, k')] + \Delta(s)/s - \Delta(t)/t, \quad (10)$$

где $\Delta(\chi) = \sqrt{(1-\chi^2)(1-k^2\chi^2)}$.

Аналогично преобразуется второе уравнение системы (6), которое окончательно принимает вид

$$F(t, k) = F(s, k) + (\ln \sigma/\pi)K'. \quad (11)$$

Отсюда с использованием известных соотношений теории эллиптических функций получим представление для параметра t

$$t = [s \Delta(\tau) + \tau \Delta(s)]/(1 - k^2 s^2 \tau^2). \quad (12)$$

Из уравнения (11) в силу монотонного возрастания функции $F(x, k)$ по аргументу x следуют неравенства

$$K/K' \geq \ln \sigma/\pi, \quad F(s, k) \leq K - (\ln \sigma/\pi)K'.$$

На их основе устанавливаются ограничения на параметры k, s

$$k_0 \leq k < 1, \quad 0 \leq s \leq s_0. \quad (13)$$

Здесь k_0 — корень уравнения

$$K(k_0)/K(k'_0) = \ln \sigma/\pi \quad (k'_0 = \sqrt{1-k_0^2}), \quad (14)$$

однозначная разрешимость которого обеспечивается, как и первое ограничение в (13), монотонным возрастанием интеграла $K(k)$ по модулю k . Величина s_0 определяется равенством

$$s_0 = \operatorname{sn}\left(K - \frac{\ln \sigma}{\pi} K', k\right) = \sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-k^2\tau^2}} \quad \left(\tau = \operatorname{sn}\left(\frac{\ln \sigma}{\pi} K', k\right)\right). \quad (15)$$

Эллиптическая функция sn является обращением неполного эллиптического интеграла первого рода.

Третье уравнение системы (6) приводится к виду

$$\frac{\pi}{2K'} [\Lambda_0(t, k') - \Lambda_0(s, k')] [K - F(\Theta, k)] - K[Z(t, k) - Z(s, k)] + \\ + \frac{\Delta(s)}{s} \Pi\left(\Theta, \frac{1}{s^2}, k\right) - \frac{\Delta(t)}{t} \Pi\left(\Theta, \frac{1}{t^2}, k\right) = \ln \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (16)$$

Кроме указанных эллиптических интегралов и функций, в уравнение (16) входит дзета-функция $Z(\delta, k) = E(\delta, k) - (E/K)F(\delta, k)$, а также неполные эллиптические интегралы третьего рода $\Pi(\Theta, n, k)$, аргумент которых связан с искомым параметром отображения d (см. (7)). Параметр $d \in (p, r)$ (см. рис. 2), и, следовательно, $\Theta \in (s, t)$. Аналитически устанавливается монотонное убывание от ∞ до $-\infty$ левой части уравнения (16) как функции параметра Θ при его возрастании в интервале (s, t) , что обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (16) относительно Θ ; однозначно определяется поэтому и параметр d .

Параметры b и f , которые ранее исключались посредством двух последних уравнений системы (6), выразим теперь через уже найденные. Представим указанные уравнения в виде

$$p^2 - (b + f)p + bf = a(r - p)P, \quad r^2 - (b + f)r + bf = a(r - p)R,$$

где

$$a = c_0^{-1}, \quad P = \Phi_0^{-1}(p), \quad R = \Phi_0^{-1}(r). \quad (17)$$

Отсюда следует

$$b + f = p + r - a(R - P), \quad bf = pr - a(pR - rP),$$

и поэтому искомые параметры должны удовлетворять квадратному уравнению

$$\Gamma(\gamma) = \gamma^2 + [p + r - a(R - P)]\gamma + pr - a(pR - rP) = 0. \quad (18)$$

С использованием соотношений (17), (7), (10), равенства (4) для $\Phi_0(r)$ и с учетом поведения лямбда-функции $\Lambda_0(\delta, k')$ устанавливаются неравенства $\Gamma(g) < 0$, $\Gamma(0) < 0$, $\Gamma(1) > 0$. Кроме того, $\lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} \Gamma(\gamma) = \infty$, и, следовательно, уравнение (18) имеет два простых действительных корня, определяющих параметры $f \in (-\infty, g)$ и $b \in (0, 1)$.

Таким образом, при задании параметров k, s с соблюдением ограничений (13) параметры c_0, p, d, b, f последовательно находятся из равенств (10), (12) и уравнений (16), (18); при этом используются переходные соотношения (7).

