

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.83+539.4

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ВЯЗКОСТИ СМЕСИ ПРОППАНТ – ЖИДКОСТЬ, ИСПОЛЪЗУЕМОЙ ПРИ ГИДРОРАЗРЫВЕ

В. А. Кузькин^{1,2,3}, А. М. Кривцов^{1,2,3}, А. М. Линьков^{1,3}

¹Политехнический университет Жешува,
ал. Повстанцев Варшавы, 12, 35-959, Жешув, Польша

²Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
ул. Политехническая, д. 29, 195251, г. Санкт-Петербург, Россия

³Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН),
Большой проспект, В.О., д. 61, 199178, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kuzkinva@gmail.com

Представлены результаты моделирования эффективной вязкости смеси проппант – жидкость, используемой при гидроразрыве пласта. Результаты, полученные двумя численными методами (динамики частиц и гидродинамики сглаженных частиц), совпадают в пределах стандартного отклонения. Дана аналитическая зависимость эффективной вязкости от концентрации проппанта, которая может служить для численного моделирования гидроразрыва.

Проппант, гидроразрыв, эффективные свойства, вязкость, суспензия, метод динамики частиц, метод гидродинамики сглаженных частиц

Гидравлический разрыв часто используют для повышения эффективности добычи нефти и газа [1]. Первая математическая модель гидроразрыва предложена С. А. Христиановичем и Ю. П. Желтовым [2, 3]. Обзор дальнейшего развития аналитических и численных методов моделирования гидроразрыва приведен в работах [4–11]. Во всех исследованиях и известных программах, используемых для моделирования конечной стадии гидроразрыва, смесь проппант – жидкость заменяется однофазной жидкостью. Наличие проппанта учитывается путем введения зависимости эффективной плотности и эффективной вязкости однофазной жидкости от концентрации проппанта (см., например, [6]). Определение эффективной плотности не вызывает трудностей. Что же касается эффективной вязкости, ее задание представляет непростую задачу. Как отмечено в [6], нахождение “вязкости суспензии — это один из наиболее сложных и важных аспектов моделирования. При корректном описании системы частиц в жидкости в уравнении баланса импульса появляются члены, отвечающие за взаимодействие между частицами и между час-

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского агентства исследований (FP7-PEOPLE-2009-IAPP Marie Curie IAPP, проект HYDROFRAC, No. 251475).

тицами и жидкостью. Детальное описание этих эффектов представляет сложную задачу, и большинство моделей, используемых для ее решения, нуждаются в экспериментальном подтверждении.” [Пер. с англ.]

Имеется множество моделей, описывающих зависимость эффективной вязкости μ_s от концентрации частиц c . Асимптотическое поведение вязкости при малых концентрациях описано Эйнштейном [12]:

$$\mu_s = \mu_s(0)(1 + Ac), \quad (1)$$

где $A = 5/2$ в трехмерном случае и $A = 2$ — в двумерном [13]. Формула (1) неприменима при больших концентрациях пропантанта, так как при ее выводе не учитывались гидродинамические взаимодействия между частицами. Более сложные модели предложены в работах Муни [14], Марона–Пирса [15] и Кригера–Доугерти [16]:

$$\mu_s^M = \mu_s(0) \exp \frac{Ac}{1 - c/c_*}, \quad (2)$$

$$\mu_s^{MP} = \frac{\mu_s(0)}{(1 - c/c_*)^2}, \quad (3)$$

$$\mu_s^{KD} = \frac{\mu_s(0)}{(1 - c/c_*)^{Ac_*}}, \quad (4)$$

где c_* — параметр модели, имеющий смысл критической концентрации; A — коэффициент в формуле Эйнштейна (1). Формула (4) используется, например, в [6] для моделирования течения смеси пропант–жидкость в трещинах гидроразрыва. Отметим, что зависимости (2)–(4) вязкости от концентрации пропантанта существенно различаются. Возникает проблема выбора оптимальной модели. Согласно обзору, проведенному в работе [17], существующие модели основываются либо на аналитических выкладках, либо на аппроксимации экспериментальных данных. Очевидно, оба подхода имеют свои ограничения. При построении аналитических моделей, как правило, используются предположения, имеющие ограниченную область применимости. Проблемы, возникающие при проведении физических экспериментов, обсуждаются в работе [18].

