ционного горения должны одновременно быть выполнены многие условия: соответствующая концентрация и дисперсность, источник воспламенения, длинный канал со смесью и т. п., поэтому в промышленной практике такого рода горения встречаются довольно редко.

Поступила в редакцию 21/VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **M. A. Nettleton, R. Stirling.** Proc. Roy. Soc. London, 1967, 300, 62.
2. **M. A. Nettleton, R. Stirling.** Comb. Flame, 1974, 22, 543.
3. **C. W. Kauffman, P. Wolański e. a.** Symposium on Grain Dust, U. S. Grain Marketing Research Laboratory. Manhattan, KS, 1979.
4. **G. Breipohl, T. W. Lester, J. F. Marklin.** Ibid.
5. **C. W. Kauffman, P. Wolański, E. Ural e. a.** Trzecia Miedzynarodowa Szkola Wybuchowości Pyłów Przemyslowych, Turawa, 1982.
6. **P. W. Lański.** First Specialists Meeting (Internat.) of the Combustion Institute. Bordeaux, 1981.
7. **C. W. Kauffman, J. A. Nicholls.** Dust Explosion Research at the University of Michigan. Fuel-air explosions. University of Waterloo Press, 1982.
8. **E. Ural.** Shock wave ignition of pulverized coal. Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1981.
9. **A. E. Medvedev, A. V. Fiodorov e. a.** Trzecia Miedzynarodowa Szkola Wybuchowości Pyłów Przemyslowych. Turawa, 1982.
10. **V. M. Boiko, A. N. Papyrin, M. Woliński e. a.** The dynamics of scattering and ignition of a dust layer by a shock wave. The paper submitted for IX International Colloquium on Gasdynamics of Explosions and Reactive Systems, 1983.
11. **W. P. Davis, A. D. Baer, N. W. Ryan.** A study of the ignition of a Western Coal by a special shock tube technique. WSCI 83-9.
12. **W. B. Cybulski.** Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, 1971, 21.
13. **D. Rea.** 14-th Symp. (Internat.) on Combustion. Pittsburgh, 1972.
14. **W. Rartknech.** Gas, vapor and dust explosions. International Symposium on Grain Elevator Explosions. National Academy of Sciences, Washington, DC, 1978.
15. **M. A. Nettleton, R. Stirling.** Comb. Flame, 1973, 21.
16. **S. Wójcicki, M. Zalesiński.** Recent Developments in Shock Tube Research, 1973.
17. **A. Arisoy, P. Wolański, C. W. Kauffman e. a.** Measurements on Agricultural dust detonations. Chemical and Physical Processes in Combustion. Atlantic City, 1982.
18. **P. Wolański, D. Lee, C. W. Kauffman e. a.** The structure of dust detonations. Ibid.

ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОДИФФУЗИОННОГО ПЛАМЕНИ ДЛЯ ШИРОКОГО ДИАПАЗОНА ЧИСЕЛ Le

В. Н. Вилюнов, И. Г. Дик, А. В. Зурер, А. Н. Ищенко

(Томск)

Классическая формула скорости распространения пламени [1]

$$u^2 = 2n!\,\mathrm{Le}^{-n}\varkappa\left[RT_+^2/E\,(T_+ - T_-)\right]^{n+1} k_0 \exp(-E/RT_+) \qquad (1)$$

при формальном устремлении $\mathrm{Le} = D/\varkappa$ к нулю дает бесконечные значения для u. Причина такого дефекта — пренебрежение при выводе (1) конвективными составляющими потока тепла и вещества в зоне активных химических реакций. При достаточно малых коэффициентах диффузии D это неверно. Здесь u — скорость горения; n — порядок реакции; Le — число Льюиса; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; R — газовая постоянная; E — энергия активации; k_0 — предэкспонент; T — температура; индекс + соответствует параметрам продуктов реакции, а — параметрам исходной смеси.

В литературе специально рассматривался случай $D = 0$ и предложены соответствующие формулы для u [2—4]. В [2] выражение для u получено в приближении узкой зоны тепловыделения, где концентрация вещества пропорциональна градиенту температуры. Развитый в [2] метод позволил найти u для $n = 0$ и 1.

