УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mail: algazinsd@mail.ru

Рассматривается задача об обтекании тела вращения под углом атаки потоком вязкой несжимаемой жидкости, которая описывается уравнениями Навье — Стокса. Для малых чисел Рейнольдса решениями этих уравнений являются гладкие функции. Построен численный алгоритм без насыщения, который реагирует на гладкость решения. Расчеты проводились для сетки, состоящей из $900 = 10 \times 10 \times 9$ и $700 = 10 \times 10 \times 7$ узлов. Для сетки, состоящей из 900 узлов, с использованием стандартной программы решалась система 3600 нелинейных уравнений. Сравнивались значения давления на теневой стороне тела вращения. Установлено, что для численного исследования (на этой сетке) доступны задачи с $\mathrm{Re} \approx 1$. Для больших чисел Рейнольдса количество узлов сетки необходимо увеличить.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, течение вязкой жидкости, численный алгоритм без насыщения.

Введение. В [1] рассмотрены уравнения Стокса. В данной работе эти результаты обобщаются на уравнения Навье — Стокса. Рассматриваются полные нелинейные уравнения Навье — Стокса (для несжимаемой вязкой жидкости) во внешности тела вращения, когда вектор скорости потока направлен произвольно относительно оси вращения:

$$\begin{gathered} \mu\Delta u - \rho u \cdot \nabla u - \nabla p = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $u(x)$ — скорость движения несжимаемой жидкости; $p(x)$ — давление; μ, ρ — вязкость и плотность жидкости; Ω — рассматриваемая область. Уравнения (1) определены во внешности области Ω.

К системе дифференциальных уравнений (1) добавляются граничные условия

$$\begin{gathered} |x| \to \infty: \qquad u \to u_\infty, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0; \end{gathered} \tag{2}$$

$$|x| \to \infty: \qquad p \to p_\infty \tag{3}$$

($\partial\Omega$ — граница области Ω).

В литературе обычно рассматривается задача (1), (2). В этом случае решение не единственно (значение p определяется с точностью до константы). Поэтому ниже рассматривается задача (1)–(3), т. е. принимается, что на бесконечности давление постоянно независимо от x.

С использованием некоторых физически приемлемых предположений Дж. Лере установил существование строгих решений внутренней задачи и внешней задачи с $u_\infty = 0$ [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00250).

В случае внешней задачи с $u_\infty \neq 0$ решение удовлетворяет (1), (2), но вместо первого соотношения в (2) выполняются более слабые условия

$$\int_R |\nabla u|^2\,dx < \infty, \qquad \int_R \frac{|u(y) - u_\infty|^2}{|x-y|^2}\,dy \leqslant K < \infty$$

с постоянной K, не зависящей от x. В [3] доказано, что решение Лере удовлетворяет условию на бесконечности и в случае $u_\infty \neq 0$.

Другие варианты доказательства предложены в [4, 5]. Отметим, что система уравнений Навье — Стокса является эллиптической согласно определению Дуглиса — Ниренберга [6], и, следовательно, u и p, как известно, являются гладкими до некоторой степени.

Существует большое количество работ, посвященных численным решениям уравнений Навье — Стокса. К данной работе наиболее близка работа [7], в которой рассматривается двумерная задача об обтекании цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости. Граничные условия на бесконечности сносятся на окружность большого диаметра, и для решения полученных в результате дискретизации нелинейных уравнений применяется метод установления по времени. Отметим, что при увеличении радиуса внешней окружности R таким способом нельзя добиться сходимости к решению внешней задачи. Во внешности круга оператор Лапласа, входящий в уравнения Навье — Стокса, имеет непрерывный спектр, заполняющий интервал $(-\infty, 0)$. В расчетах получается дискретный спектр, но собственные значения соответствующей матрицы (матрицы дискретного оператора Лапласа) имеют две точки сгущения: 0 и $-\infty$. Таким образом, норма матрицы дискретного оператора Лапласа имеет большую величину (так же, как и норма обратной матрицы). В результате в пределе при $R \to \infty$ метод установления по времени неустойчив.

