следующих соотношениях: $\mu_1/\rho_1 = 1{,}32\cdot 10^5$, $\mu/\rho = 2{,}5\cdot 10^4$ — штриховая линия, $\mu_1/\rho_1 = 2{,}5\cdot 10^4$, $\mu/\rho = 1{,}32\cdot 10^5$—штрихпунктирная, сплошная и пунктирная линии — характеристики той же точки в случае области без полости при аналогичных параметрах задачи. Качественное различие приведенных графиков определяется тем,что для $V_s < V_{s1}$ ($V_s = \sqrt{\rho/\mu}$, $V_{s1} = \sqrt{\rho_1/\mu_1}$) при возбуждении установившихся гармонических колебаний слой работает как волновод, вдоль границ которого распространяются волны с неубывающей амплитудой, обусловленные наличием вещественных нулей у функции D^+. Для задачи 1 это условие неопределяющее, так как основной вклад в формирование волнового поля среды вносит осциллирующая полость. Амплитудно-частотная зависимость точки среды при нагружении на поверхности цилиндрического отверстия приведена на рис. 2. Соответствие линий и параметров задачи то же, что и на рис. 1.

При анализе закономерностей поведения решения задачи 2 по угловой координате при фиксированном удалении от источника колебаний получены результаты, представленные на рис. 3 в виде зависимости $w_1\mu_1$ от угла ψ при $\theta_1 = 1$, $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = 13$, $\psi = \operatorname{arctg} x/y$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\rho_1 = \rho = 2\cdot 10^3$. Штриховая линия — зависимость при $\mu_1 = 3\cdot 10^8$, $\mu = 7{,}5\cdot 10^7$, штрихпунктирная — при $\mu_1 = 7{,}5\cdot 10^7$, $\mu = 3\cdot 10^8$, сплошная и пунктирная линии — аналогичные характеристики для двухслойного полупространства без полости. При области с отверстием наблюдается дополнительная осцилляция, вносимая наличием отражающих границ полости, полупространства и слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
2. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
3. **Бабешко В. А., Селезнева Т. Н. и др.** Об установившихся колебаниях упругого полупространства с горизонтальной цилиндрической полостью.— ПМ, 1983, т. 19, вып. 10.
4. **Бабешко В. А., Селезнева Т. Н. и др.** Об одном методе исследования установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего сферическую или горизонтальную цилиндрическую полость.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 1.
5. **Федорюк М. В.** Метод перевала.— М.: Наука, 1977.

Поступила 17/VI 1985 г.

УДК 539.3

О СТРУКТУРЕ ТЕНЗОРА МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ И КЛАССИФИКАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н. И. Остросаблин

(*Новосибирск*)

В линейной теории упругости удельная энергия деформации для анизотропных материалов имеет вид [1—3]

$$2\Phi = A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — компоненты тензора деформаций в ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3; A_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости. В (1) и далее повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до 3. Постоянные A_{ijkl} обладают свойствами симметрии:

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}, \tag{2}$$

это следует из симметрии тензора ε_{ij} и возможности переобозначить индексы суммирования в (1). Из (2) видно, что независимых компонент A_{ijkl} только 21. Энергия деформации (1) должна быть положительно определенной квадратичной формой [1, 3].

Компоненты тензора напряжений определяются из (1) по формулам

(3) $$\sigma_{ij} = \partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$

Соотношения (3), называемые обобщенным законом Гука, можно обратить:

(4) $$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}.$$

Здесь a_{ijkl} — компоненты тензора коэффициентов податливости. Постоянные a_{ijkl} удовлетворяют условиям симметрии (2) и связаны с A_{ijkl} соотношениями

$$A_{ijkl}a_{klrs} = \delta_{ijrs} = \frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}),$$

$$a_{ijkl}A_{klrs} = \delta_{ijrs},$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тензор δ_{ijrs} играет роль единичного в пространстве симметричных тензоров вида (2).