В такой ситуации важным методом исследования становится компьютерное моделирование. Решение уравнений Навье–Стокса для суспензии классическими методами вычислительной гидродинамики требует огромных вычислительных ресурсов. Поэтому применяют альтернативные методы, такие как стоковская динамика [19], динамика диссипативных частиц [20], гидродинамика сглаженных частиц [21], молекулярная динамика [22], метод решеточных уравнений Больцмана [23] и др.

В данной работе используются метод динамики частиц (МДЧ) [24, 25] и метод гидродинамики сглаженных частиц (МГСЧ, от англ. Smoothed Particle Hydrodynamics) [26–28]. Основным преимуществом МДЧ является простота и малое число параметров. Однако при этом в МДЧ вязкость жидкости не может быть задана явно. В МГСЧ вязкость несущей жидкости задается как параметр модели. Однако особенности уравнений МГСЧ нередко приводят к появлению численных артефактов [28]. Совместное применение данных методов повышает надежность получаемых результатов и позволяет лучше понять процессы, происходящие при течении суспензии.

Моделирование течения суспензии в тонком канале двумя взаимодополняющими методами начато в статье [29], где получены значения эффективной вязкости суспензии для концентраций пропантанта менее 0.3. Показано, что для моделирования больших концентраций требуется существенное увеличение степеней свободы модели. В данной работе путем увеличения числа

степеней свободы удается достичь концентрации 0.6, близкой к критической. Результаты моделирования используются для сравнения аналитических моделей (2)–(4). Делается заключение, что модель Марона–Пирса (3) при $c_*^{MP} = 0.77$ наилучшим образом описывает полученные результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматривается течение ньютоновской жидкости в канале постоянного сечения. В качестве модели канала используется квадратная расчетная область с периодическими граничными условиями [25] по направлению течения и жесткими стенками в ортогональном направлении. Жесткие стенки моделируются двумя фиксированными слоями частиц. Течение происходит под действием постоянной массовой силы, направленной вдоль потока. В работе [29] показано, что такая постановка эквивалентна заданию постоянного градиента давления. При этом задание массовой силы существенно проще с точки зрения программной реализации.

В начальный момент времени частицы жидкости образуют правильную квадратную решетку. Расстояние между ближайшими частицами равно a_0 . Частицы пропанта либо располагаются случайно (для концентраций $c \leq 0.4$), либо формируют квадратную решетку (для $c > 0.4$). Объемная концентрация пропанта c определяется формулой

$$c = \frac{\pi R^2 N_p}{L^2},$$

где L — размер расчетной области; N_p — число частиц пропанта; R — радиус частицы пропанта.

Начальное распределение скоростей частиц соответствует течению Пуазейля ньютоновской жидкости. В случае МДЧ частицам дополнительно сообщаются случайные скорости. Наличие пропанта увеличивает эффективную вязкость суспензии. В результате начальный параболический профиль скорости меняется вплоть до достижения стационарного режима. В ходе моделирования методами динамики частиц и гидродинамики сглаженных частиц вычисляется скорость центра масс v_{av} всех частиц в расчетной области. В стационарном режиме скорость v_{av} равна среднему значению на профиле скорости. Эффективная вязкость и эффективная плотность суспензии определяются по формулам [26]:

$$\mu_s = \frac{\rho_s g L^2}{12 v_{av}}, \quad \rho_s = \frac{m N_f + m_p N_p}{L^2}, \quad (5)$$

где g — модуль массовой силы; m — масса частицы жидкости; N_f — число частиц жидкости; m_p — масса частицы пропанта. Уравнение (5) соответствует течению Пуазейля под действием массовой силы g . Массовая сила рассчитывается таким образом, чтобы величина $\rho_s g$ не зависела от концентрации пропанта. В таком случае единственный параметр в первой из формул (5), зависящий от концентрации, — средняя скорость v_{av} . Эта величина вычисляется в ходе моделирования и согласно (5) определяет эффективную вязкость.