Выражение для коэффициента c_1 , содержащегося в зависимостях (5), можно получить на основе первой из этих зависимостей, записанной для участка PD (см. рис. 4). При $p < \zeta < d$ из (4) следует

$$W(\zeta) = W_1 - \ln(\alpha/\beta) + i\pi, \quad (19)$$

где

$$W_1 = c_0 \int_{\zeta}^d \frac{(u - b)(u - f) du}{(u - p)(r - u)\sqrt{(u - g)u(u - 1)}},$$

а первое уравнение в (5) преобразуется к виду

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{2c_1 F_1(\zeta) |\lambda(\zeta)|}{d - \zeta},$$

где

$$F_1(\zeta) = \frac{\beta\sigma U_1 + 1/U_1}{\sqrt{\alpha\beta}}; \quad U_1 = \exp\left[\frac{W_1(\zeta)}{2}\right]; \quad |\lambda(\zeta)| = \sqrt{\frac{(\zeta - p)(r - \zeta)}{(\zeta - g)\zeta(\zeta - 1)}}.$$

Отсюда с учетом второго условия в (1) на участке CD получаем

$$\omega(\zeta) = 2c_1 \int_p^\zeta \frac{F_1(\zeta)|\lambda(\zeta)| d\zeta}{d - \zeta} + \varphi(p) \quad (p < \zeta < d). \quad (20)$$

Согласно (1) при переходе на участок ED левая часть равенства (20) изменяется на величину $i\epsilon$ суммарного поступления инфильтрационных вод в пределах области фильтрации. Приравнявая эту величину к приращению правой части равенства (20) $2c_1 i\pi F_1(d)|\lambda(d)|$, получаем

$$c_1 = \frac{\epsilon\sqrt{\alpha\beta}}{2\pi(\beta\sigma + \alpha)} \sqrt{\frac{(d - g)d(d - 1)}{(d - p)(r - d)}}. \quad (21)$$

Для нахождения параметров g , r используем соотношения

$$-\int_0^1 y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = H_0, \quad -\int_{-\infty}^g y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = T_0, \quad (22)$$

левые части которых — объемы пресных вод выше и ниже уровня дрен в сформированной кайме, а правые — до включения дрен. Равенства (22) основаны на предположении о сохранении этих объемов в процессе образования каймы.

Первое уравнение в (22) содержит координаты точек кривой депрессии, параметрические уравнения которой получим из второй зависимости в (5), записанной для участка AC ($0 \leq \zeta \leq 1$):

$$x(\zeta) = c_1(\alpha + \beta) \int_\zeta^1 \frac{\cos V_1(v) |\lambda(v)|}{d - v} dv, \quad y(\zeta) = H + c_1(\alpha - \beta) \int_\zeta^1 \frac{\sin V_1(v) |\lambda(v)|}{d - v} dv, \quad (23)$$

$$V_1(v) = \frac{c_0}{2} \int_0^v \Phi(u) du.$$

Для функции $\Phi(u)$ сохраняется представление (4).

Согласно (23) первое уравнение в (22) можно записать в виде

$$H + c_1^2(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 \left[\int_\zeta^1 \frac{\sin V_1(v) |\lambda(v)|}{d - v} dv \right] \frac{\cos V_1(\zeta) |\lambda(\zeta)|}{d - \zeta} d\zeta = H_0. \quad (24)$$

В левую часть этого уравнения входит длина H граничного отрезка CD , который состоит из двух участков, разделенных точкой P . Учитывая характер изменения функций $F_2(\zeta)$, $\lambda(\zeta)$ при переходе через указанную точку и интегрируя второе уравнение в (5), находим

$$H = c_1 \int_1^p \frac{\alpha U + \beta U^{-1}}{d - \zeta} |\lambda(\zeta)| d\zeta + 2c_1 \sqrt{\alpha\beta} \int_p^d \frac{\text{sh}[W_1(\zeta)/2]}{d - \zeta} |\lambda(\zeta)| d\zeta, \quad (25)$$

где

$$U = \exp \frac{W(\zeta)}{2}; \quad W(\zeta) = c_0 \int_1^\zeta \frac{(u-b)(u-f) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(1-u)}}.$$

Функция $W_1(\zeta)$ определена в (19).

Преобразуя далее зависимости (4), (5) на линии раздела EG ($-\infty < \zeta \leq g$), придем к ее параметрическим уравнениям

$$x(\zeta) = \frac{c_1(\beta\sigma + \alpha)}{\sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^\zeta \frac{\cos V_2(v)|\lambda(v)|}{d-v} dv, \quad y(\zeta) = -T - \frac{c_1(\beta\sigma - \alpha)}{\sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^\zeta \frac{\sin V_2(v)|\lambda(v)|}{d-v} dv,$$

$$V_2(v) = \frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^v \frac{(b-u)(f-u) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(g-u)(-u)(1-u)}},$$

в результате чего второе уравнение в (22) запишется в виде

$$T + \frac{c_1^2(\beta^2\sigma^2 - \alpha^2)}{\sigma} \int_{-\infty}^g \left[\int_{-\infty}^\zeta \frac{\sin V_2(v)|\lambda(v)|}{d-v} dv \right] \frac{\cos V_2(\zeta)|\lambda(\zeta)|}{d-\zeta} d\zeta = T_0. \quad (26)$$

