

УДК 533.6.013.42

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНО ЗАЩЕМЛЕННОЙ КОСОУГОЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Т. Н. Исаулова, И. М. Лавит

Тульский государственный университет, 300600 Тула
E-mails: tat.isa@mail.ru, IgorLavit@yandex.ru

Рассматриваются колебания косоугольной неоднородной пластины, обтекаемой газовым потоком. Пластина закреплена на некотором участке одной из ее сторон. Взаимодействие потока с пластиной описывается с помощью поршневой теории. Решение задачи основано на использовании вариационного принципа Гамильтона и метода конечных элементов. Результаты расчетов сопоставляются с известными данными теоретических исследований и экспериментов. Для неоднородной пластины установлены параметры подобия задачи, которая в практически значимых случаях оказывается автомодельной по одному из параметров подобия. Это позволяет свести решение данной задачи к решению алгебраической задачи о собственных значениях.

Ключевые слова: аэроупругость, сверхзвуковой флаттер, стреловидное крыло, пластина, колебания.

Введение. Как правило, устойчивость колебаний крыльев летательных аппаратов в воздушном потоке изучалась при моделировании их стержнем, способным совершать изгибные и крутильные колебания [1–3]. Такая расчетная схема, безусловно, непригодна при изучении крыльев малого удлинения и стабилизаторов. Более адекватна схема пластины с переменными жесткостными и инерционными характеристиками. Однако большинство исследований аэроупругих колебаний пластин ориентировано на изучение панельного флаттера — потери устойчивости элементов обшивки летательных аппаратов при обтекании их воздушным потоком [1–4]. В этом случае пластина имеет прямоугольную форму, на ее контуре ставятся условия заземления или свободного опирания. Задачи для крыльев значительно сложнее: в общем случае пластина имеет непрямоугольную форму, решение должно удовлетворять граничным условиям свободного края [5]. Такие задачи невозможно решить аналитически, поэтому возникает вопрос о выборе численного метода решения. Для решения задач панельного флаттера обычно применяется метод Галеркина, при этом координатные функции должны удовлетворять всем граничным условиям задачи [6]. Априорно построить полную систему таких функций для задач о флаттере косоугольной консолюно заземленной пластины не удастся. Целесообразно применить метод Ритца, так как координатные функции, используемые в этом методе, должны удовлетворять только существенным (кинематическим) граничным условиям. Однако в данном случае оператор краевой задачи несимметричен и, следовательно, не положителен. Таким образом, метод Ритца как метод нахождения минимума квадратичного функционала в этом случае неприемлем [6].

Работа выполнена в рамках программы Министерства образования РФ “Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники” № 2010101032 и аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” № 2.1.1/941.

В работе [3] в качестве координатных функций предложено использовать формы свободных колебаний пластины. Эти функции удовлетворяют всем граничным условиям задачи и образуют полную систему функций, которые можно найти методом Ритца, так как оператор краевой задачи о свободных колебаниях симметричен. Далее методом Галеркина с использованием этих координатных функций ищется решение задачи о флаттере консольно заземленной пластины. Данный метод сложен, и примеры решения задач с его помощью в работе [3] не приведены. Он был независимо предложен в работе [7], там же приведены численные решения задачи.

Несмотря на формальную непригодность метода Ритца, он, как более простой и естественный, применялся для решения данной задачи. (Впервые этот метод был использован в работе [8].) Координатные функции выбирались в виде произведений степенных одночленов по декартовым координатам. В [8] сообщается об удовлетворительном соответствии полученных значений первых двух собственных частот колебаний экспериментальным данным. Примеры расчетов устойчивости (определения критической скорости обтекания) в работе [8] отсутствуют.

Аналогичный метод независимо предложен в работах [9, 10], результаты которых приведены в [11]. В работе [9] предпринята попытка обосновать данный метод, сопоставляя решения, полученные с его помощью, с решениями, найденными другими методами. В результате сделан вывод о том, что "... область применения метода Ритца намного шире, чем предполагалось. Применение метода Галеркина во многих случаях ограничено трудностью подбора координатных функций, в то время как свободный от этих ограничений метод Ритца может с успехом служить для расчетов объектов с переменной жесткостью и сложными граничными условиями" [9].

В работе [6] предложено и обосновано "видоизменение метода Галеркина для естественных (динамических) граничных условий". При этом координатные функции должны удовлетворять только существенным граничным условиям, а постановка задачи после интегрирования по частям совпадает с ее вариационной постановкой, которая возникает при использовании принципа Гамильтона или принципа возможных перемещений. Таким образом, видоизмененный метод Галеркина формально не отличается от метода Ритца, и поэтому методы исследования, использованные в работах [8–11], математически корректны.

Такой же подход к решению задачи используется в настоящей работе. В отличие от работ [8–11] в качестве координатных функций выбираются функции с ограниченным носителем, т. е. применяется метод конечных элементов [12]. Это позволяет решать задачи для пластин, заземленных не по всей стороне пластины.

Взаимодействие пластины с воздушным потоком описывается с помощью классической поршневой теории [1–3], которая была использована также в работах [8–11]. Следует отметить, что наряду с данной теорией разработаны и разрабатываются другие, более сложные математические модели данного взаимодействия, также основанные на некоторых допущениях (см., например, [2, 3, 13–16]). Применение этих моделей в рамках изложенного ниже подхода не представляет принципиальных затруднений.

В классе рассматриваемых задач большое значение имеют задачи для однородных пластин, т. е. пластин с постоянной толщиной, плотностью и модулями упругости. Их решение достаточно легко сводится к решению стандартной алгебраической задачи о собственных значениях. При этом оказывается, что условие устойчивости зависит только от отношения двух нетривиальных параметров подобия задачи. Кроме того, практически для всех реальных задач это отношение настолько мало, что процесс потери устойчивости пластины может считаться автомодельным по этому малому параметру [17]. В результате постановка задачи существенно упрощается, и к алгебраической задаче о собственных значениях сводятся задачи и для неоднородных пластин.