Метод динамики частиц. В рамках метода динамики частиц жидкость и пропант представляются совокупностью взаимодействующих частиц [24, 25], для которых численно решается система уравнений движения. В данной работе для численного интегрирования используется симплектический метод “leap-frog” [30]. Взаимодействия между частицами описываются посредством сплайнового потенциала [25]. Сила взаимодействия частиц i и j вычисляется по формулам

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{fk(r_{ij})}{a} \left(\left(\frac{a}{r_{ij}} \right)^8 - \left(\frac{a}{r_{ij}} \right)^{14} \right) \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i,$$

$$k(r) = \begin{cases} 1, & r < b, \\ \left(1 - \left(\frac{r^2 - b^2}{a_{cut}^2 - b^2} \right)^2 \right)^2, & b \leq r \leq a_{cut}, \\ 0, & r > a_{cut} \end{cases} \quad (6)$$

где a_{cut} — радиус обрезания; a — равновесное расстояние; f — параметр взаимодействия; $b = (13/7)^{1/6} a$. Каждая частица проппанта моделируется совокупностью частиц, жестко соединенных друг с другом [29] (рис. 1). Таким образом, частица проппанта представляет собой твердое тело с двумя поступательными и одной вращательной степенями свободы. Расстояние между частицами на внешнем круге равно равновесному расстоянию между частицами жидкости a . Расстояние между внешним и внутренним кругом также равно a . Частицы, показанные на рис. 1, взаимодействуют с частицами жидкости согласно (6).

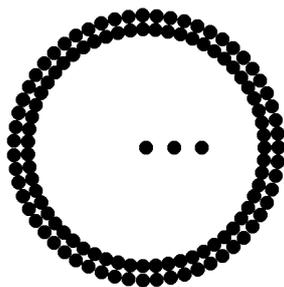


Рис. 1. Представление частицы проппанта в виде совокупности жестко связанных частиц. Три частицы в центре используются для визуализации ориентации

Отметим, что взаимодействия с жидкостью приводят как к перемещению, так и к повороту частиц проппанта. Поэтому уравнения движения частицы проппанта i имеют вид

$$m_p \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{\substack{k \in \Lambda_i, \\ j \notin \Lambda_i}} \mathbf{F}_{kj} + m_p \mathbf{g}, \quad \Theta_p \ddot{\varphi}_i = \sum_{\substack{k \in \Lambda_i, \\ j \notin \Lambda_i}} ((\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{kj}) \cdot \mathbf{n}, \quad (7)$$

где m_p , Θ_p — масса частицы проппанта и ее момент инерции относительно центра масс соответственно; φ_i — угол поворота; \mathbf{n} — нормаль к плоскости моделирования; Λ_i — множество индексов частиц, представляющих частицу проппанта i ; \mathbf{g} — массовая сила. В работе [29] показано, что такой подход более эффективен с вычислительной точки зрения, чем использование для проппанта и жидкости сферических частиц разного размера.