Наиболее распространенным методом решения уравнений Навье — Стокса является метод конечных элементов (см., например, работу [8] и библиографию к ней). Основной трудностью, возникающей при использовании метода конечных элементов, является решение большого количества нелинейных уравнений. В настоящей работе применяется альтернативная методу конечных элементов дискретизация без насыщения [9]. Дело в том, что при малых числах Рейнольдса решения уравнений Навье — Стокса являются гладкими функциями и нужно использовать это обстоятельство, т. е. построить алгоритм, реагирующий на гладкость решения [9]. В результате трехмерная задача об обтекании тела вращения под углом атаки доступна для численного исследования на сетке, состоящей из $900 = 10 \times 10 \times 9$ узлов. Полученная система 3600 нелинейных уравнений решается с использованием стандартной программы [10].

1. Постановка задачи. Во внешности тела вращения Ω рассмотрим полные стационарные уравнения Навье — Стокса, которые имеют вид [11]

$$\begin{gathered}
u^1\,\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + u^2\,\frac{\partial u^1}{\partial x_2} + u^3\,\frac{\partial u^1}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2 u^1,\\
u^1\,\frac{\partial u^2}{\partial x_1} + u^2\,\frac{\partial u^2}{\partial x_2} + u^3\,\frac{\partial u^2}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2 u^2,\\
u^1\,\frac{\partial u^3}{\partial x_1} + u^2\,\frac{\partial u^3}{\partial x_2} + u^3\,\frac{\partial u^3}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2 u^3,\\
\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + \frac{\partial u^3}{\partial x_3} = 0.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь (u^1, u^2, u^3) — вектор скорости; u^i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3); ∇^2 — оператор Лапласа.

К системе уравнений (1.1) нужно добавить граничные условия для u^i $(i = 1, 2, 3)$ и давления p.

В (1.1) используются безразмерные величины (без черты сверху): $x_i = \bar{x}_i / L_a$, $u^i = \bar{u}^i / u_\infty$, $p = (\bar{p} - p_\infty)/(\rho v_\infty^2)$, $1/\operatorname{Re} = \nu/(L_a u_\infty)$ (L_a — характерный линейный размер; u_∞ — модуль скорости потока на бесконечности; p_∞ — давление на бесконечности; ν — вязкость; Re — число Рейнольдса).

Таким образом, для определения параметров потока, вектора скорости (u^1, u^2, u^3) и давления p требуется найти решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u^i\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^i\big|_\infty = u^i_\infty, \quad i = 1, 2, 3, \qquad p\big|_\infty = 0.$$

Здесь Ω — область, занятая рассматриваемым телом вращения вокруг оси x_3; $\partial\Omega$ — граница области Ω; u^i_∞ $(i = 1, 2, 3)$ — скорость жидкости в невозмущенном потоке (на бесконечности).

Введем систему криволинейных координат (r, θ, φ), связанную с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) соотношениями

$$x_1 = V(r, \theta) \cos\varphi, \qquad x_2 = V(r, \theta) \sin\varphi, \qquad x_3 = U(r, \theta). \tag{1.2}$$

Обозначим через G область, получаемую в меридиональном сечении тела Ω. Функции U и V выберем следующим образом. Пусть $\psi = \psi(z)$, $\psi = U + iV$, $z = r \exp(i\theta)$ — конформное отображение круга $|z| \leqslant 1$ на внешность области G, причем центр круга переходит в бесконечно удаленную точку (для единственности конформного отображения потребуем, чтобы в нуле направление вдоль действительной оси переходило в такое же направление). Соотношения (1.2) задают отображение шара единичного радиуса на внешность тела Ω.

Для эллипсоида вращения вокруг оси x_3 $(x_1^2/b^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/a^2 - 1 = 0)$ функции U и V известны в аналитическом виде (см. [12]). При отображении (1.2) поверхность шара единичного радиуса переходит в поверхность тела Ω. При этом краевые условия, заданные на $\partial\Omega$, переносятся на поверхность шара, а краевые условия, заданные на бесконечности, — в центр шара. Отметим, что при таком отображении внешняя нормаль к телу переходит во внутреннюю. Этот факт важен при вычислении силы сопротивления (см. ниже).

Обычно при использовании криволинейных координат уравнения для векторных величин записываются в проекциях на оси собственного базиса, координатные векторы которого направлены по касательным к координатным линиям. Этот базис зависит от координат точки пространства. В данном случае такой подход нецелесообразен, так как на оси x_3 отображение (1.2) неоднозначно (если $V = 0$, то значение φ может быть любым), что приводит к появлению особенностей в решении, обусловленных использованием "плохой" системы координат. Отметим, что сферическая система координат обладает аналогичным недостатком.