При использовании этого соотношения предварительно вычисляется величина T , для которой на основе (4), (5) получим выражение

$$T = 2c_1\sqrt{\alpha\beta} \int_d^r \frac{\operatorname{sh}[W_1(\zeta)/2]}{\zeta-d} \sqrt{\frac{(\zeta-p)(r-\zeta)}{(\zeta-g)\zeta(\zeta-1)}} d\zeta +$$

$$+ \frac{c_1}{\sqrt{\sigma}} \int_r^\infty \frac{\beta\sigma U + \alpha U^{-1}}{\zeta-d} \sqrt{\frac{(\zeta-p)(\zeta-r)}{(\zeta-g)\zeta(\zeta-1)}} d\zeta, \quad (27)$$

где

$$U = \exp \frac{W_2(\zeta)}{2}; \quad W_2(\zeta) = c_0 \int_\zeta^\infty \frac{(u-b)(u-f) du}{(u-p)(u-r)\sqrt{(u-g)u(u-1)}}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению параметров k , s при задании величин ϵ , ρ , M_0 и одной из величин H_0 или T_0 .

3. Предельные режимы дренирования. Выясним физический смысл ограничений (13) на значения параметра s .

Случай $s = s_0$. Из соотношений (12), (15) и формулы (10) для функции Δ следует, что $t = 1$, и в силу третьего равенства в (7) имеем $p = 1$. При этом из двух последних уравнений системы (6) и с учетом (4) получаем

$$1 - b = (r-f)(r-b)/(1-f)\Phi_0(r)/\Phi_0(1) = 0, \quad b = 1,$$

и, таким образом, точка B перегиба кривой депрессии и точка P участка CD совмещаются с точкой C . Вследствие этого из годографа выпадает полукруг $|\bar{w} + i(1+\epsilon)/2| < (1-\epsilon)/2$, $\operatorname{Re} \bar{w} \leq 0$, а из области W — полуполоса $\operatorname{Re} W > 0$, $0 \leq \operatorname{Im} W \leq \pi$ (см. рис. 3, 4). Для

точки C , в которой $\bar{w} = -i$, согласно (4) имеем $W = i\pi$, и далее на основе уравнений (23) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \operatorname{tg} V_1(1) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \operatorname{tg} \frac{|W(1)|}{2} = \infty,$$

т. е. точка C превращается в точку заострения.

Рассмотрим участок CD , на котором $\bar{w} = iw_y$, $w_y = d\varphi/dy \leq -1$. Из последнего неравенства и соотношения

$$p/(\rho_1 g) = -\varphi - y, \quad (28)$$

связывающего приведенный потенциал φ скорости фильтрации с давлением p , следует, что $dp/dy = -\rho_1 g(w_y + 1) \leq 0$, причем равенство выполняется только в точке C . На остальном участке CD давление ниже атмосферного, и его дальнейшее сколь угодно малое понижение должно привести к прорыву воздуха в дренаж. На возможность и физические предпосылки реализации такого критического режима впервые указал В. В. Ведерников [6].

Случай $s = 0$. Из второго соотношения в (7) и четвертого уравнения в (6) следует, что в этом случае $r = -f = \infty$: точки R , F совмещаются с точкой E , которая превращается в точку заострения линии раздела, причем в ней $\bar{w} = i\rho$. В результате из годографа выпадает полукруг $|\bar{w} - i\rho/2| < \rho/2$, $\operatorname{Re} \bar{w} \leq 0$, а из области W — полуплоскость $\operatorname{Re} W < \ln \sigma$, $0 \leq \operatorname{Im} W \leq \pi$ (см. рис. 2, 3). На участке ED , где также $\bar{w} = iw_y$, имеем $w_y \geq \rho$ и с использованием (28) получаем $dp/dy = -\rho_1 g(w_y + 1) \leq -\rho_2 g$. При этом равенство, характеризующее состояние гидростатического равновесия в зоне соленых вод, выполняется только в точке E , на которой, образно говоря, держится в рассматриваемом случае динамическое равновесие в потоке пресных вод. На остальном участке CE градиент гидродинамического давления превосходит стабилизирующее воздействие силы тяжести на соленые воды, и дальнейшее сколь угодно малое понижение давления должно вовлечь их в поток. Подобный режим впервые был выявлен в работе [7].

Таким образом, в каждом из указанных предельных случаев фильтрационный расход дрен является максимально допустимым и поэтому должен быть определен в первую очередь. Однако заранее неизвестно, какая критическая ситуация возникнет по мере интенсификации дренажа при той или иной глубине его заложения. Ключевую роль в решении этого вопроса играет рассматриваемый ниже двойной критический режим течения в кайме, совмещающий отмеченные режимы и режим, описанный впервые в работе [8] при анализе аналогичной фильтрационной схемы.