При моделировании МДЧ свойства жидкости зависят от используемого числа частиц. Рассмотрим две дискретные системы с индексами 0 и 1, соответствующие одному и тому же объему жидкости, но содержащие разное число частиц (N_0 и N_1). Определим связь между параметрами дискретных систем 0 и 1. Предполагая, что геометрические размеры системы, плотность и скорость звука $v_s = \sqrt{6fa/m}$ не зависят от числа частиц, получим

$$a_1 = \sqrt{\frac{N_0}{N_1}} a_0, \quad m_1 = \frac{N_0}{N_1} m_0, \quad f_1 = \sqrt{\frac{N_0}{N_1}} f_0, \quad (8)$$

где a_i , m_i , f_i ($i = 0, 1$) — равновесное расстояние, масса частицы и параметр взаимодействия (6) для системы i . В работе [29] показано, что при выполнении соотношений (8) вязкости дискретных систем 0 и 1 связаны следующим образом:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{N_0}{N_1}} \mu_0.$$

Видно, что вязкость системы убывает с ростом числа частиц. Аналогичной зависимости для числа Рейнольдса удается избежать путем масштабирования массовой силы (см. [29]):

$$g_1 = \frac{N_0}{N_1} g_0.$$

Данная процедура исключает зависимость основных параметров задачи (размера системы, плотности, скорости звука и числа Рейнольдса) от числа частиц.

Для отвода тепла, выделяющегося в результате сдвигового течения, используется термостат Берендсена [31]. Термостат применяется к узкой полоске жидкости шириной $5a$ рядом с левой периодической границей расчетной области. В результате нагретая жидкость, проходящая через правую периодическую границу, попадает в термостат и охлаждается.

Метод гидродинамики сглаженных частиц. Второй метод, используемый в данной работе для моделирования течения смеси проппант–жидкость, — метод гидродинамики сглаженных частиц [26–28]. Как и в МДЧ, в рамках МГСЧ жидкость представляется совокупностью взаимодействующих частиц. Уравнения движения сглаженных частиц имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}}_i = - \sum_j m \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + S_{ij} \right) w'(r_{ij}) \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{g}, \quad \rho_i = \sum_j m w(r_{ij}),$$

где p_i , ρ_i — давление и плотность в точке, где находится частица i ; S_{ij} — слагаемое, отвечающее за вязкость; $w(r)$ — весовая функция, равная нулю при $r \geq a_{cut}$, a_{cut} — расстояние сглаживания (параметр, аналогичный радиусу обрезания в МДЧ). В данной работе используется весовая функция Люси [26]:

$$w(r) = \frac{5}{\pi a_{cut}^2} \left(1 + 3 \frac{r}{a_{cut}} \right) \left(1 - \frac{r}{a_{cut}} \right)^3, \quad r \in [0; a_{cut}].$$

Для давления p_i и вязкого слагаемого S_{ij} используются следующие определяющие соотношения, предложенные Монаганом [27]:

$$p_i = B \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad S_{ij} = - \frac{16 \mu_i \mu_j}{\rho_i \rho_j (\mu_i + \mu_j)} \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij}^2 + \varepsilon a^2)}, \quad \mu_i = \frac{1}{8} \alpha a_{cut} v_s \rho_i, \quad \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i. \quad (9)$$

Здесь ρ_0 — равновесная плотность жидкости; B , α , γ , ε — параметры модели; a — характерный размер частицы; v_s — скорость звука. В работе [27] показано, что уравнения (9) гарантируют малую сжимаемость жидкости. В отличие от МДЧ, где вязкость возникает как следствие хаотического движения частиц, в МГСЧ вязкость вводится явно. Для устранения численных артефактов, описанных, например, в работе [24], дополнительно вводится отталкивающий парный потенциал

$$\Phi_{core}(r) = \frac{fa_{core}}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a_{core}^2} \right)^4,$$

где a_{core} — радиус обрезания для данного потенциала. Взаимодействия проппант–проппант и проппант–жидкость описываются согласно (6). При этом для описания отталкивания между частицами проппанта используется радиус обрезания, равный a . Движение проппанта определяется уравнениями (7).