Выйти из данного положения можно следующим образом. Оставим в качестве искомых функций проекции вектора скорости u^i $(i = 1, 2, 3)$ на оси декартовой системы координат, а независимые переменные x_1, x_2, x_3 заменим на r, θ, φ с помощью подстановки (1.2). Тогда частные производные по декартовым координатам x_i $(i = 1, 2, 3)$ выразятся через производные по r, θ и φ $(\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(V\cos\varphi, V\sin\varphi, U))$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \alpha\cos\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \beta\cos\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{1}{V}\,\sin\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = \alpha\sin\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \beta\sin\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{V}\,\cos\varphi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{rV'_\theta}{w^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{rV'_r}{w^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Здесь $\alpha(r,\theta) = -rU'_\theta/w^2$; $\beta(r,\theta) = (1 + rU'_\theta V'_r/w^2)/V'_\theta$; $w^2 = U'^2_\theta + V'^2_\theta$.

В результате получаем

$$\Big(u^1\alpha\cos\varphi + u^2\alpha\sin\varphi + u^3\,\frac{rV'_\theta}{w^2}\Big)\frac{\partial u^1}{\partial r} + \Big(u^1\beta\cos\varphi + u^2\beta\sin\varphi - u^3\,\frac{rV'_r}{w^2}\Big)\frac{\partial u^1}{\partial \theta} +$$
$$+ \Big(-\frac{1}{V}\,\sin\varphi\, u^1 + \frac{1}{V}\,\cos\varphi\, u^2\Big)\frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + \Big(\alpha\cos\varphi\,\frac{\partial p}{\partial r} + \beta\cos\varphi\,\frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{V}\,\sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial \varphi}\Big) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2 u^1,$$
$$\Big(u^1\alpha\cos\varphi + u^2\alpha\sin\varphi + u^3\,\frac{rV'_\theta}{w^2}\Big)\frac{\partial u^2}{\partial r} + \Big(u^1\beta\cos\varphi + u^2\beta\sin\varphi - u^3\,\frac{rV'_r}{w^2}\Big)\frac{\partial u^2}{\partial \theta} +$$
$$+ \Big(-\frac{1}{V}\,\sin\varphi u^1 + \frac{1}{V}\,\cos\varphi u^2\Big)\frac{\partial u^3}{\partial \varphi} + \Big(\alpha\sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial r} + \beta\sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{V}\,\cos\varphi\,\frac{\partial p}{\partial \varphi}\Big) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2 u^2,$$
$$\Big(u^1\alpha\cos\varphi + u^2\alpha\sin\varphi + u^3\,\frac{rV'_\theta}{w^2}\Big)\frac{\partial u^3}{\partial r} + \Big(u^1\beta\cos\varphi + u^2\beta\sin\varphi - u^3\,\frac{rV'_r}{w^2}\Big)\frac{\partial u^3}{\partial \theta} + \qquad (1.4)$$
$$+ \Big(-\frac{1}{V}\,\sin\varphi u^1 + \frac{1}{V}\,\cos\varphi u^2\Big)\frac{\partial u^3}{\partial \varphi} + \Big(\frac{rV'_\theta}{w^2}\,\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{rV'_r}{w^2}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}\Big) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2 u^3,$$
$$\alpha\cos\varphi\,\frac{\partial u^1}{\partial r} + \beta\cos\varphi\,\frac{\partial u^1}{\partial \theta} - \frac{1}{V}\,\sin\varphi\,\frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + \alpha\sin\varphi\,\frac{\partial u^2}{\partial r} + \beta\sin\varphi\,\frac{\partial u^2}{\partial \theta} +$$
$$+ \frac{1}{V}\,\cos\varphi\,\frac{\partial u^2}{\partial \varphi} + \frac{rV'_\theta}{w^2}\,\frac{\partial u^3}{\partial r} - \frac{rV'_r}{w^2}\,\frac{\partial u^3}{\partial \theta} = 0.$$