В [3] разработан приближенный метод, позволяющий рассчитать u для любых n без ограничения на значение Le, но явного выражения $u(\mathrm{Le})$, годного для любых Le, не найдено: возникшие математические трудности не позволили получить зависимость для непрерывного ряда чисел Le. В [4] методом сращиваемых асимптотических разложений выведены формулы для стационарной скорости горения конденсированного вещества при $\mathrm{Le} = 0$, причем в каждом из выделенных диапазонов по n ($0 < n < 3/2$, $3/2 < n < 2$, $n > 2$), а также на их границах эти формулы разнятся.

Численными методами нетрудно определить характеристики горения для каждого конкретного набора параметров. Такие расчеты неоднократно проводили разные авторы для достаточно сложной кинетики и чисел Le (некоторые результаты приведены в [1]), но получение подходящей формулы для u, пригодной в широком диапазоне параметров, остается актуальным. Кроме методического значения такая формула может указать границы применимости (1), облегчить анализ функциональной зависимости u от параметров, быстро получить приближенное численное значение скорости горения.

Цель данной работы — получить приближенные аналитические зависимости $u(\mathrm{Le})$, пригодные для возможно более широкого интервала Le.

Математическая постановка задачи:

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} - c\rho u \frac{dT}{dx} + Q\rho\Phi(a, T) = 0, \qquad \rho D \frac{d^2a}{dx^2} - \rho u \frac{da}{\partial x} - \rho\Phi(a, T) = 0, \tag{2}$$

$$x = -\infty\colon T = T_-, \quad a = 1,$$

$$x = \infty\colon T = T_+ = T_- + Q/c, \; a = 0, \; \frac{dT}{dx} = 0,$$

$$\Phi(a, T) = \begin{cases} a^n \exp(-E/RT), & T \geqslant T_0 > T_-, \\ 0, & T < T_0, \end{cases}$$

где λ — коэффициент теплопроводности; c — теплоемкость; ρ — плотность; Q — тепловой эффект реакции; T_0 — температура «отрезания»; x — пространственная переменная. Требуется найти скорость горения. Интегрирование записанной системы уравнений возможно лишь приближенно.

Метод оценок, применяемый для получения аналитической зависимости $u(\mathrm{Le})$, заключается в следующем: из системы (2) сначала получают нижнюю u_- и верхнюю u_+ оценки скорости распространения пламени. Это дает возможность выделить интервал $\Delta u = u_+ - u_-$, в котором располагается точное решение задачи, а в качестве приближенного аналитического решения использовать либо сами оценки u_+ и u_-, либо их комбинацию.

Для метода оценок удобно сформулировать задачу (2) в безразмерном виде и свести ее к системе дифференциальных уравнений первого порядка [5]

$$\frac{dp}{dy} = \frac{a^n f(y)}{p} - \omega,$$

$$\mathrm{Le}\frac{da}{dy} = 1 - \frac{\omega(a - y)}{p}, \qquad 0 < y < 1,$$

$$y = 0\colon p = a = 0; \; y = 1\colon p = 0,$$

$$f(y) = \begin{cases} \exp(-\Theta_н y/(1 - \beta\Theta_н y)), & 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < y \leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$y=\frac{T_{+}-T}{T_{+}-T_{-}};\quad p=-\frac{x_{+}}{\omega}\frac{dy}{dx};\quad x_{+}=\sqrt{\varkappa\tau_{+}};$$

$$\tau_{+}=k_0^{-1}\exp(1/\beta);\ \beta=RT_{+}/E;\ \omega=u\,(\tau_{+}/\varkappa)^{1/2};$$

$$\Theta=\frac{E\,(T_{+}-T)}{RT_{+}^2},\quad \Theta_{н}=\frac{E\,(T_{+}-T_{-})}{RT_{+}^2}; \tag{3}$$

ε — параметр «отрезания», введенный для математической корректности [1]. На основе схемы получения оценок, предложенной в [5] для $\mathrm{Le}\ll 1$ и первого порядка реакции, нетрудно найти

$$\omega_{-}^2=\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{[1-(1-y)^{1/\mathrm{Le}}]\exp\left(-\dfrac{\Theta_{н}y}{1-\beta\Theta_{н}y}\right)}{(1-y)^2}\,dy. \tag{4}$$

Представим (4) в виде

$$\omega_{-}^2=\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\dfrac{\Theta_{н}y}{1-\beta\Theta_{н}y}\right)}{(1-y)^2}\,dy-\int\limits_0^{1}(1-y)^{\frac{1-2\mathrm{Le}}{\mathrm{Le}}}\exp\left(-\frac{\Theta_{н}y}{1-\beta\Theta_{н}y}\right)dy.$$

В первом интеграле ε заменено на ∞, так как вклад интеграла при $\varepsilon\div\infty$ в случае больших $\Theta_{н}$ мал, во втором интеграле $\varepsilon\to 1$.