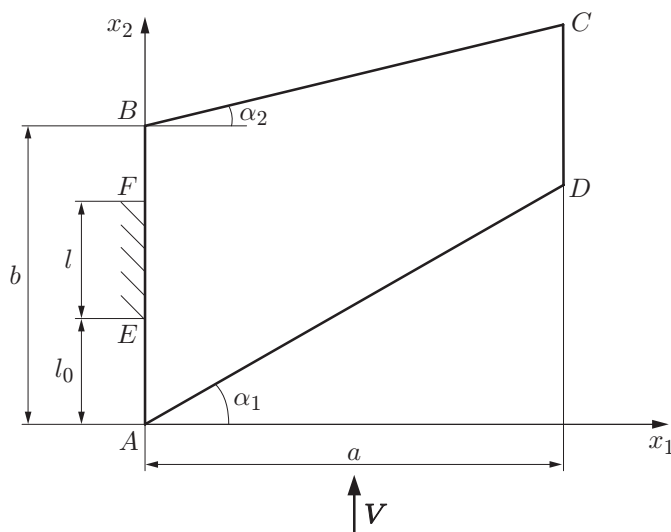


Рис. 1. Схема обтекания пластины воздушным потоком

1. Постановка задачи. На рис. 1 представлена расчетная схема задачи об обтекании пластины, деформирование которой происходит в соответствии с теорией тонких пластин [5] и описывается в декартовой системе координат x_k , $k = 1, 2, 3$. Оси абсцисс и ординат лежат в плоскости пластины (см. рис. 1). Геометрические характеристики пластины в плоскости $x_3 = 0$ определяются полуразмахом a , длиной корневой хорды b и углами стреловидности α_1 , α_2 .

Нагрузки в плоскости пластины равны нулю. На граничных участках контура пластины BC , CD , DA , а также на участках AE , FB отсутствуют внешние силы и моменты (свободный край [5]). Вдоль участка EF граничного контура AB пластина закреплена. Поперечные усилия, приводящие к изгибу и закручиванию пластины, представляют собой сумму инерционных нагрузок и нагрузок, обусловленных воздействием воздушного потока, обтекающего верхнюю и нижнюю плоскости пластины. Скорость этого потока на бесконечности равна постоянной величине V , превышающей скорость звука, и направлена вдоль оси ординат (см. рис. 1).

Характерной особенностью рассматриваемой задачи является зависимость действующей на пластину аэродинамической нагрузки от изгибных деформаций данной пластины. Вследствие этого режим колебаний пластины может претерпевать не только количественные, но и качественные изменения в зависимости от скорости V . Возможен флаттер пластины — режим колебаний с нарастающей амплитудой, являющийся результатом динамической потери устойчивости [1–3]. Частным случаем рассматриваемого процесса является дивергенция пластины — возрастание прогиба со временем при отсутствии колебаний (т. е. случай нулевой частоты колебаний) [1–3]. Целью настоящей работы является определение критической величины V , при превышении которой начинается флаттер или дивергенция.

Исходным соотношением математической модели является вариационное уравнение Гамильтона для деформируемого твердого тела при малых деформациях [18]

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_{\Omega} (\rho_0 \partial_t u_k \delta \partial_t u_k - \sigma_{mn} \delta \varepsilon_{mn}) d\Omega + \int_S p_k \delta u_k dS \right) = 0, \quad (1.1)$$

где t — время; t_1, t_2 — произвольные моменты времени; u_k ($k = 1, 2, 3$) — компоненты

вектора перемещений; ρ_0 — плотность материала пластины; $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ — оператор дифференцирования по времени; σ_{mn} — тензор напряжений; ε_{mn} — тензор деформаций; Ω — объем тела; S — поверхность тела; p_k — компоненты вектора поверхностной нагрузки. В первом слагаемом выражения (1.1) выполним интегрирование по частям (по времени), учитывая, что в моменты времени t_1, t_2 вариации δu_k равны нулю. В результате уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_{\Omega} (\rho_0 \partial_t \partial_t u_k \delta u_k + \sigma_{mn} \delta \varepsilon_{mn}) d\Omega - \int_S p_k \delta u_k dS \right) = 0. \quad (1.2)$$

Введем обозначение для прогиба пластины $w \equiv u_3$. В соответствии с гипотезами Кирхгофа [5]

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_3 \partial_1 w, & u_2 &= -x_3 \partial_2 w, & \varepsilon_{11} &= -x_3 \partial_1 \partial_1 w, \\ \varepsilon_{22} &= -x_3 \partial_2 \partial_2 w, & \varepsilon_{12} &= -x_3 \partial_1 \partial_2 w, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 (\partial_1 \partial_1 w + \nu \partial_2 \partial_2 w), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) = -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 (\partial_2 \partial_2 w + \nu \partial_1 \partial_1 w), \\ \sigma_{12} &= 2G \varepsilon_{12} = -2G x_3 \partial_1 \partial_2 w. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$ — оператор дифференцирования по координате x_k ; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $G = E/[2(1+\nu)]$ — модуль сдвига. Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Прогиб пластины не зависит от координаты x_3 . Кроме того, справедливо условие $|w| \ll h$, где h — толщина пластины. Предполагается, что в общем случае E, ρ_0 зависят от всех трех координат x_k , толщина h — от координат x_1, x_2 ; коэффициент Пуассона ν считается постоянным.

Подставляя соотношения (1.3) в (1.2) и интегрируя по x_3 в пределах от $-h/2$ до $h/2$, уравнение (1.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \{ m \partial_t \partial_t w \delta w + D [(\partial_1 \partial_1 w + \partial_2 \partial_2 w)(\partial_1 \partial_1 \delta w + \partial_2 \partial_2 \delta w) - \\ - (1-\nu)(\partial_1 \partial_1 w \partial_2 \partial_2 \delta w + \partial_2 \partial_2 w \partial_1 \partial_1 \delta w - 2 \partial_1 \partial_2 w \partial_1 \partial_2 \delta w)] - q \delta w \} dS = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины; m — масса, приходящаяся на единицу площади пластины; $q \equiv p_3$ — поверхностная нагрузка. Величины D и m определяются по формулам [5]

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E x_3^2}{1-\nu^2} dx_3, \quad m = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 dx_3.$$