Рассмотрим задание начальных условий. Жидкость с определяющим уравнением в форме (9) практически несжимаема. Следовательно, расчетная область должна быть полностью заполнена частицами. В противном случае образуются искусственные пустоты, подобные пузырям газа. Для решения данной проблемы вводится следующая процедура: задаются начальные положения частиц проппанта, оставшееся пространство заполняется частицами жидкости, формирующими идеальную квадратную решетку. В таком случае образуются пустоты вокруг частиц проппанта. Для того чтобы убрать пустоты, система сжимается путем умножения равновесной плотности ρ_0 на 0.8. Затем плотность медленно увеличивается до тех пор, пока давление в системе не станет меньше $0.01K$, где K — модуль объемного сжатия жидкости. При этом проппант движется в соответствии с уравнениями движения, описанными выше. Результирующее распределение частиц проппанта и жидкости показано на рис. 2б. Видно, что расчетная область полностью заполнена частицами.

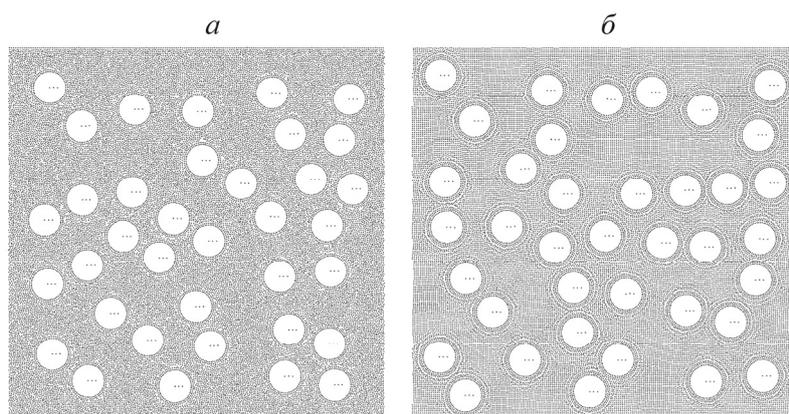


Рис. 2. Распределение частиц проппанта и жидкости для $c = 0.3$: *a* — метод динамики частиц; *б* — метод гидродинамики сглаженных частиц

После создания начальной конфигурации частицам сообщаются скорости, соответствующие течению Пуазейля.

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Основными безразмерными параметрами, влияющими на относительную вязкость $\mu_s / \mu_s(0)$, являются число Рейнольдса Re , отношение диаметра проппанта к ширине канала и отношение плотности проппанта к плотности несущей жидкости. Подберем параметры модели таким образом, чтобы их значения соответствовали течению смеси проппант–жидкость в трещинах гидроразрыва. На практике часто используют проппант размером 20/40 меш (0.4–0.8 мм). Раскрытие трещины при гидроразрыве имеет порядок 10 мм. Для оценки числа Рейнольдса предположим, что для гидроразрыва используется вода с плотностью 1000 кг/м^3 и динамической вязкостью $0.0009 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Характерная скорость потока составляет 0.01 м/с . Следовательно, число Рейнольдса

порядка 1. При численном моделировании точное значение числа Рейнольдса не имеет значения. Важно только, чтобы поток оставался ламинарным. Следовательно, при моделировании число Рейнольдса может быть увеличено как минимум на порядок для ускорения расчетов. В результате в данной работе при моделировании обоими методами приняты следующие безразмерные значения параметров:

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{20}, \quad \frac{\rho_p}{\rho_f} = 2, \quad Re \approx 30, \quad v_s = 2.45, \quad m = 0.09, \quad a = 0.3, \quad f = 0.3,$$

где L — размер расчетной области; R — радиус частицы проппанта; ρ_f, ρ_p — плотности жидкости и проппанта соответственно; v_s — скорость звука. Масса частицы жидкости, равновесное расстояние и константа взаимодействия (6) равны: $m = 0.09, a = 0.3, f = 0.3$ для $c \leq 0.3$ и $m = 0.04, a = 0.2, f = 0.2$ для $c > 0.3$.