Разлагая в ряд подынтегральные функции, для первого интеграла получим

$$I_{\infty}=\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\dfrac{\Theta_{н}y}{1-\beta\Theta_{н}y}\right)}{(1-y)^2}=\frac{1}{\Theta_{н}}\left[1+\frac{2\,(1-\beta\Theta_{н})}{\Theta_{н}}-O\left(\frac{1}{\Theta_{н}^2}\right)\right].$$

Второй интеграл выражается через комбинацию вырожденных гипергеометрических функций

$$\int\limits_0^1(1-y)^{(1-2\mathrm{Le})/\mathrm{Le}}e^{-\Theta_{н}y}\left(1-\beta\Theta_{н}^2y^2+\ldots\right)dy=$$

$$=\frac{\Phi\left(1,\mathrm{Le}^{-1},-\Theta_{н}\right)\Gamma(1)\,\Gamma((1-\mathrm{Le})/\mathrm{Le})}{\Gamma(\mathrm{Le}^{-1})}-$$

$$-\beta\Theta_{н}^2\frac{\Phi\,[3,(1+2\mathrm{Le})/\mathrm{Le},-\Theta_{н}]\,\Gamma(3)\,\Gamma\,[(1-\mathrm{Le})/\mathrm{Le}]}{\Gamma\,[(1+2\,\mathrm{Le})/\mathrm{Le}]}.$$

Здесь Γ — гамма-функция; Φ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Если $\mathrm{Le}\sim\Theta_{н}$, $\mathrm{Le}^{-1}\gg 1$, имеет место асимптотическое представление [6]

$$\Phi\left(1,\mathrm{Le}^{-1},\Theta_{н}\right)=(1+\mathrm{Le}\Theta_{н})^{-1}\left[\frac{1-\mathrm{Le}^3\Theta_{н}^2}{1+\mathrm{Le}\,\Theta_{н}^2}+O\,(\mathrm{Le}^2)\right],$$

$$\Phi\left(3,\frac{1+2\,\mathrm{Le}}{\mathrm{Le}},-\Theta_{н}\right)=\frac{(1-2\,\mathrm{Le})^3}{(1+\mathrm{Le}\,(\Theta_{н}-2))^3}\left\{1-\right.$$

$$\left.-\frac{6\,\mathrm{Le}}{1+2\,\mathrm{Le}}\left[\frac{-\mathrm{Le}\,\Theta_{н}}{1+\mathrm{Le}\,(\Theta_{н}+2)}\right]^2+O\left(\frac{\mathrm{Le}^2}{(1+2\,\mathrm{Le})^2}\right)\right\}.$$

Таблица 1

Le	Числ. счет	ω(5)	ω(8)	ω(7)
0,05	$\frac{0,275}{0,413}$	$\frac{0,260}{0,408}$	—	—
0,1	$\frac{0,252}{0,392}$	$\frac{0,225}{0,371}$	—	—
0,25	$\frac{0,206}{0,345}$	$\frac{0,169}{0,301}$	$\frac{0,200}{0,353}$	$\frac{0,231}{0,405}$
0,5	$\frac{0,166}{0,293}$	—	—	$\frac{0,174}{0,318}$
2,0	$\frac{0,094}{0,179}$	—	—	$\frac{0,092}{0,175}$

Примечание. Верхние цифры — значения ω при $\Theta_н = 5$, нижние при $\Theta_н = 10$; $\beta\Theta_н = 0,9$.