Согласно поршневой теории [1–3] аэродинамическая нагрузка q , действующая на пластину, определяется выражением

$$q = -2\rho c(\partial_t w + V \partial_2 w), \quad (1.5)$$

где ρ, c — плотность воздуха, скорость звука на бесконечности соответственно; множитель 2 обозначает, что пластина обтекается по обеим поверхностям. С учетом выражения (1.5) уравнение (1.4) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \left\{ (m \partial_t \partial_t w + 2\rho c \partial_t w) \delta w + D[(\partial_1 \partial_1 w + \partial_2 \partial_2 w)(\partial_1 \partial_1 \delta w + \partial_2 \partial_2 \delta w) - \right. \\ \left. - (1 - \nu)(\partial_1 \partial_1 w \partial_2 \partial_2 \delta w + \partial_2 \partial_2 w \partial_1 \partial_1 \delta w - 2 \partial_1 \partial_2 w \partial_1 \partial_2 \delta w)] + \right. \\ \left. + 2\rho c V \partial_2 w \delta w \right\} dS = 0. \quad (1.6)$$

Математическое описание колебательного режима можно получить с помощью метода разделения переменных. Представим прогиб пластины w в виде

$$w = W(x_1, x_2) \exp(sct/a) \quad (1.7)$$

(s — безразмерная постоянная, определяемая в процессе решения задачи). Подставляя выражение (1.7) в уравнение (1.6), получаем

$$\int_S \left\{ \frac{c^2}{a^2} (ms^2 + 2\rho a s) W \delta W + D[(\partial_1 \partial_1 W + \partial_2 \partial_2 W)(\partial_1 \partial_1 \delta W + \partial_2 \partial_2 \delta W) - \right. \\ \left. - (1 - \nu)(\partial_1 \partial_1 W \partial_2 \partial_2 \delta W + \partial_2 \partial_2 W \partial_1 \partial_1 \delta W - 2 \partial_1 \partial_2 W \partial_1 \partial_2 \delta W)] + \right. \\ \left. + 2\rho c V \partial_2 W \delta W \right\} dS = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) представляет собой вариационное уравнение, решением которого является функция $W = W(x_1, x_2)$, определяемая в классе функций, удовлетворяющих существенным граничным условиям [6] — условиям заделки на участке EF

$$W = 0, \quad \partial_1 W = 0.$$

Дифференциальное уравнение Эйлера для вариационного уравнения (1.8), а также граничные условия однородны. Значения s являются собственными значениями задачи и находятся из условия существования нетривиальных решений. Если $\operatorname{Re} s < 0$, то амплитуда колебаний уменьшается со временем, что соответствует затуханию колебаний; если $\operatorname{Re} s > 0$, то амплитуда со временем возрастает, что соответствует потере устойчивости. Задача заключается в определении критической скорости V_{cr} , при достижении которой теряется устойчивость пластины.

2. Численное решение задачи. Краевая задача решается методом конечных элементов (в данной задаче — прямоугольников с четырьмя узлами — элементов Богнера — Фокса — Шмита) [19]. Так как эти конечные элементы не являются изопараметрическими, необходимо, чтобы область интегрирования была прямоугольной. Непосредственной проверкой легко убедиться, что с помощью отображения

$$x_1 = \frac{a}{2} (1 + \xi_1), \quad (2.1)$$

$$x_2 = \frac{a}{2} \left\{ \left[\beta + \frac{1}{2} (c_2 + c_1) \right] + \frac{1}{2} (c_2 + c_1) \xi_1 + \left[\beta + \frac{1}{2} (c_2 - c_1) \right] \xi_2 + \frac{1}{2} (c_2 - c_1) \xi_1 \xi_2 \right\},$$

где $\beta = b/a$; $c_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$; $c_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$; квадрат $\xi_1, \xi_2 \in [-1; 1]$, который разбивается на конечные элементы, преобразуется в косоугольный четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1). Обратное отображение имеет вид

$$\xi_1 = \frac{2x_1}{a} - 1, \quad \xi_2 = \frac{2x_2/a - (c_2 + c_1)x_1/a - \beta}{\beta + (c_2 - c_1)x_1/a}. \quad (2.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{mk} = a \partial_m \xi_k, \quad \gamma_{mnk} = a^2 \partial_m \partial_n \xi_k, \quad \psi_{mnkj} = \varphi_{mk} \varphi_{nj}.$$

Здесь и ниже немые индексы принимают значения 1 и 2. Дифференцируя выражение (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= 2, & \varphi_{12} &= -\frac{2[\beta c_1 + (c_2 - c_1)x_2/a]}{[\beta + (c_2 - c_1)x_1/a]^2}, & \varphi_{21} &= 0, & \varphi_{22} &= \frac{2}{\beta + (c_2 - c_1)x_1/a}, \\ \gamma_{112} &= \frac{4(c_2 - c_1)[\beta c_1 + (c_2 - c_1)x_2/a]}{[\beta + (c_2 - c_1)x_1/a]^3}, & \gamma_{122} &= \gamma_{212} = -\frac{2(c_2 - c_1)}{[\beta + (c_2 - c_1)x_1/a]^2}. \end{aligned}$$

Остальные компоненты γ_{mnk} равны нулю. С учетом равенств (2.1) величины φ_{mk} , γ_{mnk} , ψ_{mnkj} являются функциями переменных ξ_k и не зависят от a . В результате имеем выражение

$$\partial_n \partial_m W = \partial_m \partial_n W = \frac{1}{a^2} \left(\gamma_{mnk} \frac{\partial W}{\partial \xi_k} + \psi_{mnkj} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \right). \quad (2.3)$$