Случай $s_0 = 0$. В этом предельном режиме из годографа выпадают оба полукруга, а область W трансформируется в прямоугольник, отображаемый на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$ посредством зависимости

$$W(\zeta) = i \frac{\pi}{K'_0} F\left(\sqrt{\frac{\zeta}{k_0^2 + k_0'^2 \zeta^2}}, k'_0\right), \quad (29)$$

где $K'_0 = K(k'_0)$; $k'_0 = \sqrt{1 - k^2}$. Модули k_0 и k'_0 эллиптических интегралов определяются из уравнения (14), идентичного в рассматриваемом случае уравнению (11).

Из уравнения (16) следует

$$\Theta = \operatorname{sn}((K'_0/\pi) \ln(\beta\sigma/\alpha), k_0),$$

а равенство (21) принимает вид

$$c_1 = \epsilon \sqrt{\alpha\beta d(d-g)} / (2\pi(\beta\sigma + \alpha)). \quad (30)$$

В результате при задании величин ϵ , ρ однозначно определяются параметры d , g и коэффициент c_1 . Затем вычисляются все основные геометрические характеристики, связанные с каймой, включая толщину M_0 слоя пресных вод. В равенствах (24) и (26), определяющих величины H_0 и T_0 , в данном случае используются зависимости

$$V_1(v) = \frac{|W(v)|}{2}, \quad V_2(v) = \frac{\pi}{2K'_0} F\left(\sqrt{1 - \frac{g}{\zeta}}, k'_0\right), \quad \lambda(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta - g)}},$$

$$H = c_1 \int_1^d \frac{(\alpha U^{-1} - \beta U) d\zeta}{(d - \zeta)\sqrt{\zeta(\zeta - g)}}, \quad T = c_1 \int_d^\infty \frac{(\beta U - \alpha U^{-1}) d\zeta}{(\zeta - d)\sqrt{\zeta(\zeta - g)}}, \quad (31)$$

$$U = \exp\left[\frac{\pi}{2K'_0} F\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\zeta}}, k'_0\right)\right].$$

Функция $W(v)$ определена в (29).

4. Численные расчеты, анализ течения. Вычислительные алгоритмы, реализованные для рассматриваемой краевой задачи, основаны на численном решении трансцендентных уравнений относительно неизвестных параметров, содержащихся в зависимостях, которые используются для нахождения характеристик фильтрационного процесса. Однозначная разрешимость уравнений вида $F(\mu) = 0$ обеспечивается монотонностью функции $F(\mu)$ и различием ее знаков на концах интервала изменения искомого параметра μ . Для всех уравнений, рассматриваемых ниже и используемых при нахождении параметров k , s , а в предельных режимах дренирования также и параметра ϵ , такое поведение входящих в эти уравнения функций предварительно устанавливается численно. Алгоритм определения остальных неизвестных параметров, описанный в п. 2, был обоснован аналитически.

На первом этапе значение ϵ_{**} параметра ϵ , соответствующего двойному критическому режиму, находится из уравнения

$$F(\epsilon) = f[\epsilon, k_0(\epsilon)] = H_0 + T_0 = M_0 \quad (32)$$

с заданной правой частью M_0 .

Функция $f[\epsilon, k_0(\epsilon)]$, в которой зависимость $k_0(\epsilon)$ определяется уравнением (14), а сама функция — равенствами (24), (26), (30), (31), монотонно возрастает от 0 до ∞ при увеличении параметра ϵ от 0 до 1. Заметим, что согласно (4), (14) при таком увеличении параметр σ возрастает в интервале $(0, \infty)$, а модуль k_0 — в интервале $(0, 1)$. В силу указанного поведения функции $f[\epsilon, k_0(\epsilon)]$ из уравнения (32) однозначно вычисляется величина ϵ_{**} — максимально возможная (при данных значениях физических параметров M_0 , ρ) интенсивность дренирования. В ходе решения уравнения (32) определяется глубина $H_* = H_0(\epsilon_{**})$ заложения дрен в слое пресных вод, при которой по достижении величиной ϵ значения ϵ_{**} на грани дестабилизации оказываются обе подвижные границы каймы.

В зависимости от соотношения между величинами H_* и H_0 устанавливается, какой из двух указанных выше простых критических режимов возникнет по мере интенсификации дренажа, заложенного на глубине H_0 . Максимально достижимая при этом величина фильтрационного расхода дрен $\epsilon_* \in (0, \epsilon_{**})$ подлежит определению наряду с параметром k из системы уравнений

$$F_1(\epsilon) = f_1[\epsilon, k(\epsilon)] = H_0 \quad (\epsilon \in (0, \epsilon_{**})), \quad F_2(k) = f_2(\epsilon, k) = M_0 \quad (k \in (k_0, 1)). \quad (33)$$

Функции f_1 и f_2 определяются равенствами (24)–(27), которые следует преобразовать применительно к рассматриваемому критическому режиму.