При ортогональном преобразовании системы координат

(5) $$x_i = c_{ij}x'_j,\ x'_j = c_{ij}x_i,\ c_{ij}c_{kj} = \delta_{ik}$$

компоненты тензоров ε_{ij}, A_{ijkl} преобразуются по формулам

(6) $$\varepsilon_{ij} = c_{ik}c_{jl}\varepsilon'_{kl},\ \varepsilon'_{kl} = c_{ik}c_{jl}\varepsilon_{ij},$$

$$A_{ijkl} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}c_{ls}A'_{pqrs},$$

$$A'_{pqrs} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}c_{ls}A_{ijkl}.$$

За счет выбора трех свободных параметров c_{ij}, определяющих положение системы координат (5), можно число независимых компонент A_{ijkl}, характеризующих свойства упругости материала, уменьшить с 21 до 18 [4]. Для различных случаев симметрии в строении анизотропных материалов число независимых компонент A_{ijkl} еще уменьшается [1—4].

Вопросы, связанные с представлением закона Гука (3) в специальных базисах и выяснением пределов изменения постоянных A_{ijkl}, совместимых с положительной определенностью квадратичной формы (1), рассматривались в [3—8].

Ниже квадратичная форма (1) приводится к каноническому виду, что позволяет выяснить структуру постоянных A_{ijkl}. Предложена также новая классификация анизотропных материалов.

Возьмем шесть тензоров деформации t_{ijpq}. Здесь первые два индекса означают компоненты тензора, а два последних — номер тензора, причем тензоры с номерами (pq) и (qp) отождествляются. Таким образом, величины t_{ijpq} симметричны по каждой паре индексов:

$$t_{ijpq} = t_{jipq},\ t_{ijpq} = t_{ijqp},$$

и поэтому независимых величин t_{ijpq} только 36.

Составим теперь выражения

(7) $$\tilde{A}_{pqrs} = A_{ijkl}t_{ijpq}t_{klrs}.$$

По определению тензора A_{ijkl} (3) выражения $A_{ijkl}t_{klrs}$ представляют собой компоненты тензора напряжений σ_{ijrs}. Далее этот тензор свертывается с тензором t_{ijpq}:

$$A_{ijkl}t_{klrs}t_{ijpq} = \sigma_{ijrs}t_{ijpq}.$$

Аналогично (в силу симметрии тензора A_{ijkl}) имеем

$$A_{ijkl}t_{ijpq}t_{klrs} = \sigma_{klpq}t_{klrs}.$$

Таким образом, величины (7) представляют собой свертки соответствующих тензоров напряжений и деформаций, т. е. являются скалярами и инвариантны относительно ортогонального преобразования системы координат (5).

Выберем тензоры t_{ijpq} так, чтобы

$$t_{ijpq}t_{ijrs} = \delta_{pqrs}; \tag{8}$$

$$A_{ijkl}t_{ijpq}t_{klrs} = 0, \ (pq) \neq (rs). \tag{9}$$

Условия (8) означают ортонормированность (в смысле свертки) тензоров t_{ijpq}, а также ортогональность матрицы t_{ijrs}. Условия (9) означают, что тензоры напряжений σ_{ijrs}, σ_{klpq} соответствуют тензорам деформаций t_{klrs}, t_{ijpq} и пропорциональны им. Уравнений (8) суть 21, а уравнений (9) — 15, т. е. для 36 независимых величин t_{ijpq} имеем 36 уравнений (8), (9). Из (9) видно, что

$$\tilde{A}_{pqrs} = 0, \ (pq) \neq (rs). \tag{10}$$

Умножим обе части (7) на t_{mnpq}, t_{fgrs} и просуммируем по p, q, r, s:

$$A_{ijkl}t_{ijpq}t_{klrs}t_{mnpq}t_{fgrs} = \tilde{A}_{pqrs}t_{mnpq}t_{fgrs}. \tag{11}$$

Из (8) следует

$$t_{ijpq}t_{mnpq} = \delta_{ijmn}, \ t_{klrs}t_{fgrs} = \delta_{klfg}.$$

Теперь (11) принимает вид

$$A_{ijkl}\delta_{ijmn}\delta_{klfg} = A_{ijfg}\delta_{ijmn} = A_{mnfg} = \tilde{A}_{pqrs}t_{mnpq}t_{fgrs},$$

или, заменяя индексы $mnfg$ на $ijkl$, получим

$$A_{ijkl} = \tilde{A}_{pqrs}t_{ijpq}t_{klrs}, \ (pq) = (rs). \tag{12}$$

Здесь при суммировании учитываем (10). Таким образом, если задан тензор A_{ijkl}, то можно из уравнений (8), (9) определить t_{ijpq}, а затем по формулам (7) найти $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$. Если же заданы шесть чисел $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$ и 36 величин t_{ijpq}, связанных 21 соотношением (8), то по формуле (12) можно построить тензор A_{ijkl}, который зависит от шести величин $\tilde{A}_{pqrs}$ и 15 параметров t_{ijpq}, оставшихся свободными после выполнения условий (8).