Соотношения (1.4) приведем к однородным уравнениям относительно скорости с помощью замены

$$u^i = (1-r)u^i_\infty + \hat u^i, \qquad \hat u^i\big|_{r=0} = \hat u^i\big|_{r=1} = 0,$$
$$\frac{\partial u^i}{\partial r} = -u^i_\infty + \frac{\partial \hat u^i}{\partial r}, \qquad \Delta u^i = \Delta \hat u^i - \frac{r}{w^2}\Big(1 + r\,\frac{V'_r}{V}\Big)u^i_\infty, \qquad i = 1,2,3. \qquad (1.5)$$

Замена искомых функций u^i на $\hat u^i$ ($i = 1,2,3$) по формуле (1.5) произведена для того, чтобы сделать краевые условия для скорости однородными:

$$\hat u^i\big|_{r=0} = \hat u^i\big|_{r=1} = 0, \qquad i = 1,2,3. \qquad (1.6)$$

Это необходимо для более удобной дискретизации лапласиана. Для давления имеем краевое условие

$$p\big|_{r=0} = 0. \qquad (1.7)$$

Лапласиан от функций u^i ($i = 1,2,3$) в переменных r, θ, φ принимает вид

$$\Delta u^i = \frac{r}{Vw^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rV\,\frac{\partial u^i}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{V}{r}\,\frac{\partial u^i}{\partial \theta}\Big)\Big] + \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 u^i}{\partial \varphi^2}. \qquad (1.8)$$

Таким образом, требуется решить уравнения (1.4), (1.5) в шаре единичного радиуса с краевыми условиями (1.6), (1.7).

2. Дискретный лапласиан. Для дискретизации лапласиана (1.8) с однородными краевыми условиями (1.6) используем методику, описанную в [1]. Суть этой методики состоит в следующем. В лапласиане (1.8) методом разделения переменных вычисление собственных значений трехмерного дифференциального оператора можно свести к вычислению собственных значений двумерных дифференциальных операторов. Дискретная задача наследует эти свойства, и дискретизация трехмерного дифференциального оператора сводится к дискретизации ряда двумерных операторов.

Таким образом, получаем дискретный лапласиан в виде h-матрицы:

$$H = \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda_k \otimes h_k, \qquad L = 2l+1.$$

Здесь штрих означает, что слагаемое при $k = 0$ берется с коэффициентом, равным $1/2$; знак “$\otimes$” — кронекерово произведение матриц; h — матрица размера $L \times L$ с элементами

$$h_{kij} = \cos k\, \frac{2\pi(i-j)}{L} \qquad (i,j = 1,2,\dots,L),$$

Λ_k — матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору

$$\frac{r}{Vw^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rV\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{V}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\Big)\Big] - \frac{k^2}{V^2}\,\Phi, \qquad k = 0,1,\dots,l \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\Phi\big|_{r=0} = \Phi\big|_{r=1} = 0. \tag{2.2}$$

Для дискретизации дифференциального оператора (2.1), (2.2) выберем по θ сетку, состоящую из n узлов:

$$\theta_s = \frac{\pi}{2}\,(y_s+1), \qquad y_s = \cos\varepsilon_s, \qquad \varepsilon_s = \frac{(2s-1)\pi}{2n}, \qquad s = 1,2,\dots,n,$$

а также используем интерполяционную формулу

$$\begin{gathered} g(\theta) = \sum_{s=1}^{n} \frac{T_n(y)g_s}{n(-1)^{s-1}(y-y_s)/\sin\varepsilon_s}, \qquad y = \frac{1}{\pi}\,(2\theta-\pi), \\ g_s = g(\theta_s), \quad s = 1,2,\dots,n, \qquad T_n(y) = \cos(n\arccos y). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Первую и вторую производные по θ, входящие в соотношения (2.1), получим дифференцированием интерполяционной формулы (2.3).

По r выберем сетку, состоящую из m узлов:

$$r_s = \frac{1}{2}\,(z_s+1), \qquad z_s = \cos\chi_s, \qquad \chi_s = \frac{(2s-1)\pi}{2m}, \qquad s = 1,2,\dots,m,$$

а также используем интерполяционную формулу

$$q(r) = \sum_{s=1}^{m} \frac{T_m(r)(r-1)rq_s}{m(-1)^{s-1}(r_s-1)r_s(z-z_s)/\sin\chi_s}, \qquad q_s = q(r_s), \qquad z = 2r-1. \tag{2.4}$$

Первую и вторую производные по r, входящие в выражение (2.1), найдем дифференцированием интерполяционной формулы (2.4). Дифференцированием интерполяционных формул (2.3), (2.4) получим значения производных по θ и r, входящих в левую часть уравнения неразрывности (1.8).