Для решения системы (33) используется итерационная процедура. В ее внешнем цикле решается первое уравнение в (33), левая часть которого является сложной функцией параметра ϵ . При каждом значении параметра $\epsilon \in (0, \epsilon_{**})$ из соотношения (14) определяется

нижняя граница $k_0(\epsilon)$ допустимых значений параметра k . Для его нахождения используется второе уравнение в (33). Левая часть этого уравнения определяется выражениями (22) для величин H_0, T_0 , преобразованными к соответствующему предельному случаю, и возрастает от некоторого значения m_0 до ∞ при возрастании k от k_0 до 1. Величины m_0 и M_0 — значения толщины слоя пресных вод в двойном критическом режиме при выбранном значении параметра ϵ и при его максимально возможном значении ϵ_{**} соответственно. С учетом отмеченного для этого режима характера зависимости $M_0(\epsilon)$ заключаем, что $m_0 < M_0$, и, следовательно, параметр k однозначно вычисляется из второго уравнения системы (33).

С увеличением параметра ϵ от 0 до ϵ_{**} функция $F_1(\epsilon)$ возрастает от 0 до H_* в рамках критического режима, связанного с кривой депрессии, и убывает от M_0 до H_* во втором предельном случае. Таким образом, первое уравнение в (33) определяет в соответствующем простом критическом режиме фильтрационный расход дрен, максимально допустимый при заданной глубине H_0 их заложения. При $M_0 = 2$, $\rho = 0,02$ указанная зависимость характеризуется значениями параметра $\epsilon_* = 0,0216; 0,0554; 0,2597; 0,4944; \mathbf{0,5509}; 0,4718; 0,1303; 0,0200; 0,0012$, вычисленными соответственно при $H_0 = 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; \mathbf{0,5468}; 0,6; 1,0; 1,5; 1,9$ (выделенные цифры относятся к двойному критическому режиму).

Далее рассмотрим общий случай, полагая $\epsilon \in (0, \epsilon_*)$. При этом течение к дренам, заложенным на глубине H_0 , происходит в нормальном режиме дренирования. Вычисления на этом этапе расчетов основаны на зависимостях, представленных в пп. **1, 2**, и сводятся к нахождению параметров k, s из системы уравнений

$$G_1(k) = g_1[k, s(k)] = M_0, \quad G_2(s) = g_2(k, s) = H_0. \quad (34)$$

Функции g_1 и g_2 определяются равенствами (24)–(27).

Система (34) также решается посредством двухступенчатой итерационной процедуры. В ее внешнем цикле параметр $k \in (k_0, 1)$ находится из первого уравнения системы. Входящая в него зависимость $s = s(k)$ определяется вторым уравнением в (34), которое решается во внутреннем цикле. При любом значении $k \in (k_0, 1)$ функция g_2 монотонно убывает по параметру $s \in (0, s_0(k))$, принимая значения в интервале (H_{01}, H_{02}) . Концы этого интервала представляют собой значения величины H_0 в двух простых критических режимах дренирования при данном значении ϵ , тогда как ее фиксированное значение в правой части второго уравнения в (34) соответствует критическому режиму при $\epsilon_* > \epsilon$. Отсюда и с учетом отмеченной выше зависимости между величинами H_0 и ϵ в критических режимах получим неравенства $H_{01} < H_0 < H_{02}$, обеспечивающие однозначную разрешимость второго уравнения системы (34).

Левая часть $G_1(k)$ первого уравнения рассматриваемой системы возрастает от M_{00} при $k = k_0$ до ∞ при $k = 1$. Величины M_{00}, M_0 — значения толщины слоя пресных вод в двойном критическом режиме соответственно при данном значении параметра ϵ и при его максимально возможном значении ϵ_{**} , достигаемом в указанном предельном случае. С учетом этого и в силу установленного при рассмотрении уравнения (32) характера зависимости $f[\epsilon, k_0(\epsilon)]$ заключаем, что заданное значение M_0 удовлетворяет неравенству $M_{00} < M_0$, и, следовательно, параметр k однозначно определяется из первого уравнения системы (34).

Наиболее трудоемким этапом описанной вычислительной процедуры при решении задачи в прямой постановке является нахождение неизвестных параметров отображения. Связанное с этим многократное численное решение сложных трансцендентных уравнений осуществляется по стандартной итерационной процедуре, предусматривающей выделение сокращенного интервала, содержащего искомый параметр, с последующими интерполяциями.