В рамках МДЧ взяты следующие значения параметров:

$$\frac{T}{fa} = 0.125, \quad \frac{a_{cut}}{a} = 2.1, \quad \frac{\Delta t}{t_*} = 0.01, \quad \frac{a_0}{a} = 0.98, \quad \frac{v_0}{v_s} = 0.14, \quad \frac{mg}{f} = 2.58 \cdot 10^{-5},$$

где T — температура (кинетическая энергия); Δt — шаг интегрирования; $t_* = 2\pi\sqrt{ma/6f}$; a_0 — начальное расстояние между частицами жидкости; v_0 — амплитуда случайных начальных скоростей частиц.

При моделировании методом гидродинамики сглаженных частиц используются следующие значения параметров:

$$\frac{B}{\rho_0 v_s^2} = \frac{1}{7}, \quad \alpha = 0.5, \quad \frac{\beta}{a_{cut} v_s} = 0.23, \quad \gamma = 7, \quad \varepsilon = 0.001, \quad \frac{a_{core}}{a} = 0.95,$$

$$\frac{a_{cut}}{a} = 2.5, \quad \frac{\Delta t}{t_*} = 0.02, \quad \frac{a_0}{a} = 1, \quad \frac{v_0}{v_s} = 0.01, \quad \frac{mg}{f} = 6 \cdot 10^{-5}.$$

Моделирование проводилось на кафедре “Теоретическая механика” Санкт-Петербургского государственного политехнического университета на суперкомпьютере КС-ЭВМ-1ТФ, имеющем 144 ядра и пиковую производительность 1 Тфлопс. Примерное число частиц N и число шагов интегрирования s_{max} при моделировании таковы:

$$N = \begin{cases} 4 \cdot 10^4, & c < 0.3 \\ 9 \cdot 10^4, & c \geq 0.3 \end{cases}, \quad s_{max} = 2 \cdot 10^6.$$

Для каждого значения концентрации проппанта двумя методами выполнялись пять расчетов с различными начальными условиями. Для каждого расчета бралось одно ядро. Результаты, приведенные ниже, соответствуют 130 расчетам и примерно двум неделям работы суперкомпьютера.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Эффективная вязкость, рассчитанная для различных концентраций проппанта методом динамики частиц и гидродинамики сглаженных частиц, показана на рис. 3. Каждая точка соответствует среднему значению по пяти расчетам с различным начальным распределением частиц проппанта. Прямоугольниками показан разброс результатов (среднее значение плюс/минус стандартное отклонение). Сплошная линия соответствует формуле Эйнштейна (1) в двумерном случае ($A = 2$).

Из рис. 3 видно, что результаты, полученные двумя методами, согласуются в пределах стандартного отклонения результатов при моделировании МДЧ. Для концентраций проппанта свыше 0.2 полученные значения вязкости существенно превышают предсказание формулы Эйнштейна (1). Следовательно, при данных концентрациях становятся существенными гидродинамические взаимодействия, не учитываемые при выводе формулы (1). Тогда следует применять нелинейные формулы (2)–(4).

При аппроксимации результатов моделирования кривыми (2)–(4) критическая концентрация c_* использовалась в качестве параметра. Методом наименьших квадратов получены следующие значения c_* для уравнений (2)–(4): $c_*^M = 0.99$, $c_*^{MP} = 0.77$, $c_*^{KD} = 0.67$. Соответствующие кривые приведены на рис. 3.