Уравнения (8), (9) инвариантны относительно ортогонального преобразования системы координат (5). Формулы (12) также не меняют свою форму записи:

$$A'_{ijkl} = \tilde{A}_{pqrs}t'_{ijpq}t'_{klrs}, \quad (pq) = (rs)$$

(величины со штрихами определяются выражениями (6)).

Используя (12), найдем тензор напряжений, соответствующий тензору деформаций t_{klmn}:

$$A_{ijkl}t_{klmn} = \tilde{A}_{pqrs}t_{ijpq}t_{klrs}t_{klmn} = \tilde{A}_{pqrs}t_{ijpq}\delta_{rsmn} = \tilde{A}_{pqmn}t_{ijpq} = \begin{cases} \tilde{A}_{mnmn}t_{ijmn} & \text{при } m = n, \\ 2\tilde{A}_{mnmn}t_{ijmn} & \text{при } m \neq n \end{cases} \tag{13}$$

(по m, n не суммировать). Из (13) видно, что он пропорционален тензору деформаций:

$$A_{ijkl}t_{klmn} = \lambda t_{ijmn}, \tag{14}$$

а коэффициенты пропорциональности — величины $\lambda = \tilde{A}_{mnmn}$ при $m = n$ или $\lambda = 2\tilde{A}_{mnmn}$ при $m \neq n$. Перепишем (14)

$$(A_{ijkl} - \lambda\delta_{ijkl})t_{klmn} = 0. \tag{15}$$

Если (15) рассматривать как систему однородных линейных уравнений относительно t_{klmn}, то эта система имеет ненулевое решение в том случае, когда ее определитель равен нулю [9]:

$$|A_{ijkl} - \lambda\delta_{ijkl}| = 0. \tag{16}$$

Так как независимых уравнений в (15) только шесть и матрица коэффициентов в (15) симметрическая, то в определителе (16) 9-го порядка будут одинаковые строки и столбцы с индексами (ij), (ji), $i \neq j$, (kl), (lk), $k \neq l$, и поэтому определитель (16) 9-го порядка тождественно равен нулю. Определитель (16) следует рассматривать как определитель 6-го порядка, для этого в нем нужно вычеркнуть строки и столбцы с индексами $(ji) = (lk)$, $i \neq j$. В результате получим определитель 6-го порядка также с симметрической матрицей, а для λ уравнение 6-й степени, которое имеет шесть действительных корней [9].

Итак, уравнение (16) запишем в виде

$$
(17)\qquad \begin{vmatrix}
A_{11}^{11}-\lambda & A_{22}^{11} & A_{33}^{11} & \sqrt{2}A_{23}^{11} & \sqrt{2}A_{13}^{11} & \sqrt{2}A_{12}^{11} \\
A_{11}^{22} & A_{22}^{22}-\lambda & A_{33}^{22} & \sqrt{2}A_{23}^{22} & \sqrt{2}A_{13}^{22} & \sqrt{2}A_{12}^{22} \\
A_{11}^{33} & A_{22}^{33} & A_{33}^{33}-\lambda & \sqrt{2}A_{23}^{33} & \sqrt{2}A_{13}^{33} & \sqrt{2}A_{12}^{33} \\
\sqrt{2}A_{11}^{23} & \sqrt{2}A_{22}^{23} & \sqrt{2}A_{33}^{23} & 2A_{23}^{23}-\lambda & 2A_{13}^{23} & 2A_{12}^{23} \\
\sqrt{2}A_{11}^{13} & \sqrt{2}A_{22}^{13} & \sqrt{2}A_{33}^{13} & 2A_{23}^{13} & 2A_{13}^{13}-\lambda & 2A_{12}^{13} \\
\sqrt{2}A_{11}^{12} & \sqrt{2}A_{22}^{12} & \sqrt{2}A_{33}^{12} & 2A_{23}^{12} & 2A_{13}^{12} & 2A_{12}^{12}-\lambda
\end{vmatrix} = 0,
$$