Для дискретизации производных от давления по r используем интерполяционную формулу

$$q(r) = \sum_{s=1}^{m} \frac{T_m(r)rq_s}{m(-1)^{s-1}r_s(z-z_s)/\sin\chi_s}, \qquad z = 2r-1. \tag{2.5}$$

Величины, входящие в формулу (2.5), определены выше. Значения первой производной от давления по r, входящие в левую часть соотношений (1.5)–(1.7), получим дифференцированием интерполяционной формулы (2.5).

Для построения формулы численного дифференцирования по φ рассмотрим интерполяционную формулу

$$
\begin{gathered}
S(\varphi)=\frac{2}{L}\sum_{k=0}^{2l}D_l(\varphi-\varphi_k)S_k, \qquad L=2l+1, \qquad S_k=S(\varphi_k),\\
\varphi_k=\frac{2\pi k}{L} \quad (k=0,1,\ldots,2l), \qquad D_l(\varphi-\varphi_k)=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{l}\cos j(\varphi-\varphi_k).
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Значения производных по φ определим дифференцированием формулы (2.6).

Для получения дискретных уравнений Навье — Стокса в уравнениях (1.4) нужно заменить производные дискретными производными, найденными дифференцированием соответствующих интерполяционных формул (2.3)–(2.6); лапласиан заменяется на матрицу H. Вместо функций u^1, u^2, u^3 и p в дискретные уравнения Стокса войдут значения этих функций в узлах сетки $(\theta_\nu, r_\mu, \varphi_k)$, $\nu=1,2,\ldots,n$; $\mu=1,2,\ldots,m$; $k=0,1,\ldots,2l$.

В результате имеем систему $4mnL$ нелинейных уравнений. В явном виде система дискретных уравнений записывается ниже. Например, при $m=n=10$, $L=9$ количество уравнений системы равно 3600.

Поясним суть используемой дискретизации лапласиана. Применяется интерполяция решения многочленами. Как известно, такая интерполяция, реагируя на гладкость решения, приближает интерполируемую функцию тем точнее, чем большему количеству условий гладкости она удовлетворяет [9]. При этом априори не нужно знать, какова гладкость решения. В этом состоит суть численных алгоритмов без насыщения [9]. Как отмечено выше, в исследуемой задаче решение состоит из гладких функций. Используя это обстоятельство, можно построить алгоритм, имеющий приемлемую точность на редкой сетке.

3. Дискретные уравнения Навье — Стокса. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
A^{(1)}=A^{(1)}(u^1,u^2,u^3)=u^1\alpha\cos\varphi+u^2\alpha\sin\varphi+u^3rV'_\theta/w^2,\\
A^{(2)}=A^{(2)}(u^1,u^2,u^3)=u^1\beta\cos\varphi+u^2\beta\sin\varphi-u^3rV'_r/w^2,\\
A^{(3)}=A^{(3)}(u^1,u^2,u^3)=-(1/V)\sin\varphi\, u^1+(1/V)\cos\varphi\, u^2.
\end{gathered}
$$

Функции α, w^2 определены в (1.3). Выполним замену (1.5) и введем новые обозначения:

$$
\begin{aligned}
\hat A^{(1)}=\hat A^{(1)}(u^1,u^2,u^3)&=(1-r)u^1_\infty\alpha\cos\varphi+(1-r)u^2_\infty\alpha\sin\varphi+(1-r)u^3_\infty rV'_\theta/w^2+{}\\
&\qquad+\hat u^1\alpha\cos\varphi+\hat u^2\alpha\sin\varphi+\hat u^3rV'_\theta/w^2,\\
\hat A^{(2)}=\hat A^{(2)}(u^1,u^2,u^3)&=(1-r)u^1_\infty\beta\cos\varphi+(1-r)u^2_\infty\beta\sin\varphi-(1-r)u^3_\infty rV'_r/w^2+{}\\
&\qquad+\hat u^1\beta\cos\varphi+\hat u^2\beta\sin\varphi-\hat u^3rV'_r/w^2,\\
\hat A^{(3)}=\hat A^{(3)}(u^1,u^2,u^3)&=-(1/V)\sin\varphi(1-r)u^1_\infty+(1/V)\cos\varphi(1-r)u^2_\infty-{}\\
&\qquad-(1/V)\sin\varphi\,\hat u^1+(1/V)\cos\varphi\,\hat u^2.
\end{aligned}
$$