Подставляя соотношения (2.1), (2.3) в вариационное уравнение (1.8), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{1kl} \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \frac{\partial \delta W}{\partial \xi_l} + A_{2kli} \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial \xi_l \partial \xi_i} + A_{2lki} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k \partial \xi_i} \frac{\partial \delta W}{\partial \xi_l} + \right. \\ \left. + A_{3klj} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial \xi_l \partial \xi_i} + 2\kappa \varphi_{2k} \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \delta W + (m_* \mu s^2 + 2\eta s) W \delta W \right) |J| d\xi_1 d\xi_2 = 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{1kl} &= [\gamma_{11k} \gamma_{11l} + \gamma_{22k} \gamma_{22l} + \nu(\gamma_{11k} \gamma_{22l} + \gamma_{22k} \gamma_{11l}) + 2(1 - \nu) \gamma_{12k} \gamma_{12l}] D_*, \\ A_{2kli} &= [\gamma_{11k} \psi_{11li} + \gamma_{22k} \psi_{22li} + \nu(\gamma_{11k} \psi_{22li} + \gamma_{22k} \psi_{11li}) + 2(1 - \nu) \gamma_{12k} \psi_{12li}] D_*, \\ A_{3klj} &= [\psi_{11kj} \psi_{11li} + \psi_{22kj} \psi_{22li} + \nu(\psi_{11kj} \psi_{22li} + \psi_{22kj} \psi_{11li}) + 2(1 - \nu) \psi_{12kj} \psi_{12li}] D_*, \end{aligned}$$

$$J = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial \xi_1 & \partial x_1 / \partial \xi_2 \\ \partial x_2 / \partial \xi_1 & \partial x_2 / \partial \xi_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left[\beta + \frac{1}{2} (c_2 - c_1) (1 + \xi_1) \right],$$

$$\mu = \frac{m_0 c^2 a^2}{D_0}, \quad \eta = \frac{\rho c^2 a^3}{D_0}, \quad \kappa = \eta M, \quad M = \frac{V}{c}, \quad D_* = \frac{D}{D_0}, \quad m_* = \frac{m}{m_0},$$

постоянные m_0 , D_0 — некоторые характерные значения интенсивности массы и цилиндрической жесткости пластины соответственно; M — число Маха на бесконечности; η , μ — параметры подобия задачи.

В локальных координатах каждый конечный элемент представляет собой квадрат (рис. 2). Глобальные координаты внутренних точек элемента определяются по формулам

$$\xi_1 = a_1 + b_1 z_1, \quad \xi_2 = a_2 + b_2 z_2, \quad a_k = (\xi_k^{22} + \xi_k^{11})/2, \quad b_k = (\xi_k^{22} - \xi_k^{11})/2. \quad (2.5)$$

Величины с верхними индексами являются глобальными координатами узлов, их значения известны. Узлы имеют двойную нумерацию: первый индекс определяет положение узла по оси абсцисс, второй — по оси ординат.

Поскольку уравнение (2.4) включает вторые производные по координатам, необходимо обеспечить межэлементную непрерывность не только функции $W(\xi_k)$, но и ее первых производных по координатам ξ_1 и ξ_2 . Кроме того, на границах элементов вторая смешанная

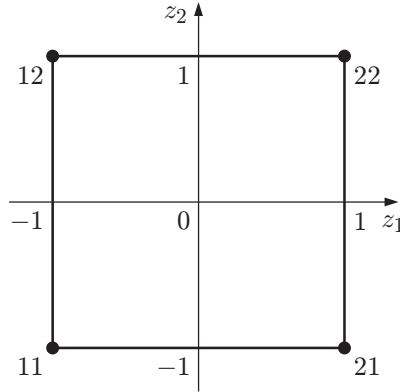


Рис. 2. Конечный элемент в локальных координатах (квадрат)

производная также должна оставаться непрерывной, чтобы можно было получить правильное значение однородной деформации при уменьшении размеров элементов [19]. Следовательно, узловыми неизвестными являются величины W_{IJ}^K , $K = 1, \dots, 4$, где W_{IJ}^1 — значение W в IJ -м узле; $W_{IJ}^2 = \partial W / \partial \xi_1$, $W_{IJ}^3 = \partial W / \partial \xi_2$, $W_{IJ}^4 = \partial^2 W / \partial \xi_1 \partial \xi_2$ — значения производных от W в IJ -м узле. Таким образом, каждый узел имеет четыре степени свободы. Рассмотрим интерполяционные полиномы Эрмита [19]

$$\begin{aligned} H_1(z) &= (2 - 3z + z^3)/4, & H_2(z) &= (2 + 3z - z^3)/4, \\ G_1(z) &= (1 - z - z^2 + z^3)/4, & G_2(z) &= (-1 - z + z^2 + z^3)/4. \end{aligned}$$

Выражение для функции W внутри элемента записывается в виде

$$W = \Phi_{IJ}^K(z_1, z_2) W_{IJ}^K, \quad (2.6)$$

где $\Phi_{IJ}^1 = H_I(z_1)H_J(z_2)$; $\Phi_{IJ}^2 = b_1 G_I(z_1)H_J(z_2)$; $\Phi_{IJ}^3 = b_2 H_I(z_1)G_J(z_2)$; $\Phi_{IJ}^4 = b_1 b_2 G_I(z_1)G_J(z_2)$; b_k определяются по формулам (2.5).

Подставим соотношение (2.6) в вариационное уравнение (2.4). Тогда с учетом формул (2.5) слагаемое в левой части уравнения (2.4), представляющее собой вклад в интеграл одного элемента, выражается следующим образом:

$$(B_{1IJKL}^{MN} + \varkappa B_{2IJKL}^{MN} + \mu s^2 B_{3IJKL}^{MN} + 2\eta s B_{4IJKL}^{MN}) W_{IJ}^M \delta W_{KL}^N. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{1IJKL}^{MN} &= b_1 b_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{A_{1kl}}{b_k b_l} \frac{\partial \Phi_{IJ}^M}{\partial z_k} \frac{\partial \Phi_{KL}^N}{\partial z_l} + \frac{A_{2kli}}{b_k b_l b_i} \frac{\partial \Phi_{IJ}^M}{\partial z_k} \frac{\partial^2 \Phi_{KL}^N}{\partial z_l \partial z_i} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{2lki}}{b_l b_k b_i} \frac{\partial^2 \Phi_{IJ}^M}{\partial z_k \partial z_i} \frac{\partial \Phi_{KL}^N}{\partial z_l} + \frac{A_{3kl ij}}{b_k b_l b_i b_j} \frac{\partial^2 \Phi_{IJ}^M}{\partial z_k \partial z_j} \frac{\partial^2 \Phi_{KL}^N}{\partial z_l \partial z_i} \right) |J| dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

$$B_{2IJKL}^{MN} = 2b_1 b_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_{2k}}{b_k} \frac{\partial \Phi_{IJ}^M}{\partial z_k} \Phi_{KL}^N |J| dz_1 dz_2,$$

$$B_{3IJKL}^{MN} = b_1 b_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 m_* \Phi_{IJ}^M \Phi_{KL}^N |J| dz_1 dz_2, \quad B_{4IJKL}^{MN} = b_1 b_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi_{IJ}^M \Phi_{KL}^N |J| dz_1 dz_2.$$