Используя свойство Г-функции для целых n: $\Gamma(n+1) = n!$, окончательно получим

$$\omega_-^2 = \Theta_н^{-1}\left\{1 + \frac{2(1-\beta\Theta_н)}{\Theta_н} - \frac{\mathrm{Le}\,\Theta_н}{(1-\mathrm{Le})(1+\mathrm{Le}\,\Theta_н)}\left[1 - \frac{\mathrm{Le}^3\Theta_н^2}{(1+\mathrm{Le}\,\Theta_н)^2}\right] + \right.$$
$$+ 2\beta(\Theta_н\,\mathrm{Le})^3\frac{(1+2\,\mathrm{Le})^2}{(1-\mathrm{Le}^2)(1+\mathrm{Le}(\Theta_н+2))^3}\left[1 + \frac{6\,\mathrm{Le}^3\Theta_н^2}{[1+\mathrm{Le}(\Theta_н+2)]^2}\right] +$$
$$\left. + O(\Theta_н^{-2}) + O(\mathrm{Le}^2) + O\left(\frac{\mathrm{Le}^2}{(1+2\,\mathrm{Le})^2}\right)\right\}. \quad (5)$$

Сравнение результатов, полученных по формуле (5), с численным решением задачи (2) на ЭВМ (табл. 1) показывает, что (5) имеет точность 8—10% для $\mathrm{Le} \ll 1$, $\Theta_н \sim \mathrm{Le}^{-1}$. Для $\mathrm{Le} \approx 1$ и первого порядка реакции в [5] приводится зависимость

$$\omega^2 = \frac{2}{\mathrm{Le}\,\Theta_н^2}\left[1 + 2\Theta_н^{-1}\left(1,5 - 3\beta\Theta_н - \frac{(1-\mathrm{Le})}{2\,\mathrm{Le}}\right)\right].$$

Аналогичным образом может быть записана трехчленная формула

$$\omega^2 = \frac{2}{\mathrm{Le}\Theta_н^2}\left\{1 + \frac{2}{\Theta_н}\left(1,5 - 3\beta\Theta_н - \frac{1-\mathrm{Le}}{2\,\mathrm{Le}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{6}{\Theta_н^2}\left[6\beta\Theta_н(\beta\Theta_н - 1) + \frac{15}{8} + (1-\mathrm{Le})\left(2\beta\Theta_н + \frac{1-2\,\mathrm{Le}}{6\,\mathrm{Le}} - \frac{3}{4}\right)\right]\right\}. \quad (6)$$

Если теперь рассмотреть (6) как ряд и применить к нему нелинейное преобразование Шенкса [7], получим

$$\omega^2 = \frac{2\left[4 - 6\beta\Theta_н - \mathrm{Le}^{-1} - (7\,\mathrm{Le}+2)/(4\Theta_н\mathrm{Le})\right]}{\mathrm{Le}\,\Theta_н^2\left\{4 - 6\beta\Theta_н - \mathrm{Le}^{-1} - \frac{6}{\Theta_н}\left[6\beta\Theta_н(\beta\Theta_н - 1) + \frac{15}{8} + \frac{1-\mathrm{Le}}{\mathrm{Le}}\left(2\beta\Theta_н - \frac{3}{4} + \frac{1-2\,\mathrm{Le}}{6\,\mathrm{Le}}\right)\right]\right\}}. \quad (7)$$

Сравнение с численными результатами показывает, что формула (7) справедлива в диапазоне $0,25 < \mathrm{Le} < \infty$ (см. табл. 1). В точке $\mathrm{Le} = 0,25$ формулы (5) и (7) имеют примерно одинаковую по величине относительную погрешность разных знаков. Это дает возможность «сшить» в этой точке решения, найденные для разных областей, взяв в качестве граничного значения их среднее арифметическое

$$\omega|_{\mathrm{Le}=0,25} = \frac{\omega_{(5)} + \omega_{(7)}}{2}. \qquad (8)$$

Формулы (5), (7) и (8) позволяют определить ω при любом числе Le, если химическая реакция имеет первый порядок.

Методом оценок рассчитаны асимптотические зависимости для скорости горения и в случае произвольного порядка реакции, однако распространить область применения этих формул на весь диапазон $0 < \mathrm{Le} < \infty$ не удается, поэтому они здесь не приводятся. Метод оценок обладает очевидными достоинствами: асимптотичность конечных формул, точное знание характера оценки (нижняя, верхняя), однако отсутствие равномерной пригодности результатов заставляет искать другие пути решения задачи.

Метод модельного источника. Будем решать исходную задачу (2), заменив реальный нелинейный источник скорости химической реакции модельным, дающим возможность полностью проинтегрировать исходные уравнения. Такой подход применялся в различных модификациях (в зависимости от цели исследования) при вычислении скорости пламени [3], анализе устойчивости движения пламени [8], описании режимов распространения зоны химических реакций [9].