При вычислении эллиптических интегралов и функций используются экономичные алгоритмы, изложенные в [9]. Специального подхода требуют содержащиеся в расчетных формулах несобственные интегралы, каждый из которых необходимо привести к расчетному виду. Среди них преобладают интегралы вида $\int_a^b f(u) du / \sqrt{(u-a)(b-u)}$, в которых функция $f(u)$ непрерывна. Особенности подынтегральной функции на обоих концах промежутка интегрирования устраняются посредством замены переменной $u = a + (b-a)v^2(2-v^2)$, при которой имеем

$$u - a = (b - a)v^2(2 - v^2), \quad b - u = (b - a)(1 - v^2)^2, \quad du = 4(b - a)v(1 - v^2) dv.$$

В каждом интеграле по бесконечному промежутку $[a, \infty)$ осуществляется замена $u = a/(v^2(2-v^2))$.

Преобразованные интегралы вычисляются по формуле Симпсона в едином для всех интегралов промежутке $[0, 1]$. Для ускорения процедуры в нем выделяются участки относительно быстрого изменения подынтегральной функции, примыкающие, как правило, к концам основного промежутка интегрирования.

Для иллюстрации описанной вычислительной схемы приведем результаты расчетов при $M_0 = 2$; $H_0 = 0,3$; $\rho = 0,02$. В прямой постановке подлежит заданию также интенсивность инфильтрации ϵ , но согласно проведенному ранее анализу предварительно необходимо установить диапазон допустимых значений этой величины.

При указанных входных параметрах на первом этапе расчетов, выполненных для двойного критического режима, найдены значения максимально возможной интенсификации дренажа $\epsilon_{**} = 0,5509$ и глубины дрен $H_* = 0,5468$, при которой достигается этот максимум. При всех других значениях $\epsilon \in (0, \epsilon_{**})$ дренажи функционируют на глубине H_* в нормальном режиме дренирования.

При выбранном значении $H_0 = 0,3$ максимально допустимое значение $\epsilon_* = 0,2596$ параметра ϵ достигается в критическом режиме, связанном с кривой депрессии. Амплитуда ΔH изменения ординаты точек кривой депрессии (см. рис. 1) уменьшается от 0,4656 в двойном критическом режиме до 0,3010 в рассматриваемом режиме, оставаясь при этом значительной, тогда как величина ΔT убывает от 0,6260 до 0,0945, т. е. при более высоком положении дрен их воздействие на соленые воды ослабевает. В наибольшей степени интенсивность дренирования отражается на минимальной толщине M слоя пресных вод: для обсуждаемого варианта $M = 1,1796$ в наиболее напряженном двойном критическом режиме, а при $H_0 = 0,3$ вычислено $M = 1,7151$ в простом критическом режиме (при $\epsilon = \epsilon_* = 0,2596$) и $M = 1,9434$ в нормальном режиме дренирования (при $\epsilon = 0,1$).

При всей значимости параметра ϵ как одного из регулируемых физических факторов, формирующих течение в кайме, большую роль играет также плотность соленых вод ρ_2 , входящая в параметр ρ . Заметим, что при реальной минерализации грунтовых вод основной интерес для гидромелиоративной практики представляют малые, исчисляемые сотыми долями, значения этого параметра.

Из первого условия в (1) на линии раздела EG получаем равенство

$$\Delta T = y_E - y_G = (\varphi_E - \varphi_G)/\rho, \quad (35)$$

отражающее повышение чувствительности соленых вод к дренажу с уменьшением их плотности. Согласно (4) при $\rho \rightarrow 0$ имеем

$$\sigma = \frac{[\sqrt{\rho + \epsilon} + \sqrt{\epsilon(1 + \rho)}]^2}{\rho(1 - \epsilon)} \approx \frac{4\epsilon^2}{\rho(1 - \epsilon)}. \quad (36)$$

Из (36) и (14) следует, что при $\rho \rightarrow 0$ неограниченно возрастает параметр σ , а вместе с ним и нижняя граница k_0 допустимых значений параметра k , что должно сопутствовать углублению линии раздела. Эту закономерность, подтверждаемую расчетами, можно обосновать теоретически: установлено, что $\lim_{\rho \rightarrow 0} T = \infty$. В пределе (при $\rho = 0$) получаем рассмотренную в [6] схему дренажа пресных инфильтрационных вод в пласте неограниченной мощности.

Как следует из асимптотического представления (36), уменьшение ρ компенсируется уменьшением параметра ϵ . Это означает, что ослабление интенсивности дренирования пресных вод каймы позволяет сохранить неподвижными слабоминерализованные грунтовые воды при фиксированной толщине слоя пресных вод, но в этом случае согласно расчетам дрены отдаляются от границы раздела. Так, при $M_0 = 2$, $\rho = 10^{-4}$ в двойном критическом режиме вычислено $\epsilon = 0,0080$, $H_0 = 0,0230$.