Данные интегралы нетрудно найти численно. Переходя к одномерной глобальной нумерации узловых неизвестных и суммируя по всем элементам выражения (2.7) с учетом того, что один и тот же узел может принадлежать нескольким элементам, получаем

$$(C_{1mn} + \varkappa C_{2mn} + \mu s^2 C_{3mn} + 2\eta s C_{4mn}) U_m \delta U_n = 0. \quad (2.8)$$

Здесь U_m — узловые неизвестные (в глобальной нумерации); индексы m, n изменяются в пределах от 1 до $4N$; N — общее число узлов. Поскольку вариации узловых неизвестных произвольны, уравнение (2.8) эквивалентно однородной системе $4N$ линейных алгебраических уравнений

$$(C_1 + \varkappa C_2 + \mu s^2 C_3 + 2\eta s C_4) U = 0.$$

Существенные граничные условия учитываются следующим образом: исключаются строки и столбцы, соответствующие узловым параметрам, которые согласно граничным условиям равны нулю. Отметим, что матрицы C_1, C_3, C_4 симметричны, а матрица C_2 несимметрична.

3. Однородные пластины. Для однородных пластин $D_* = 1, m_* = 1, C_4 = C_3$. При этом данная задача преобразуется в стандартную алгебраическую задачу о собственных значениях. Матрица C_3 получается в результате варьирования кинетической энергии в вариационном уравнении (1.1). В силу положительности кинетической энергии эта матрица положительно определена. Следовательно, всегда существует обратная к ней матрица C_3^{-1} . Поэтому можно записать

$$DU = \lambda U, \quad D = C_3^{-1}(C_1 + \varkappa C_2), \quad \lambda = -(\mu s^2 + 2\eta s),$$

где D — несимметричная матрица; λ — собственное значение. Метод решения задачи о собственных значениях заимствован из работы [20]: используется QR-алгоритм с предварительным приведением матрицы D к форме Хессенберга [20].

Так как матрица D несимметрична, ее собственные значения в общем случае комплексны [20]. Пусть $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, где λ_R, λ_I — действительные числа; i — мнимая единица. Тогда

$$s = \frac{1}{\mu} [-\eta + (\eta^2 - \mu\lambda)^{1/2}], \quad \eta^2 - \mu\lambda = r \exp(i\theta), \quad r = \sqrt{(\eta^2 - \mu\lambda_R)^2 + \mu^2\lambda_I^2},$$

$$\cos \theta = \frac{\eta^2 - \mu\lambda_R}{r}, \quad \sin \theta = -\frac{\mu\lambda_I}{r}, \quad \operatorname{Re} s = -\frac{1}{\mu} \left(\eta \pm \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad \cos \frac{\theta}{2} \geq 0.$$

Для обеспечения устойчивости пластины необходимо выполнение неравенства

$$-\eta + \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad r(1 + \cos \theta) \leq 2\eta^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_I^2 \leq \frac{4\eta^2}{\mu} \lambda_R. \quad (3.1)$$

Из выражения (3.1) следует, что в координатах λ_R, λ_I область устойчивости ограничена параболой, называемой параболой устойчивости [21].

При $M = 0$ матрица D симметрична, все ее собственные значения действительны и, кроме того, положительны, а также выполняется условие устойчивости (3.1). Однако может существовать критическое число Маха M_{cr} , при достижении которого нарушается неравенство (3.1). Критическому числу Маха соответствует \varkappa_{cr} — критическое значение параметра \varkappa , являющееся некоторой функцией пяти параметров подобия:

$$\begin{aligned} \varkappa_{cr} &= \eta M_{cr} = f(\alpha_1, \alpha_2, \beta, \nu, \chi), \\ \chi &= \begin{cases} \frac{\eta^2}{\mu} = 12(1 - \nu^2)\gamma \frac{p}{E} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{a}{h}\right)^4, & a > b \Leftrightarrow \beta < 1, \\ \frac{\eta^2 \beta^4}{\mu} = 12(1 - \nu^2)\gamma \frac{p}{E} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{b}{h}\right)^4, & a < b \Leftrightarrow \beta > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь p — давление на бесконечности; γ — показатель адиабаты.

Алгоритм решения задачи строится следующим образом. Сначала при заданных величинах $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \nu$ вычисляются матрицы $C_3^{-1}C_1, C_3^{-1}C_2$, а затем ищется значение $\varkappa = \varkappa_{cr}$, при котором какое-либо собственное значение λ пересекает параболу устойчивости. Если потеря устойчивости происходит в результате дивергенции, то это собственное значение λ действительно и при переходе через параболу устойчивости меняет знак с положительного на отрицательный. Если потеря устойчивости происходит в результате флаттера, то параболу устойчивости пересекают одновременно два собственных значения, имеющие одинаковые положительные действительные части и одинаковые по модулю, но противоположные по знаку мнимые части. Как правило, эти собственные значения являются наименьшими по модулю.

Во многих случаях процесс потери устойчивости является автомодельным по параметру подобия χ [17]. Это обусловлено поведением собственного значения, после того как его мнимая часть становится ненулевой. В качестве типичного примера рассмотрим квадратную пластину ($\beta = 1$) из алюминиевого сплава ($E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0,3, \rho_0 = 2700$ кг/м³) при $a/h = 100$. Принимались следующие значения параметров воздуха: $\gamma = 1,4, p = 10^5$ Па, $\rho = 1,29$ кг/м³. При этом по формуле (3.2) находим $\chi = 1,043$. На рис. 3 представлены расчетные зависимости $\lambda_R(\varkappa)$ и $\lambda_I(\varkappa)$, а также границы области устойчивости (все результаты расчетов получены с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-3}). Мнимая часть становится ненулевой при значении $\varkappa = 29,0$, а уже при значении $\varkappa = 31,6$ происходит потеря устойчивости вследствие быстрого возрастания (по модулю) функции $\lambda_I(\varkappa)$.