В частности, в работе [3] реальная скорость химической реакции $\Phi(a, T) = a^n k_0 \exp(-E/RT)$, зависящая от концентрации исходного вещества a и температуры T, заменялась кусочно-постоянной функцией, равной нулю в интервале температур от T_- до некоторой T_* и максимальному значению $\Phi_{\max}$ при $T_* \leqslant T \leqslant T$, причем T_* определяется следующим условием нормировки:

$$\int\limits_{T_-}^{T_+} \Phi(a, T)\, dT = \Phi_{\max}(T_+ - T_*).$$

Такая нормировка, прямо вытекающая из метода узкой зоны Д. А. Франк-Каменецкого и Я. Б. Зельдовича, не единственно возможная.

Уравнения горения остаются линейными, если (в случае $n = 1$) записать

$$\Phi = ak_0 \exp(-E/RT) = \begin{cases} 0, & T_- \leqslant T \leqslant T_*, \\ ak_0 \exp(-E/RT_+), & T_* \leqslant T \leqslant T_+, \end{cases}$$

где $\int\limits_{T_-}^{T_+} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) dT = (T_+ - T_*) \exp\left(-\frac{E}{RT_+}\right)$, или в более общем случае $n \geqslant 1$

$$\Phi = \begin{cases} 0, & T_- < T < T_*, \\ a\Phi_{\max}, & T_* \leqslant T \leqslant T_+ \end{cases}$$

с условием нормировки

$$k_0 \int\limits_{T_-}^{T_+} a^{n-1} \exp(-E/RT)\, dT = \Phi_{\max}(T_+ - T_*).$$

Значение $\Phi_{\max}$ находится как максимальная величина комплекса $a^{n-1} k_0 \exp(-E/RT)$ после того, как будет установлена связь $a(T)$. Естественно, все указанные замены справедливы при большой энергии активации E.

В силу инвариантности уравнений горения к сдвигу по пространственной координате выберем для удобства систему координат так, чтобы источник действовал на положительной полуоси x.

Сформулируем теперь задачу о горении в безразмерных переменных следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - \frac{d\Theta}{d\xi} + \frac{aA\Theta_{\text{н}}}{\omega^2} = 0, \\
\frac{d^2 a}{d\xi^2} - \mathrm{Le}^{-1}\frac{da}{d\xi} - \frac{aA}{\mathrm{Le}\,\omega^2} = 0, \\
A = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < 0, \\ \varphi, & \xi > 0, \end{cases} \\
\varphi = \max[a^{n-1}\exp(-\Theta)], \\
\xi = -\infty\colon\ \Theta = \Theta_{\text{н}},\ a = 1, \\
\xi = \infty\colon\ \Theta = 0,\ a = 0,
\end{gathered} \tag{9}
$$

где использованы безразмерные переменные и параметры (3). В ходе приближенного анализа полагается $\beta = 0$.

Решения уравнений, полученные при $\xi < 0$

$$
\begin{gathered}
\Theta = \Theta_{\text{н}} + (\Theta_* - \Theta_{\text{н}})\exp(\xi), \\
a = 1 + (a_* - 1)\exp(\xi/\mathrm{Le})
\end{gathered} \tag{10}
$$

и при $\xi > 0$

$$
\begin{gathered}
\Theta = \Theta_*\exp(-B\xi), \\
a = a_*\exp(-B\xi),
\end{gathered} \tag{11}
$$

где

$$
B = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4\,\mathrm{Le}\,\varphi} - \omega}{2\,\mathrm{Le}\,\omega}, \tag{12}
$$

должны быть состыкованы при $\xi = 0$. Из условий неразрывности потоков $\left[\frac{d\Theta}{d\xi}\right] = \left[\frac{da}{d\xi}\right]$ при $\xi = 0$ находим

$$
\Theta_{\text{н}}/\Theta_* = 1 + B,\ a_* = (1 + B\,\mathrm{Le})^{-1}. \tag{13}
$$