где $A_{kl}^{ij} = A_{ijkl}$. Элементы матрицы (17) можно обозначить A_{ij}, где i, j изменяются уже от 1 до 6. Соответствие индексов видно из (17). Раскрывая определитель (17), получим уравнение 6-й степени относительно λ:

$$
(18)\qquad \lambda^6 - I_1\lambda^5 + I_2\lambda^4 - I_3\lambda^3 + I_4\lambda^2 - I_5\lambda + I_6 = 0,
$$

где коэффициенты I_k $(k = \overline{1, 6})$ — инварианты тензора модулей упругости A_{ijkl} и определяются по формулам [10, 11]

$$
I_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix}
s_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
s_2 & s_1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\
s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
s_k & s_{k-1} & . & . & . & & s_1
\end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 6},
$$

$$
s_1 = A_{ii},\ s_2 = A_{ij}A_{ji},\ s_3 = A_{ij}A_{jk}A_{ki},
$$
$$
s_4 = A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li},\ s_5 = A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{lm}A_{mi},
$$
$$
s_6 = A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{lm}A_{mn}A_{ni}.
$$

Здесь суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 6. Соответствующие корням уравнения (18) ненулевые решения системы (15) ортонормированы [9], т. е. удовлетворяются условия (8).

Таким образом, показано, что имеется две возможности для определения собственных значений и собственных тензоров линейного преобразования (3): 1) из уравнений (8), (9) определяем собственные тензоры t_{ijpq}, затем по формулам (7) — собственные значения $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$; 2) из характеристического уравнения (18) находим шесть собственных значений $\lambda = \tilde{A}_{mnmn}$ при $m = n$, $\lambda = 2\tilde{A}_{mnmn}$ при $m \neq n$, затем для каждого корня λ — ненулевое решение системы (15) так, чтобы выполнялись условия ортонормированности (8).

Из (7) видно, что собственные значения $\tilde{A}_{pqrs}$ представляют собой энергию деформации, соответствующую тензору деформаций t_{ijpq}, $(pq) = (rs)$. Но энергия деформации — положительно определенная квадратичная форма и при любом ненулевом тензоре деформаций положительна. Так как тензоры t_{ijpq} ненулевые, то собственные значения должны быть положительными:

$$
(19)\qquad \tilde{A}_{pqrs} > 0,\ (pq) = (rs).
$$

Подставим в энергию деформации (1) выражения (12) для коэффициентов A_{ijkl}:

(20) $$2\Phi = A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \tilde{A}_{pqrs}t_{ijpq}t_{klrs}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}.$$

Обозначим в (20)

(21) $$\tilde{\varepsilon}_{pq} = t_{ijpq}\varepsilon_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{rs} = t_{klrs}\varepsilon_{kl}.$$

С учетом (21) энергия деформации (20) записывается как

(22) $$2\Phi = A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \tilde{A}_{pqrs}\tilde{\varepsilon}_{pq}\tilde{\varepsilon}_{rs}, \quad (pq) = (rs).$$

Из (22) видно, что энергия деформации представляется в виде суммы квадратов переменных $\tilde{\varepsilon}_{pq}$, $(pq) = (rs)$ с положительными коэффициентами. Поэтому формулы (21) представляют собой ортогональное преобразование переменных ε_{ij} к переменным $\tilde{\varepsilon}_{pq}$ (матрица преобразования t_{ijpq} ортогональна в силу (8)). Это преобразование приводит квадратичную форму энергии деформации (1) к каноническому виду (22). Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа ее матрицы были положительны [10]. Таким образом, квадратичная форма энергии деформации (22) положительно определена, так как в данном случае имеют место условия (19).

В силу ортогональности матрицы t_{ijpq} обратное преобразование соотношений (21) следующее:

(23) $$\varepsilon_{ij} = t_{ijpq}\tilde{\varepsilon}_{pq}.$$

Формулы (21) показывают, что переменные $\tilde{\varepsilon}_{pq}$ есть свертка двух тензоров t_{ijpq} и ε_{ij}, т. е. инварианты (скаляры) относительно ортогонального преобразования системы координат (5). Из (23) видно, что $\tilde{\varepsilon}_{pq}$ — коэффициенты разложения тензора ε_{ij} по собственным тензорам t_{ijpq}.