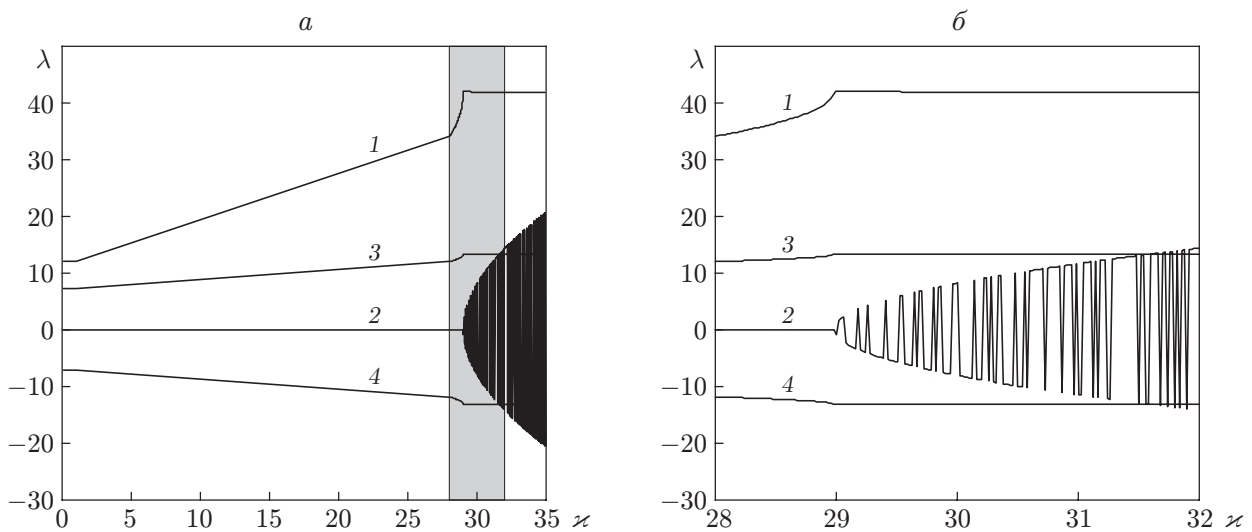


Рис. 3. Зависимости действительной и мнимой составляющих наименьшего по модулю собственного значения от параметра \varkappa (а) и фрагмент этих зависимостей (заштрихованная область) в увеличенном размере (б):

1 — зависимость $\lambda_R(\varkappa)$; 2 — зависимость $\lambda_I(\varkappa)$; 3, 4 — границы области устойчивости — функции $2\sqrt{\chi\lambda_R(\varkappa)}$ и $-2\sqrt{\chi\lambda_R(\varkappa)}$ соответственно

Различие между приведенными значениями \varkappa составляет менее 10 %. Аналогичные результаты получены при других значениях α_1 , α_2 , β . Поэтому допустимо считать, что при $\chi \leq 1$ процесс потери устойчивости является автомодельным по параметру χ , тем более что это допущение идет в запас устойчивости, т. е. позволяет проводить расчет, полагая $\chi = 0$. В данном случае условие устойчивости можно получить из неравенств (3.1) при $\eta = 0$:

$$\cos(\theta/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_R > 0, \quad \lambda_I = 0. \quad (3.3)$$

Представленные ниже результаты численных расчетов получены на основе предположения об автомодельности процесса потери устойчивости по параметру χ и, следовательно, о справедливости критерия (3.3).

4. Примеры расчета. Проведем сравнение результатов вычислений с использованием предложенного метода с результатами вычислений, выполненных другими исследователями (все пластины, рассмотренные в данном пункте, зашпелены по всей длине корневой хорды AB). Рассмотрим ромбовидную пластину с $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30^\circ$, $a = b \cos \alpha$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Найденные представленным методом и приведенное в работе [7] критические значения \varkappa соответственно равны $\varkappa_{cr} = 13,02$, $\varkappa_{cr} = 13,75$ (различие результатов является приемлемым).

Рассмотрим пластину с прямоугольной задней кромкой ($\alpha_2 = 0^\circ$). Сужение пластины — отношение длины концевой хорды CD к длине корневой хорды AB (см. рис. 1) — определяется по формуле $v = 1 - \beta^{-1} \operatorname{tg} \alpha_1$. Данные расчетов \varkappa_{cr} представлены в табл. 1. Различие результатов, полученных в данной работе и в [11], не превышает 10 % (результаты работы [11] разделены на два, так как они получены в предположении, что пластина обтекает только по одной поверхности). Иная картина наблюдается для пластины с прямоугольной передней кромкой ($\alpha_1 = 0^\circ$) и обратной стреловидностью задней кромки ($\alpha_2 \leq 0^\circ$). В данном случае сужение определяется выражением $v = 1 + \beta^{-1} \operatorname{tg} \alpha_2$. Результаты расчетов представлены в табл. 2. Резкое уменьшение значений \varkappa_{cr} обусловлено дивергентной формой потери устойчивости. Наблюдается значительное различие данных при $v = 0,2$, $\beta = 1$. Согласно результатам расчета изложенным методом формой потери устойчивости является флаттер, а согласно результатам расчета [11] — дивергенция.

В работе [22] приведены результаты экспериментов для алюминиевых пластин трех типов (A, B, C) с прямоугольной задней кромкой ($\alpha_2 = 0^\circ$). Пластины различались значениями β , α_1 при неизменных величинах $b = 12 \cdot 2,54 \cdot 10^{-2}$ м, $h/b = 0,00267$, $\nu = 1/3$. Для пластины A $\beta = 2,06$, $\alpha_1 = 54,0^\circ$; для пластины B $\beta = 2,8$, $\alpha_1 = 61,8^\circ$; для пластины C $\beta = 4,26$, $\alpha_1 = 70,6^\circ$. Экспериментально получены зависимости, связывающие критическое число Маха M_{cr} с величиной ζ :

$$\zeta = b_* \omega_2 \sqrt{\mu_*} / c = f(M_{cr}).$$

Таблица 1

Критические значения параметра \varkappa для пластины с прямоугольной задней кромкой

v	$\beta = 0,5$		$\beta = 1,0$		$\beta = 2,0$	
	Данная работа	Работа [11]	Данная работа	Работа [11]	Данная работа	Работа [11]
0,2	129,30	130,0	64,94	65,0	32,25	32,1
0,4	107,10	109,0	50,46	50,5	23,33	23,1
0,6	89,93	89,5	39,37	39,4	17,47	17,8
0,8	76,67	76,0	32,08	31,9	14,31	15,6
1,0	67,16	67,0	28,98	28,1	19,77	18,9