Теперь можно, исключая в (10), (11) переменную ξ, найти связь концентрации и температуры (фактически такое соотношение нужно лишь для зоны реакции $\xi > 0$) $a = (a_*/\Theta_*)\Theta$, что позволяет, используя (9), (13), найти

$$
\varphi = [(n-1)/e\Theta_*(1 + B\,\mathrm{Le})]^{n-1}.
$$

Из условия нормировки[1]

$$
\int_0^{\Theta_{\text{н}}} a^{n-1}e^{-\Theta}d\Theta \approx \int_0^{\infty}[\Theta/\Theta_*(1 + B\,\mathrm{Le})]^{n-1}e^{-\Theta}d\Theta = \varphi\Theta_*
$$

получим

$$
\Theta_* = (n-1)!\,[e/(n-1)]^{n-1}. \tag{14}
$$

Наконец, с учетом (12), (13) находим формулу для скорости распространения пламени

$$
\omega^2 = \left[B(1 + \mathrm{Le}\,B)^n\right]^{-1}[(n-1)/e\Theta_*]^{n-1}. \tag{15}
$$

Поскольку обычно $\Theta_{\text{н}} \gg 1$, $\Theta_* \approx 1$ (например, как следует из (14), при $n = 1$ $\Theta_* = 1$, при $n = 2$ $\Theta_* = e$), то $B = \Theta_{\text{н}}/\Theta_* - 1 = (T_* - T_-)/(T_+ - T_*) \gg 1$. Поэтому при $\mathrm{Le} \approx 1$

$$
\omega^2 = \mathrm{Le}^{-n}B^{-(n+1)}\left(\frac{n-1}{e\Theta_*}\right)^{n-1} = \Gamma^2(n)\left(\frac{e}{n-1}\right)^{n-1}\Theta_{\text{н}}^{-(n+1)}\,\mathrm{Le}^{-n}. \tag{16}
$$

Зависимость скорости распространения пламени от числа Le совпадает с указанной Л. Д. Ландау (1). Совпадают также и другие параметрические связи формул (1) и (16).

---

[1] Интегрирование вне зоны реакции ведется с использованием того же закона подобия, что и в зоне реакции. Это оправдано быстрым падением скорости реакции с ростом Θ, а также гладкой (до производных) состыковкой интегральных кривых на границе зоны реакции.

О качественных расхождениях можно судить по отношениям: $u_{(1)}/u_{(16)} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ при $n = 1$ и $u_{(1)}/u_{(16)} = 2/\sqrt{e} \approx 1{,}25$ при $n = 2$ ($u_{(1)}$ — значение u, даваемое формулой (1), $u_{(16)}$ — формулой (16)). В другом предельном случае $\mathrm{Le} = 0$ из (15) получим (всюду с точностью до $\Theta_{н}^{-1}$)

$$u^2 \approx \frac{RT_+^2}{E(T_+ - T_-)}\left[\frac{\varkappa k_0 \exp(-E/RT_+)}{e^{n-1}}\right],$$

что для $n = 1$ совпадает с формулой Б. В. Новожилова [2]. При $n = 2$ формула (15) в отличие от аналогичной в [3] дает значение u в $\sqrt{2}$ раз меньшее. Согласие формул данной статьи с формулами других авторов, в частности работы [3], свидетельствует об определенной консервативности моделирования теплового источника.

Таким образом, зависимость $u(\mathrm{Le})$ типа (1) справедлива при условии $\mathrm{Le}\,B \approx \mathrm{Le}\,\Theta_{н}/\Theta_*(n) \gg 1$. При достаточно малых Le пользоваться ею уже не следует. Большие $\Theta_{н}$ расширяют область применимости (1).

Комплекс $\mathrm{Le}\,\Theta_{н}/\Theta_*$ существен для структуры пламени. Действительно, ширина зоны реакции по температуре, как видно из (14), не зависит от Le, а определяется только порядком реакции. Ширина зоны по концентрации $a_* = (1 + \mathrm{Le}\,\Theta_{н}/\Theta_*)^{-1}$ существенно растет с уменьшением Le. Используя решение (11), легко получить, что в зоне реакции

$$\mathrm{Le}^{-1}\,\frac{da}{d\xi}\bigg/\frac{d^2a}{d\xi^2} = \frac{\Theta_*(n)}{\mathrm{Le}\,\Theta_{н}},$$

$$\frac{d\Theta}{d\xi}\bigg/\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} = \frac{\Theta_*(n)}{\Theta_{н}}.$$

Таким образом, отношение конвективного потока вещества к диффузионному определяется все тем же комплексом $\mathrm{Le}\,\Theta_{н}/\Theta_*(n)$. Отметим, что комплекс $\mathrm{Le}\Theta_{н}$ в основном определяет зависимость $\omega(\mathrm{Le})$ в (4), полученную методом оценок.