Итак, показано, что независимо от выбора ортогональной системы координат энергия деформации имеет вид

(24) $$2\Phi = \tilde{A}_{pqrs}\tilde{\varepsilon}_{pq}\tilde{\varepsilon}_{rs}, \quad (pq) = (rs)$$

и определяется 12 инвариантными величинами: шестью собственными значениями $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$ и шестью переменными $\tilde{\varepsilon}_{pq}$, $(pq) = (qp)$. Величины $\tilde{\varepsilon}_{pq}$ зависят от собственных тензоров t_{ijpq} и тензора деформаций ε_{ij} (см. (21)) и в силу произвольности тензора деформаций ε_{ij} могут быть любыми. При фиксированных значениях $\tilde{\varepsilon}_{pq}$ (например, одинаковых значениях для двух материалов) анизотропные материалы будут различаться только значениями $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$. Таким образом, в смысле энергии деформации (24) анизотропный материал полностью характеризуется шестью величинами $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$, они не зависят от выбора ортогональной системы координат и их можно назвать собственными модулями упругости.

Закон Гука (3) запишем в инвариантной форме. Подставим в (3) выражение (12):

(25) $$\sigma_{mn} = \tilde{A}_{pqrs}t_{mnpq}t_{klrs}\varepsilon_{kl} = \tilde{A}_{pqrs}t_{mnpq}\tilde{\varepsilon}_{rs}.$$

Умножаем (25) на t_{mnij} и суммируем по m, n:

(26) $$t_{mnij}\sigma_{mn} = \tilde{A}_{pqrs}t_{mnij}t_{mnpq}\tilde{\varepsilon}_{rs} = \tilde{A}_{pqrs}\delta_{ijpq}\tilde{\varepsilon}_{rs} = \tilde{A}_{ijrs}\tilde{\varepsilon}_{rs}.$$

Обозначим в левой части (26)

(27) $$\tilde{\sigma}_{ij} = t_{mnij}\sigma_{mn}.$$

Преобразование (27) полностью соответствует соотношениям (21). Обратное к (27) преобразование аналогично (23):

$$\sigma_{mn} = t_{mnij}\tilde{\sigma}_{ij}.$$

Используя (27), из (26) получаем запись закона Гука в инвариантной форме, не зависящей от выбора ортогональной системы координат:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{A}_{ijrs}\tilde{\varepsilon}_{rs}, \quad (rs) = (ij). \tag{28}$$

Запишем (28) подробнее:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{A}_{1111}\tilde{\varepsilon}_{11}, \quad \tilde{\sigma}_{12} = \tilde{A}_{1212}\tilde{\varepsilon}_{12} + \tilde{A}_{1221}\tilde{\varepsilon}_{21},$$
$$\tilde{\sigma}_{13} = \tilde{A}_{1313}\tilde{\varepsilon}_{13} + \tilde{A}_{1331}\tilde{\varepsilon}_{31},$$
$$\tilde{\sigma}_{21} = \tilde{A}_{2112}\tilde{\varepsilon}_{12} + \tilde{A}_{2121}\tilde{\varepsilon}_{21}, \quad \tilde{\sigma}_{22} = \tilde{A}_{2222}\tilde{\varepsilon}_{22},$$
$$\tilde{\sigma}_{23} = \tilde{A}_{2323}\tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{A}_{2332}\tilde{\varepsilon}_{32}, \quad \tilde{\sigma}_{31} = \tilde{A}_{3113}\tilde{\varepsilon}_{13} + \tilde{A}_{3131}\tilde{\varepsilon}_{31},$$
$$\tilde{\sigma}_{32} = \tilde{A}_{3223}\tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{A}_{3232}\tilde{\varepsilon}_{32}, \quad \tilde{\sigma}_{33} = \tilde{A}_{3333}\tilde{\varepsilon}_{33}.$$