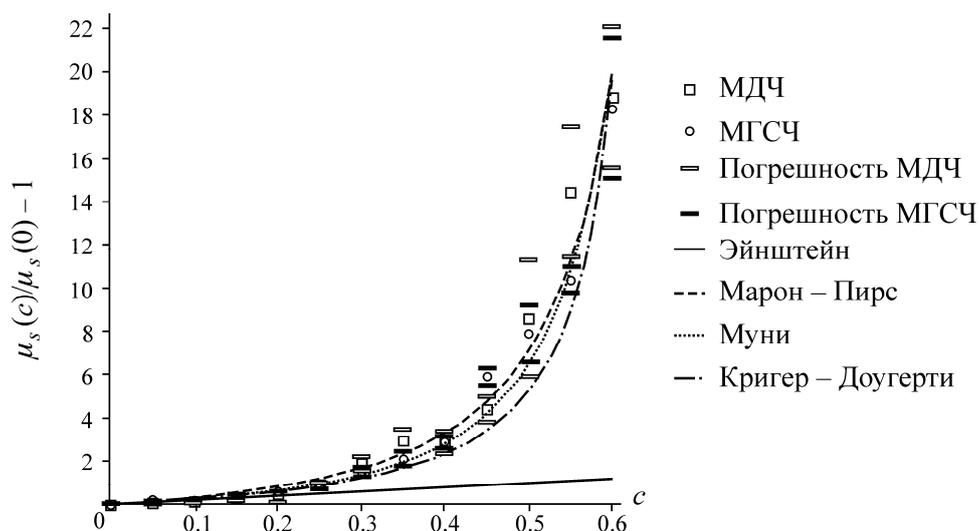


Рис. 3. Зависимость относительной вязкости от концентрации проппанта, полученная методами динамики частиц, гидродинамики сглаженных частиц и рассчитанная по формулам (1)–(4).

Видно, что уравнения (2) и (3) дают лучшую аппроксимацию результатов моделирования, чем уравнение (4). Однако при этом значение $c_*^M = 0.99$, используемое в формуле (2), не реалистично, так как максимальная концентрация в двумерном случае равна $\pi/(2\sqrt{3}) \approx 0.91$ (данное значение соответствует упаковке проппанта в виде идеальной треугольной решетки). Значение $c_*^{MP} = 0.77$, полученное с использованием формулы (3), близко к концентрации, соответствующей случайной плотной упаковке частиц в двумерном случае $c_{RCP} = 0.82 \pm 0.02$ [32].

ВЫВОДЫ

Ввиду трудности физического моделирования течения типа Пуазейля, при изучении эффективной вязкости смеси проппант – жидкость, движущейся в трещине гидроразрыва, целесообразно использовать численное моделирование. При этом для повышения надежности уместно проводить расчеты взаимно дополняющими методами, такими как метод динамики частиц и метод гидродинамики сглаженных частиц.

Установлено, что при теоретически обоснованных параметрах, отвечающих течению смеси проппант – жидкость в трещине гидроразрыва, результаты расчетов методами динамики частиц и гидродинамики сглаженных частиц согласуются в пределах стандартного отклонения. Это свидетельствует о надежности результатов и возможности их использования для задания эффективной вязкости смеси при решении практических задач, связанных с гидроразрывом.

Полученная зависимость эффективной вязкости смеси от концентрации проппанта описывается формулой Марона–Пирса $\mu_s^{MP} = \mu_s(0)/(1 - c/c_*)^2$ при значении критической концентрации $c_* = 0.77$.