Рассмотрим второй предельный случай: $\rho \rightarrow \infty$. При этом соленые грунтовые воды “затвердевают” и возникает схема дренажа инфильтрационных вод в почвенном слое с горизонтальным водоупором, в который превращается граница раздела (в соответствии с равенством (35)). В работе [10] предложено приближенное решение этой важной для гидромелиорации задачи, основанное на замене свободной поверхности потока фиксированной горизонтальной границей. В прямой постановке степень сложности краевой задачи для схемы с водоупором такая же, что и для течения в кайме. При этом, однако, сокращаются вычисления и упрощается анализ течения, поскольку в схеме с водоупором интенсивность дренажа регламентируется только критическим режимом, связанным со свободной поверхностью.

В рассматриваемой задаче удастся приблизиться к схеме с водоупором за счет увеличения параметра ρ . Так, при $M_0 = 2$, $\rho = 10^6$ даже в двойном критическом режиме, когда ординаты свободных границ изменяются в наибольших диапазонах, имеем $\Delta T = 8,7 \cdot 10^{-6}$ (линия раздела фактически превращается в горизонтальный водоупор; при этом $\epsilon_* = 0,9878$, $T = 3,3 \cdot 10^{-7}$). Такое сближение стока с линией раздела объясняется тем, что интенсивность дренажа в двойном критическом режиме максимальна, а в предельном случае $\rho \rightarrow \infty$ этот максимум должен достигаться при заложении дрены на водоупоре, когда она наиболее удалена от кривой депрессии. Для вышеуказанного значения параметра ρ практически при любой глубине заложения дрен в слое пресных вод дестабилизации подвержена только эта подвижная граница.

Согласно расчетам изменение параметра ρ при фиксированных величинах ϵ , M_0 , H_0 приводит к деформации линии раздела и вместе с тем практически не отражается на положении кривой депрессии.

5. О некоторых модификациях постановки задачи. Исследованная схема течения в кайме пресных вод основана на предположении о сохранении динамического равновесия потока с воздухом и с солеными грунтовыми водами, которые должны оставаться неподвижными. Первое из указанных условий является непреложным, поскольку с прорывом воздуха в дрену прекращает действовать рассматриваемая гидродинамическая модель. Если же при интенсификации дренажа в поток вовлекутся соленые воды, то произойдет их частичное замещение пресными и в пределе сформируется стационарное течение пресных вод над оставшимися невытесненными солеными водами. Такое течение будет по-прежнему описываться рассматриваемой краевой задачей и происходить в критическом режиме на границе раздела. При изоляции соленых вод от внешних факторов питания и разгрузки средняя глубина этой границы окажется ниже первоначальной на величину, определяемую объемом дренированных соленых вод.

На такой физической основе, следуя [11], можно поставить задачу расчета толщины H_0 слоя пресных вод в почве, которая вначале содержала только соленые грунтовые во-

ды. Одним из критериев формирования оптимального гидромелиоративного режима почв является обеспечение глубины залегания грунтовых вод, исключаяющей их интенсивное испарение. С учетом этого при расчетах будем задавать среднюю высоту H_0 свободной поверхности над линией дренажных стоков и относить к этой величине все геометрические параметры каймы, а все расчеты производить в двойном критическом режиме, при котором достигаются экстремальные значения характеристик течения в кайме. Для этого режима в описанный выше (см. п. 4) вычислительный алгоритм достаточно внести единственную корректировку, используя теперь для нахождения параметра $\epsilon = \epsilon_{**}$ величину H_0 . В расчетах по-прежнему будем принимать $L = 1$, а по завершении вычислений все найденные линейные величины следует отнести к H_0 .

При $\rho = 0,02$, $L/H_0 = 0,5; 2; 10; 100$ по описанной схеме вычислено $M_0 = 1,8131; 3,8538; 9,8108; 27,0804$ и $\epsilon_{**} = 0,9939; 0,5003; 0,0559; 0,0024$ соответственно. Отсюда заключаем, что более глубокого замещения соленых вод пресными можно достичь за счет разрежения дрен, но при этом существенно сокращаются возможности дренажа, которые лимитирует свободная поверхность каймы. Значительное влияние на максимально достижимую глубину зоны опреснения оказывает плотность соленых вод. Так, при $\rho = 0,1$, $L/H_0 = 10$ вычислено $M_0 = 5,5899$, хотя значение $\epsilon_{**} = 0,0533$ близко к полученному для $\rho = 0,02$, $L/H_0 = 10$. Наконец, увеличению глубины опреснения грунтовых вод способствует заглубление дрен. Следует иметь в виду, что при подобных оценках конечных результатов вытеснения соленых вод пресными остается открытым вопрос о динамике этого процесса, исследовать которую можно только на базе соответствующей нестационарной краевой задачи.