Таблица 2

Критические значения параметра \varkappa для пластины с прямоугольной передней кромкой

v	$\beta = 0,5$		$\beta = 1,0$		$\beta = 2,0$	
	Данная работа	Работа [11]	Данная работа	Работа [11]	Данная работа	Работа [11]
0,2	51,00	—	135,80	44,0	55,94	54,5
0,4	173,40	175,0	82,71	82,5	32,07	31,8
0,6	124,20	—	54,46	56,0	21,97	21,8
0,8	90,70	—	38,45	38,5	18,03	19,0
1,0	67,16	67,0	28,98	28,1	19,77	18,9

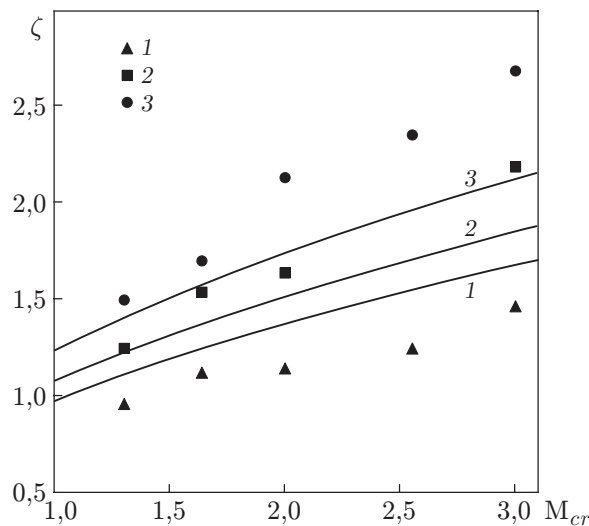


Рис. 4. Зависимость $\zeta = f(M_{cr})$ для пластин A (1), B (2), C (3):
линии — результаты расчета; точки — экспериментальные данные

Здесь b_* — половина длины хорды, находящейся на расстоянии от корневой хорды, равном $3a/4$; ω_2 — вторая собственная круговая частота колебаний пластины; μ_* — отношение массы пластины к массе воздуха, заключенного в усеченном конусе с параллельными набегающему потоку основаниями, диаметры которых равны длинам корневой и концевой хорд. Выражение для величины ζ можно представить в виде

$$\zeta = \frac{1 + 3v}{8} \sqrt{\frac{6(1 + v)\beta\lambda_2 M_{cr}}{\pi(1 + v + v^2)\varkappa_{cr}}},$$

где λ_2 — второе собственное значение в задаче о свободных колебаниях пластины, которое можно определить, в частности, изложенным методом при $\varkappa = 0$. Значение \varkappa_{cr} рассчитывается изложенным методом. Расчетные и экспериментальные зависимости $\zeta = f(M_{cr})$ представлены на рис. 4. Ошибочно считать причиной различия расчетных и экспериментальных результатов только несовершенство теории. Имеющихся экспериментальных данных явно недостаточно для выявления основных закономерностей процесса. Необходимо проведение дальнейших как теоретических, так и экспериментальных исследований.

5. Неоднородные пластины и пластины, заземленные не по всей длине корневой хорды. Переход от условия устойчивости (3.1) к условию (3.3) формально эквивалентен допущению $C_4 = 0$, что позволяет представить равенство (1.5) в виде

$$q = -2\rho cV \partial_2 w. \quad (5.1)$$

Отметим, что в работе [23] в выражении для аэродинамической нагрузки величины, зависящие от скорости, не учитывались. Однако в [23] не указаны условия, при которых можно не учитывать данные величины. То, что такие условия существуют, следует из результатов проведенных в [24] расчетов критической скорости обтекания цилиндрической оболочки. В п. 3 установлено, что использование выражения (5.1) и, следовательно, условия устойчивости (3.3) допустимо только при выполнении неравенства $\chi \leq \chi_*$, где χ_* — некоторое граничное значение (для случая, рассмотренного в п. 3, допустимо считать, что $\chi_* = 1$). При этом критическое значение \varkappa_{cr} для неоднородной пластины определяется так же, как и для однородной, но D_* , m_* — заданные функции координат x_1 , x_2 .

Возможности изложенного метода показаны на следующем примере. Пусть неоднородность пластины обусловлена только переменностью толщины, т. е. E , ν , ρ_0 постоянны. Профили, получаемые в результате сечения пластины плоскостями, параллельными оси аппликата и корневой хорде, подобны и определяются формулами

$$h(x_1, x_2) = h_{\max} \left[1 - \left(\frac{2x_2^*}{b - x_1(c_1 - c_2)} \right)^2 \right],$$

$$h_{\max} = \frac{h_{\max 0}}{b} [b - x_1(c_1 - c_2)], \quad x_2^* = x_2 - \frac{b + x_1(c_1 + c_2)}{2}.$$

Толщина профиля изменяется по закону параболы, а его максимальная толщина h_{\max} пропорциональна длине его хорды [25]. Функция $h(x_1, x_2)$ содержит, кроме ранее введенных величин, только один параметр $h_{\max 0}$ — максимальное значение толщины в корневом сечении (при $x_1 = 0$). Эту величину целесообразно использовать при вычислении характерных значений интенсивности массы m_0 и цилиндрической жесткости пластины D_0 . Отметим, что функции m_* , D_* не зависят от $h_{\max 0}$.