Обозначим через θ_ν, r_μ, φ_k ($\nu=1,2,\ldots,n$; $\mu=1,2,\ldots,m$; $k=0,1,\ldots,2l$, $L=2l+1$) значения переменных θ, r, φ в узлах сетки. Тогда из (1.4) получаем дискретные уравнения Навье — Стокса

$$
\hat A^{(1)}_{\nu\mu k}\Big(-u^1_\infty+\sum_{\mu_1=1}^{m}D^{(r)}_{\mu\mu_1}\hat u^1_{\nu\mu_1k}\Big)+\hat A^{(2)}_{\nu\mu k}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n}D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}\hat u^1_{\nu_1\mu k}\Big)+\hat A^{(3)}_{\nu\mu k}\Big(\sum_{k_1=0}^{2l}D^{(\varphi)}_{kk_1}\hat u^1_{\nu\mu k_1}\Big)+
$$

$$+\alpha_{\mu\nu}\cos\varphi_k\Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(pr)}_{\mu\mu_1}p_{\nu\mu_1 k}\Big)+\beta_{\mu\nu}\cos\varphi_k\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}p_{\nu_1\mu k}\Big)-\frac{1}{V_{\mu\nu}}\,\sin\varphi_k\Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1}p_{\nu\mu k_1}\Big)-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n}\sum_{\mu_1=1}^{m}\sum_{k_1=0}^{2l} H_{\nu\mu k,\nu_1\mu_1 k_1}\hat u^1_{\nu_1\mu_1 k_1}-\frac{r}{w^2}\Big(1+r\,\frac{V_r'}{V}\Big)\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}} u^1_\infty\Big),$$

$$\hat A^{(1)}_{\nu\mu k}\Big(-u^2_\infty+\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(r)}_{\mu\mu_1}\hat u^2_{\nu\mu_1 k}\Big)+\hat A^{(2)}_{\nu\mu k}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}\hat u^2_{\nu_1\mu k}\Big)+\hat A^{(3)}_{\nu\mu k}\Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1}\hat u^2_{\nu\mu k_1}\Big)+$$

$$+\alpha_{\mu\nu}\sin\varphi_k\Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(pr)}_{\mu\mu_1}p_{\nu\mu_1 k}\Big)+\beta_{\mu\nu}\sin\varphi_k\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}p_{\nu_1\mu k}\Big)+\frac{1}{V_{\mu\nu}}\,\cos\varphi_k\Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1}p_{\nu\mu k_1}\Big)-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n}\sum_{\mu_1=1}^{m}\sum_{k_1=0}^{2l} H_{\nu\mu k,\nu_1\mu_1 k_1}\hat u^2_{\nu_1\mu_1 k_1}-\frac{r}{w^2}\Big(1+r\,\frac{V_r'}{V}\Big)\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}} u^2_\infty\Big), \qquad (3.1)$$

$$\alpha_{\mu\nu}\cos\varphi_k\Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(r)}_{\mu\mu_1}\hat u^1_{\nu\mu_1 k}\Big)+\beta_{\mu\nu}\cos\varphi_k\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}\hat u^1_{\nu_1\mu k}\Big)-\frac{1}{V_{\mu\nu}}\,\sin\varphi_k\Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1}\hat u^1_{\nu\mu k_1}\Big)+$$

$$+\alpha_{\mu\nu}\sin\varphi_k\Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(r)}_{\mu\mu_1}\hat u^2_{\nu\mu_1 k}\Big)+\beta_{\mu\nu}\sin\varphi_k\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}\hat u^2_{\nu_1\mu k}\Big)+\frac{1}{V_{\mu\nu}}\,\cos\varphi_k\Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1}\hat u^2_{\nu\mu k_1}\Big)+$$

$$+\frac{rV_\theta'}{w^2}\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}}\Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(pr)}_{\mu\mu_1}\hat u^3_{\nu\mu_1 k}\Big)-\frac{rV_r'}{w^2}\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1}\hat u^3_{\nu_1\mu k}\Big)-$$

$$-\Big(u^1_\infty\alpha_{\mu\nu}\cos\varphi_k+u^2_\infty\alpha_{\mu\nu}\sin\varphi_k+u^3_\infty\,\frac{rV_\theta'}{w^2}\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}}\Big)=0.$$

Из уравнений (3.1) требуется определить вектор $(\hat u^1,\hat u^2,\hat u^3,p)'$, где $\hat u^i$, p — векторы значений соответствующих функций в узлах сетки.