Закон Гука (28) можно обратить:

$$\tilde{\varepsilon}_{rs} = \tilde{a}_{rskl}\tilde{\sigma}_{kl}, \quad (kl) = (rs); \tag{29}$$

$$\tilde{A}_{ijrs}\tilde{a}_{rskl} = \delta_{ijkl}, \quad (rs) = (ij), \quad (kl) = (rs); \tag{30}$$

$$\tilde{a}_{1111} = \frac{1}{\tilde{A}_{1111}}, \quad \tilde{a}_{2222} = \frac{1}{\tilde{A}_{2222}}, \quad \tilde{a}_{3333} = \frac{1}{\tilde{A}_{3333}}, \tag{31}$$
$$2\tilde{a}_{2323} = \frac{1}{2\tilde{A}_{2323}}, \quad 2\tilde{a}_{1313} = \frac{1}{2\tilde{A}_{1313}}, \quad 2\tilde{a}_{1212} = \frac{1}{2\tilde{A}_{1212}}.$$

Умножим (29) на t_{ijrs} и просуммируем по r, s:

$$t_{ijrs}\tilde{\varepsilon}_{rs} = \tilde{a}_{rskl}t_{ijrs}\tilde{\sigma}_{kl}. \tag{32}$$

С учетом (23), (27) соотношения (32) записываются в виде

$$\varepsilon_{ij} = \tilde{a}_{rskl}t_{ijrs}t_{mnkl}\sigma_{mn}. \tag{33}$$

Сравнивая (33) с (4), получаем

$$a_{ijmn} = \tilde{a}_{rskl}t_{ijrs}t_{mnkl}, \quad (rs) = (kl). \tag{34}$$

Таким образом, матрица (34) обратная для матрицы A_{ijkl} (12), причем $\tilde{a}_{rskl}$ связаны с $\tilde{A}_{pqrs}$ формулами (30) или (31).

Так как собственные модули упругости $\tilde{A}_{pqrs}$, $(pq) = (rs)$ (корни уравнения (18)) можно нумеровать произвольно, то занумеруем их следующим образом:

$$\tilde{A}_{1111} \geqslant \tilde{A}_{2222} \geqslant \tilde{A}_{3333} \geqslant 2\tilde{A}_{2323} \geqslant 2\tilde{A}_{1313} \geqslant 2\tilde{A}_{1212} > 0, \tag{35}$$
$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \lambda_4 \geqslant \lambda_5 \geqslant \lambda_6 > 0.$$

Соответствие обозначений в (35) очевидно.

Используя вторые обозначения (35), выпишем компоненты тензоров модулей упругости (12) и коэффициентов податливости (34):

$$A_{ijkl} = \lambda_1 t_{ij11}t_{kl11} + \lambda_2 t_{ij22}t_{kl22} + \lambda_3 t_{ij33}t_{kl33} + \lambda_4(t_{ij23}t_{kl23} + t_{ij32}t_{kl32}) + \lambda_5(t_{ij13}t_{kl13} + t_{ij31}t_{kl31}) + \lambda_6(t_{ij12}t_{kl12} + t_{ij21}t_{kl21}), \tag{36}$$

$$a_{ijkl} = \frac{1}{\lambda_1}t_{ij11}t_{kl11} + \frac{1}{\lambda_2}t_{ij22}t_{kl22} + \frac{1}{\lambda_3}t_{ij33}t_{kl33} + \frac{1}{\lambda_4}(t_{ij23}t_{kl23} + t_{ij32}t_{kl32}) + \frac{1}{\lambda_5}(t_{ij13}t_{kl13} + t_{ij31}t_{kl31}) + \frac{1}{\lambda_6}(t_{ij12}t_{kl12} + t_{ij21}t_{kl21}).$$

Итак, для любого материала тензоры модулей упругости и коэффициентов податливости задаются формулами (36), (8), (35), опираясь на которые, можно классифицировать анизотропные материалы в зависимости от числа различных собственных модулей λ_k и их кратностей.