Проведенное исследование следует продолжить в направлении сопоставления полученных результатов с результатами для течения типа Куэтта, используемого в лабораторных экспериментах на реометрах. Это позволит оценить, в какой мере измерения с помощью реометров могут служить для задания эффективной вязкости, отвечающей течению под действием перепада давления в трещине гидроразрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Economides M. J., Nolte K. G.** Reservoir Stimulation. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
2. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 5.
3. **Khristianovich S. A., Zheltov V. P.** Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid, Proc. 4-th World Petroleum Congress, Rome, 1955.
4. **Алексеев О. П., Вайсман А. М.** Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. — 1999. — № 3.
5. **Savitski A. A., Detournay E.** Propagation of a fluid-driven penny-shaped fracture in an impermeable rock: Asymptotic solutions, Int. J. Solids Structures, 2002, Vol. 39.
6. **Adachi J., Siebrits E., et al.** Computer simulation of hydraulic fractures, Int. J. Rock Mech. Mining Sci., 2007, Vol. 44.
7. **Peirce A., Detournay E.** An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 2008, Vol. 197.
8. **Garagash D. I., Detournay E., Adachi J. I.** Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off, J. Fluid Mech., 2011, Vol. 669.
9. **Linkov A. M.** On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity, Int. J. Engineering Sci., 2012, Vol. 52.
10. **Lecampion B., Peirce A., E. Detournay, Zhang X., Chen Z., Bungler A., Detournay C., Napier J., Abbas S., Garagash D., Cundall P.** The impact of the near-tip logic on the accuracy and convergence rate of hydraulic fracture simulators compared to reference solutions, In J. M. Andrew P. Bungler and R. Jeray (Eds.), Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing, Rijeka, Croatia, 2013.
11. **Линьков А. М.** Аналитическое решение задачи о гидроразрыве для неньютоновской жидкости // ФТПРПИ. — 2013. — № 1.
12. **Einstein A.** Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen, Ann. Phys., 1906, Vol. 19.
13. **Brady J. F.** The Einstein viscosity correction in n dimensions, Int. J. Mult. Flow, 1983, Vol. 10.
14. **Mooney M.** The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles, J. Colloid Sci., 1951, Vol. 6.
15. **Maron S. H., Pierce P. E.** Application of Ree–Eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles, J. Colloid Sci., 1956, Vol. 11.
16. **Krieger I. M., Dougherty T. J.** A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres, T. Soc. Rheol., 1959, 3.
17. **Dorr A., Sadiki A., Mehdizadeh A.** A discrete model for the apparent viscosity of polydisperse suspensions including maximum packing fraction, J. Rheol., 2013, Vol. 57.
18. **Mueller S., Llewellyn E. W., et al.** The rheology of suspensions of solid particles, Proc. R. Soc. A, 2010, Vol. 466.

19. **Foss D. R., Brady J. F.** Structure, diffusion and rheology of Brownian suspensions by Stokesian dynamics simulations, *J. Fluid. Mech.*, 2000, Vol. 407.
20. **Martys N. S.** Study of a dissipative particle dynamics based approach for modeling suspensions, *J. Rheol.*, 2005, Vol. 49.
21. **Martys N. S., George W. L., et al.** A smoothed particle hydrodynamics-based fluid model with a spatially dependent viscosity: application to flow of a suspension with a non-Newtonian fluid matrix, *Rheol. Acta*, 2010, Vol. 49.
22. **Wang Y., Keblinski P., et al.** Viscosity calculation of a nanoparticle suspension confined in nanochannels, *Phys. Rev. E*, 2012, Vol. 86.
23. **Ladd A. J. C., Colvin M. E., et al.** Application of Lattice-Gas Cellular Automata to the Brownian Motion of Solids in Suspension, *Phys. Rev. Lett.*, 1988, Vol. 60.
24. **Hoover W. G.** Molecular dynamics, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 258, Springer, Berlin, 1986.
25. **Кривцов А. М.** Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. — М.: Физматлит, 2007.
26. **Lucy L. B.** A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, 1977, Vol. 82.
27. **Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics, *Rep. Prog. Phys.*, 2005, Vol. 68.
28. **Hoover W. G.** Smooth Particle Applied Mechanics: The State of the Art, World Scientific Publishing, 2006.
29. **Kuzkin V. A., Krivtsov A. M., Linkov A. M.** Proppant transport in hydraulic fractures: computer simulation of effective properties and movement of the suspension, *Proc. 41 Summer-School Conference "Advanced Problems in Mechanics"*, 2013.
30. **Verlet L.** Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules, *Phys. Rev.*, 1967, 159.
31. **Berendsen H. J. C., Postma J. P. M., van Gunsteren W. F., Di Nola A., Haak J. R.** Molecular-dynamics with coupling to an external bath, *J. Chem. Phys.*, 1984, Vol. 81.
32. **Berryman J. G.** Random close packing of hard spheres and disks, *Phys. Rev. A*, 1983, Vol. 27.

Поступила в редакцию 15/X 2013