Замечание. $D^{(r)}$, $D^{(pr)}$, $D^{(\theta)}$, $D^{(\varphi)}$ — матрицы численного дифференцирования, которые получаются дифференцированием интерполяционных формул (2.4), (2.5), (2.3), (2.6) соответственно. Программы для их вычисления описаны в [13].

4. Результаты расчетов. Расчеты проводились для шара единичного радиуса и вектора скорости на бесконечности, равного $u=(1,0,0)$, а также для эллипсоида ($a=1$, $b=0{,}5$) при двух направлениях вектора скорости в бесконечности $u=(1,0,0)$ и $u=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,1/\sqrt3\,)$ на сетках, состоящих из $900=10\times10\times9$ и $700=10\times10\times7$ узлов. Результаты расчетов давления на теневой стороне шара (эллипсоида) на сетке, состоящей из 900 узлов, при различных значениях θ и $\varphi=0$ приведены в таблице (Δ — относительная ошибка по сравнению с расчетом на сетке, состоящей из 700 узлов). В задачах использовались следующие данные: $u=(1,0,0)$, $\mathrm{Re}=0{,}1$, $n=10$, $m=10$, $L=8$.

Расчеты проводились до значения $\mathrm{Re}=1$. С ростом числа Рейнольдса точность расчетов уменьшается и при $\mathrm{Re}>1$ становится неприемлемой. Увеличить количество узлов сетки невозможно из-за отказа работы стандартной программы решения нелинейных уравнений.

Давление на теневой стороне шара и эллипсоида

Номер узла	Шар		Эллипсоид	
	p	Δ, %	p	Δ, %
1	−0,4649	74,10	0,6820	90,31
2	2,0966	0,88	12,3750	0,04
3	6,8262	0,27	24,3430	0,006
4	12,6380	0,41	25,1352	1,10
5	16,9072	1,50	23,4242	2,30
6	16,9072	1,50	23,4242	2,30
7	12,6380	0,41	25,1352	1,10
8	6,8262	0,27	24,3430	0,006
9	2,0966	0,88	12,3750	0,04
10	−0,4649	74,10	0,6820	90,31

Из результатов, приведенных в таблице, следует, что наибольшую погрешность имеет решение в точках, близких к полюсам сферы. Далее точность увеличивается, но при приближении к оси x вновь уменьшается.

5. Вычисление сопротивления. Для шара единичного радиуса вычислялся коэффициент сопротивления c_x [11]. Проекция на ось x силы, действующей на шар, равна

$$F_x = \int\limits_{\Sigma} (p_{11}n_1 + p_{12}n_2 + p_{13}n_3)\, d\sigma.$$

Здесь p_{ij} — компоненты тензора напряжений:

$$p_{11} = -p + 2\mu\,\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \qquad p_{12} = \mu\Big(\frac{\partial u^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u^2}{\partial x_1}\Big), \qquad p_{13} = \mu\Big(\frac{\partial u^1}{\partial x_3} + \frac{\partial u^3}{\partial x_1}\Big),$$

в случае шара $n_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $n_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $n_3 = \cos\theta$.