Каждому материалу поставим в соответствие символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, причем $k \leqslant 6$, $\alpha_k \geqslant 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 6$. Здесь k — число различных собственных модулей λ_i, α_i — их кратности. Материалы разбиваются на группы (классы) по числу различных собственных модулей λ_i. Таких групп шесть, они подразделяются еще на подклассы в зависимости от кратности собственных модулей. Выпишем для этих групп и подклассов их символы и соотношения между собственными модулями (35):

I. $\{6\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$;

II. 1. $\{1, 5\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
2. $\{2, 4\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
3. $\{3, 3\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
4. $\{4, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
5. $\{5, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$;

III. 1. $\{1, 1, 4\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
2. $\{1, 2, 3\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
3. $\{1, 3, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
4. $\{1, 4, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
5. $\{2, 1, 3\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
6. $\{2, 2, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
7. $\{2, 3, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
8. $\{3, 1, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
9. $\{3, 2, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
10. $\{4, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$;

IV. 1. $\{1, 1, 1, 3\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$,
2. $\{1, 1, 2, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
3. $\{1, 1, 3, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
4. $\{1, 2, 1, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
5. $\{1, 2, 2, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
6. $\{1, 3, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$,
7. $\{2, 1, 1, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
8. $\{2, 1, 2, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
9. $\{2, 2, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$,
10. $\{3, 1, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$;

V. 1. $\{1, 1, 1, 1, 2\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6$,
2. $\{1, 1, 1, 2, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6$,
3. $\{1, 1, 2, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$,
4. $\{1, 2, 1, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$,
5. $\{2, 1, 1, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$;

VI. $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\} \leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$.

Из этих соотношений видно, что все материалы разбиваются на 32 класса ($1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$) и каждому классу однозначно соответствует символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, который характеризует структуру материала. Причем порядок следования цифр в символе существен. При перестановке цифр в символе получаем материал другого класса, т. е. с другой внутренней структурой.

Более детальная классификация анизотропных материалов должна производиться в зависимости от вида собственных тензоров t_{ijpq}.

Для материалов, например, с символами $\{6\}$, $\{1, 5\}$, $\{5, 1\}$ модули упругости (36) принимают вид

$$A_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ijkl}; \tag{37}$$

$$A_{ijkl} = (\lambda_1 - \lambda_2) t_{ij11} t_{kl11} + \lambda_2 \delta_{ijkl}; \tag{38}$$

$$A_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ijkl} - (\lambda_1 - \lambda_6) 2 t_{ij12} t_{kl12}; \tag{39}$$

причем в силу (8)

$$t_{ij11} t_{ij11} = 1, \ t_{ij12} t_{ij12} = 1/2. \tag{40}$$

Материал с модулями упругости (37) можно назвать изотропным, так как A_{ijkl} не зависят от выбора ортогональной системы координат и определяются только одним собственным модулем упругости λ_1, при этом напряжения $\sigma_{ij} = \lambda_1 \varepsilon_{ij}$. Материал, традиционно называемый изотропным,— частный случай материала вида (38).

Так как выбор системы координат произволен, то будем считать, что система координат главная для тензоров t_{ij11}, t_{ij12}. Обозначим главные значения этих тензоров соответственно α, β, γ; $\alpha/\sqrt{2}$, $\beta/\sqrt{2}$, $\gamma/\sqrt{2}$. Тогда условия (40) сводятся к

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{41}$$

Теперь модули упругости (38), (39) записываются как

$$A_{ijkl} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha\delta_{i1}\delta_{j1} + \beta\delta_{i2}\delta_{j2} + \gamma\delta_{i3}\delta_{j3}) \times \times (\alpha\delta_{k1}\delta_{l1} + \beta\delta_{k2}\delta_{l2} + \gamma\delta_{k3}\delta_{l3}) + \lambda_2 \delta_{ijkl}; \tag{42}$$

$$A_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ijkl} - (\lambda_1 - \lambda_6)(\alpha\delta_{i1}\delta_{j1} + \beta\delta_{i2}\delta_{j2} + + \gamma\delta_{i3}\delta_{j3})(\alpha\delta_{k1}\delta_{l1} + \beta\delta_{k2}\delta_{l2} + \gamma\delta_{k3}\delta_{l3}). \tag{43}$$

Видно, что материалы (42), (43) характеризуются четырьмя параметрами: двумя собственными модулями упругости и двумя параметрами (41). Отличие (43) от (42) в том, что в (43) перед $(\lambda_1 - \lambda_6)$ стоит знак минус. Это материалы разной внутренней структуры.