В случае $\chi \leq 1$ проведены расчеты при $\nu = 0,3$, $\beta = 1$, $\alpha_2 = 0^\circ$. Результаты этих расчетов, представленные на рис. 5, вполне ожидаемы, за исключением аномального поведения кривой 2 в окрестности значения $l/b = 0,6$. Анализ результатов показывает, что в этом случае на параболу устойчивости выходят четвертое и пятое собственные значения, в отличие от остальных расчетных случаев, в которых на нее выходят два первых собственных значения. Причины такого поведения этих собственных значений позволяет объяснить табл. 3, в которой приведены безразмерные значения круговых частот свободных колебаний пластины

$$\omega_{*j} = \omega_j a^2 \sqrt{m_0/D_0} = \sqrt{\lambda_j}$$

(ω_j — j -я собственная круговая частота; λ_j — j -е собственное значение, вычисленное при $\varkappa = 0$). Установлено, что при $l/b = 0,6$ четвертая и пятая частоты свободных колебаний различаются менее чем на 0,11%. Эта особенность и является причиной аномально низкого значения \varkappa_{cr} в рассматриваемом случае.

Полученный в настоящей работе результат показывает, что зависимости критической скорости от параметров процесса могут быть немонотонными и негладкими. Поскольку флаттер или дивергенция крыльев летательных аппаратов приводят как минимум к рез-

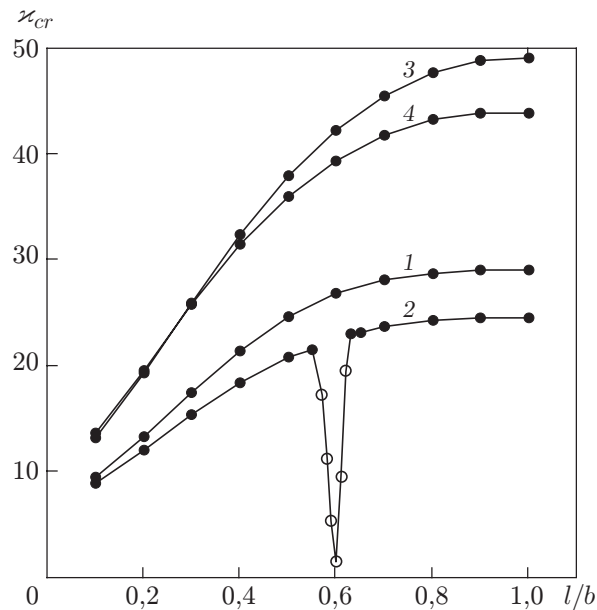


Рис. 5. Зависимость критического значения параметра κ от длины заземленного участка контура:

1, 2 — $\alpha_1 = 0$ (1 — толщина пластины постоянна; 2 — толщина пластины определяется формулой (5.2)); 3, 4 — $\alpha_1 = 30^\circ$ (3 — толщина пластины постоянна; 4 — толщина пластины определяется формулой (5.2)); темные точки — наступление флаттера в результате слияния первой и второй собственных частот, светлые точки — в результате слияния четвертой и пятой собственных частот

Таблица 3

Безразмерные значения круговых частот свободных колебаний пластины

j	$l/b = 0,55$	$l/b = 0,57$	$l/b = 0,58$	$l/b = 0,59$	$l/b = 0,60$	$l/b = 0,61$	$l/b = 0,62$	$l/b = 0,63$	$l/b = 0,65$
1	3,22	3,24	3,25	3,26	3,28	3,29	3,30	3,30	3,32
2	7,69	7,77	7,82	7,86	7,90	7,94	7,98	8,01	8,08
3	19,14	19,33	19,43	19,52	19,60	19,69	19,77	19,85	19,99
4	27,31	27,68	27,88	28,04	28,17	28,19	28,21	28,22	28,25
5	28,06	28,11	28,14	28,16	28,20	28,36	28,51	28,66	28,93
6	45,86	46,97	47,52	47,96	48,39	48,80	49,21	49,59	50,28

кому ухудшению управляемости, традиционный анализ, основанный на использовании упрощенных балочных схем, должен быть заменен на метод, развитый в настоящей работе, или на аналогичные ему методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Фершинг Г.** Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984.
3. **Смирнов А. И.** Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980.
4. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963.

6. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
7. **Srinivasan R. S., Babu V. J. C.** Flutter analysis of cantilevered quadrilateral plates // J. Sound Vibration. 1985. V. 98, N 1. P. 45–53.
8. **Буньков В. Г.** Расчет на флаттер крыла малого удлинения на быстродействующей вычислительной машине. Жуковский: Центр. аэрогидродинам. ин-т, 1964. (Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та; Вып. 95).
9. **Марченко Г. А.** Метод Ритца в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости // Изв. вузов. Авиационная техника. 1966. № 3. С. 62–68.
10. **Марченко Г. А., Филиппов А. П.** О колебаниях пластин в потоке газа // Прикл. механика. 1966. Т. 2, вып. 11. С. 133–137.
11. **Филиппов А. П.** Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
12. **Зенкевич О.** Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. М.: Мир, 1986.
13. **Алгазин С. Д.** Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. М.: Наука, 2006.
14. **Веденеев В. В.** О высокочастотном флаттере пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 2. С. 163–172.
15. **Кийко И. А., Показеев В. В.** К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 159–166.
16. **Арсентьев Т. П.** Колебания крыла в сверхзвуковом потоке газа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2007. Сер. 1, вып. 4. С. 100–107.
17. **Баренблатт Г. И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
18. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
19. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
20. **Уилкинсон.** Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Уилкинсон, Райнш. М.: Машиностроение, 1976.
21. **Мовчан А. А.** Об устойчивости панели, движущейся в газе // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 2. С. 231–243.
22. **Hanson P. W., Levey G. M.** Experimental and calculated results of a flutter investigation of some very low aspect-ratio flat-plate surfaces at Mach numbers from 0.62 to 3.00. Hampton, 1959. (Tech. memorandum / NASA; X-53).
23. **Хеджпет Д.** Флаттер прямоугольных свободно опертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях // Механика. 1958. № 2. С. 103–126.
24. **Мовчан А. А.** О влиянии аэродинамического демпфирования на сверхзвуковой флаттер обшивки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 1. С. 175–177.
25. **Давыдов Ю. В.** Геометрия крыла. Методы и алгоритмы проектирования несущих поверхностей / Ю. В. Давыдов, В. А. Злыгарев. М.: Машиностроение, 1987.

*Поступила в редакцию 14/III 2009 г.,
в окончательном варианте — 21/VI 2010 г.*