Частные производные по x_i выражаются через производные по r, θ, φ с использованием формулы (1.3). Учитывая, что на поверхности сферы производные по θ, φ равны нулю, в силу граничных условий получаем

$$p_{1j}n_j = -p\sin\theta\cos\varphi + \mu\Big[(\sin^2\theta\cos^2\varphi - \cos 2\theta)\,\frac{\partial u^1}{\partial r} + \\ + \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial u^2}{\partial r} + \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial u^3}{\partial r}\Big],$$

$$d\sigma = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \qquad F_x = \int\limits_0^{\pi}\Big(\sin\theta\int\limits_0^{2\pi} p_{1j}n_j\, d\varphi\Big)\, d\theta = \frac{2\pi}{L}\sum_{s=1}^{n} c_s \sum_{k=0}^{2l} f_{sk},$$

где c_s — коэффициенты квадратурной формулы по θ на отрезке $[0,\pi]$:

$$c_s = \frac{\pi}{n}\Big(1 - 2\sum_{l=2(2)}^{n-1}\frac{\cos l\psi_s}{l^2-1}\Big), \qquad \psi_s = \frac{(2s-1)\pi}{2n}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f_{sk} = f(\theta_s, \varphi_k), \qquad \theta_s = \frac{(2s-1)\pi}{2m}, \quad s = 1, 2, \ldots, m, \qquad \varphi_k = \frac{2\pi k}{L}, \quad k = 0, \ldots, 2l,$$

$$f = -p\sin^2\theta\cos\varphi + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big[(\sin^3\theta\cos^2\varphi - \cos 2\theta\sin\theta)\Big(-1 + \frac{\partial\hat{u}^1}{\partial r}\Big) + \\ + \sin^3\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial\hat{u}^2}{\partial r} + \sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial\hat{u}^3}{\partial r}\Big]$$

($l = 2(2)$ обозначает суммирование от $l = 2$ с шагом, равным двум).

Замечание. При расчете по приведенной выше формуле коэффициент сопротивления получается отрицательным, поскольку при отображении (1.2) внешняя нормаль к шару переходит во внутреннюю. В программе это учтено (изменен знак f).

Осталось привести формулы для вычисления p и производных компонент скорости на поверхности шара:

$$p(1) = \frac{4}{m}\sum_{s=1}^{m}\frac{c_s p_s}{1 + x_s}, \qquad u'(1) = \frac{8}{m}\sum_{s=1}^{m}\frac{c_s u_s}{x_s^2 - 1},$$

$$c_s = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m-1}\cos l\theta_s, \qquad x_s = \cos\theta_s, \qquad \theta_s = \frac{(2s-1)\pi}{2m}, \qquad s = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь p_s, u_s — значения давления и скорости в узлах сетки по r.

Проведены расчеты величины

$$c_x = \frac{F_x}{\rho u_\infty^2 \pi R^2/2} = \frac{4}{L}\sum_{s=1}^{n} c_s \sum_{k=0}^{2l} f_{sk}$$

на сетке, состоящей из 900 узлов. Получены значения $c_x = 277{,}55$; $63{,}73$; $23{,}99$; $13{,}60$ при $\mathrm{Re} = 0{,}026\,55$; $0{,}121\,85$; $0{,}363\,85$; $0{,}746\,50$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Науч. мир, 2002.
2. **Leray J.** Etude de diverses equations, integrates non-lineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. Ser. 9. 1933. N 12. P. 1–82.
3. **Finn R.** On the steady state solutions of the Navier — Stokes partial differential equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1959. N 3. P. 381–396.
4. **Ладыженская О. А.** Исследование уравнения Навье — Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости // Успехи мат. наук. 1959. № 14. С. 75–97.
5. **Fujita H.** On the existence and regulaty of the steady-state solution of the Navier — Stokes equation // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1961. V. 9. P. 59–102.
6. **Douglis A., Nirenberg L.** Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1955. N 8. P. 503–538.
7. **Бабенко К. И., Введенская Н. Д., Орлова М. Г.** О стационарном обтекании кругового цилиндра вязкой жидкостью. М., 1969. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 41).
8. **Пальцев Б. В., Чечель И. И.** Конечно-элементная реализация итерационных методов с расщеплением граничных условий для систем Стокса и типа Стокса в шаровом слое, обеспечивающая 2-й порядок точности вплоть до оси симметрии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 5. С. 846–889.
9. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. Изд. 2-е, испр. и доп. / Под ред. А. Д. Брюно. М.; Ижевск: РХД, 2002.

10. **Бартеньев О. В.** Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. М.: Диалог Мифи, 2001. Ч. 2.
11. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
12. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1978.
13. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 5. Уравнения Стокса. М., 2002. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 700).
14. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 13. Уравнения Навье — Стокса. М., 2006. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 805).

Поступила в редакцию 13/VI 2006 г.,
в окончательном варианте — 31/VIII 2006 г.