Если взять тензоры t_{ij11}, t_{ij12} шаровыми, т. е. положить $\alpha = \beta = \gamma = \pm 1/\sqrt{3}$, то (42), (43) принимают вид

$$A_{ijkl} = (1/3)(\lambda_1 - \lambda_2)\delta_{ij}\delta_{kl} + \lambda_2 \delta_{ijkl}; \tag{44}$$

$$A_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ijkl} - (1/3)(\lambda_1 - \lambda_6)\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{45}$$

Материалы (44), (45) изотропны в том смысле, что A_{ijkl} не зависят от выбора ортогональной системы координат, но определяются двумя собственными модулями упругости. Если в (44) обозначить $(\lambda_1 - \lambda_2)/3 = \lambda$, $\lambda_2 = 2\mu$, то придем к традиционной записи модулей упругости изотропного материала.

Материалы (44), (45) часто принимают за один, что проявляется в вопросе о пределах значений коэффициента Пуассона ν [1, с. 114; 4, с. 25; 12, с. 100; 13, с. 117; 14, с. 256]. Но это качественно различные материалы, принадлежащие классам с разными структурными символами: {1, 5} и {5, 1}. Найдем для (44), (45) коэффициенты Пуассона:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{a_{2211}}{a_{1111}} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{1}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2}; \tag{46}$$

$$\nu = -\frac{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_6}\right)}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_6}\right)} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_6}{\lambda_1 + 2\lambda_6}. \tag{47}$$

Так как $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > \lambda_6 > 0$, то из (46), (47) видно, что для (44), (45) соответственно коэффициенты Пуассона лежат в пределах:

$$0 < \nu < 1/2; \tag{48}$$

$$(49) \qquad -1 < \nu < 0.$$

Таким образом, материал (44) традиционный изотропный, и для него коэффициент Пуассона в пределах (48). Материал (45) качественно другой: при растяжении стержня в продольном направлении он увеличивается в поперечных размерах; для него коэффициент Пуассона в пределах (49).

Для (37) $\nu = 0$. Класс материалов (37) как бы лежит между классом материалов (44), сокращающихся в поперечнике при продольном растяжении стержня, и классом материалов (45), расширяющихся в поперечнике при тех же условиях.

Во многих руководствах по теории упругости [1, с. 114; 4, с. 25; 12, с. 100; 14, с. 256] говорится, что в опытах не обнаружено материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона. В [5] рекомендуется для разыскания материалов с отрицательным ν проводить опыты при очень низких температурах, близких к абсолютному нулю, а также дается ссылка на опыты, в которых $\nu = -0{,}102$.

Приведенные примеры показывают полезность предложенной классификации упругих материалов. В дальнейшем следует изучить все 32 класса упругих материалов более детально. В [15—17] предлагается аналогичный подход к выяснению структуры обобщенного закона Гука. В [16] собственные тензоры t_{ijpq} построены в общем виде в зависимости от 15 произвольных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляв А.** Математическая теория упругости.— М.— Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
2. **Новацкий В.** Теория упругости.— М.: Мир, 1975.
3. **Новожилов В. В.** Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
5. **Бехтерев П.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы.— Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленинград. ун-те. Часть физ., 1925, т. 57, вып. 3—4.
6. **Бехтерев П. В.** Определяющие коэффициенты упругости и деформаций с приложением к изотропии.— ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.
7. **Черных К. Ф.** Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
8. **Новожилов В. В., Черных К. Ф.** Об упругих постоянных линейной теории упругости.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982.
9. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры.— М.: Физматгиз, 1962.
10. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1966.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1968.
12. **Папкович П. Ф.** Теория упругости.— Л.— М.: Оборонгиз, 1939.
13. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
14. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
15. **Рыхлевский Я.** О законе Гука.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3.
16. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1984, вып. 66.
17. **Чанышев А. И.** О пластичности анизотропных сред.— ПМТФ, 1984, № 2.

Поступила 2/II 1984 г.

УДК 548.571

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ОДНОСКОРОСТНОМ ПОТОКЕ ДИСЛОКАЦИЙ

Ш. Х. Ханнанов

(Уфа)

Известные трудности в теории пластичности связаны с тем, что для пластических дисторсий β^P_{ik} [1] в отличие от упругих β_{ik} не существует простых конечных соотношений типа закона Гука [2]. Это обусловлено зависимостью β^P_{ik} от истории нагружения. В классических теориях пластичности принимаются различного вида определяющие соотношения, которые являются обобщениями эмпирических зависимостей, полученных при испытании макроскопических образцов [2].