Для приложений математических моделей дренажа принципиален вопрос о его схематизации. Принятая выше постановка задачи основана на задании фильтрационного расхода дрен, обеспечение которого на определенном уровне требует соответствующего понижения давления в дренажных трубах. В таком режиме действуют водозаборы пресных грунтовых вод и так называемые вакуумные дренажные системы мелиоративного назначения [12]. Однако в большинстве случаев интенсивность дренажа грунтовых вод на орошаемых массивах определяется напором на границе дрены с почвой, а сам этот фактор — давлением в полости дрены и гидравлическим сопротивлением дренажных фильтров. В такой ситуации естественно задавать давление на внешнем контуре дрены. При этом достижению фильтрационным расходом дрен значения, компенсирующего инфильтрацию определенной интенсивности ϵ , может предшествовать некоторый (теоретически бесконечный) период подъема грунтовых вод до уровня, при котором возросший действующий напор преодолеет сопротивление потоку на входе в дрены. Однако, как отмечено выше, такой подъем не должен превышать допустимый в соответствии с гидромелиоративными критериями, удовлетворить которым в данном случае можно за счет глубины и частоты заложения дренажа. С учетом этого в число задаваемых величин включим максимальную высоту H_1 свободной поверхности грунтовых вод над линией дрен (см. рис. 1).

Рассматриваемая постановка задачи исключает возникновение критического режима на кривой депрессии, поскольку его предпосылкой является вакуумирование потока дренами. Что касается второго предельного режима дренирования ($s = 0$), то именно на его основе осуществляются в данном случае численные расчеты. Главным этапом вычислений является нахождение модуля k эллиптических интегралов из уравнения, получаемого в результате задания давления p_1 в некоторой точке D_1 , принадлежащей участку AD и расположенной на контуре дрены. Выражение для p_1 получим с использованием соотношения (28) и зависимости $\varphi(d_1)$, основанной на представлении (5) для функции $\omega(\zeta)$. Аффикс d_1 точки D_1 предварительно определяется из уравнения $z(d_1) = iy_{D_1}$. Все вычисляемые линейные характеристики течения отнесены к величине H_1 .

При $\rho = 0,02$, $y_{D_1} = 0,01$, $p_1 = 0,5$ для $\epsilon = 0,1; 0,01; 0,001$ вычислено $L = 2,4662; 16,3451; 85,4195$, $T_0 = 2,3305; 7,5835; 14,1370$. Отсюда следует, что с ослаблением инфильтрации требуемый гидромелиоративный режим обеспечивается при более редком дренаже с одновременным увеличением глубины зоны опреснения почвогрунтов. Дренажированию почв способствуют также заглубление и укрупнение дрен, понижение давления на их контуре. Так, при $p_1 = 0,2$ и вышеуказанных значениях входных параметров ρ , y_{D_1} для $\epsilon = 0,01$ получено $L = 23,9323$, $T_0 = 11,4781$. Как отмечалось в начале п. 5, в обеих рассмотренных модификациях исходной постановки краевой задачи уровень соленых грунтовых вод до включения дрен не играет существенной роли.

Заключение. Разработана и исследована математическая модель горизонтального трубчатого дренажа в кайме пресных инфильтрационных вод над солеными грунтовыми водами. Основу модели составляет многопараметрическая краевая задача, решенная в прямой постановке с применением методов аналитической теории линейных дифференциальных уравнений; особое внимание уделено нахождению неизвестных параметров отображения. Для анализа течения использован апробированный ранее [8] на задаче подобного типа подход с выявлением предельных режимов дренажирования, определяющих границы реализации изучаемого фильтрационного процесса в рамках краевой задачи. Сама же задача при ее основной ориентации на расчет водозаборов пресных вод может также найти применение в решении некоторых проблем гидромелиорации орошаемых земель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов Ю. И. О кайме пресных вод в случае периодической системы горизонтальных трубчатых дрен // Краевые задачи подземной гидродинамики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. С. 67–84.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
4. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
5. Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
6. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939.
7. Капранов Ю. И. Линза пресной воды, образованная равномерной инфильтрацией // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 1048–1055.
8. Эмих В. Н. Краевая задача о дренажируемой кайме пресных вод и ее приложения // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 494–503.
9. Bulirsch R. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions // Num. Math. 1965. Bd 7, H. 1. S. 78–90; 1965. Bd 7, H. 4. S. 353–354; 1969. Bd 13, H. 4. S. 305–315.
10. Аверьянов С. Ф. Горизонтальный дренаж при борьбе с засолением орошаемых земель. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
11. Аверьянов С. Ф. Рассоляющее действие фильтрации из каналов // Влияние орошения на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 44–130.
12. Дегтярев Б. М., Калантаев В. А. Вакуумный дренаж на орошаемых землях. М.: Колос, 1978.