Обратим еще внимание на подобие концентрационного и температурного поля в зоне реакции. Оно может быть представлено в двух эквивалентных формах:

$$a = \frac{\Theta}{\Theta_*\,[1 + \mathrm{Le}\,\Theta_{н}/\Theta_*(n)]}, \tag{17}$$

$$a = \frac{d\Theta}{d\xi}\,\frac{1}{[1 + \mathrm{Le}\,\Theta_{н}/\Theta_*(n)]}. \tag{18}$$

В частности, при $\mathrm{Le} \approx 1$

$$a = \mathrm{Le}^{-1}\,\frac{T_+ - T}{T_+ - T_-} = \mathrm{Le}^{-1}\,\frac{(T_+ - T_*)\,\varkappa}{u\,(T_+ - T_-)^2}\,\frac{dT}{dx}.$$

Первое соотношение лежит в основе теории Д. А. Франк-Каменецкого и Я. Б. Зельдовича [1]. При $\mathrm{Le} \to 0$ получим [2]

$$a = \frac{T_+ - T}{T_+ - T_*} = \frac{dT}{dx}\,\frac{\varkappa}{u\,(T_+ - T_-)}.$$

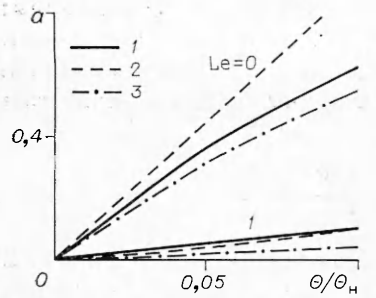
Иллюстрация законов подобия показана на рисунке.

В ходе сравнения результатов численного счета с формулой (9) найден корректирующий множитель

$$M = [1 - 8\cdot 10^{-3}\beta\Theta_{н}(n + 1)\ln\Theta_{н}]\left[1 + \frac{4\,\mathrm{Le}}{(n + 1)(1 + 5\,\mathrm{Le})}\right],$$

после чего формула для скорости распространения зоны химической реакции предстанет в виде

$$\omega^2 = M^2\left[\frac{n - 1}{e\Theta_*}\right]^{n-1}\left[\frac{\Theta_{н}}{\Theta_*}\left(1 + \frac{\mathrm{Le}\,\Theta_{н}}{\Theta_*}\right)^n\right]^{-1}. \tag{19}$$



Зависимость концентрации от температуры в зоне реакции.
1 — расчет на ЭВМ; 2 — по (17); 3 — по (18).

Эта формула дает значение скорости горения с погрешностью до 5% для практически интересного диапазона всех параметров задачи. Некоторые числовые данные приведены в табл. 2.

Если сравнить два использованных приближенных метода, нетрудно заметить, что метод модельного источника физически менее строгий, чем метод оценок. Для $n = 1$ формула (15) дает результаты на 5—7% хуже результатов формул (5), (7), (8). Однако этот недостаток удается легко устранить корректирующим множителем. Главное достоинство метода модельного источника — возможность получения одной формулы, справедливой для любых чисел Le, произвольных порядков реакции и любых начальных температур. Эта формула гораздо проще формул, полученных методом оценок.

Таблица 2

$\Theta_н$	Le=0		Le=0,2		Le=1		Le=10	
	1	2	1	2	1	2	1	2
5	0,437 / 0,436	0,276 / 0,270	0,359 / 0,369	0,217 / 0,224	0,235 / 0,237	0,117 / 0,116	0,086 / 0,085	0,019 / 0,018
9	0,323 / 0,323	0,186 / 0,192	0,236 / 0,232	0,129 / 0,131	0,139 / 0,136	0,056 / 0,055	0,048 / 0,047	0,001 / 0,001
12	0,279 / 0,279	0,155 / 0,165	0,190 / 0,182	0,098 / 0,099	0,107 / 0,103	0,038 / 0,037	0,036 / 0,035	0,005 / 0,005

Примечание. Верхние цифры — значения ω, вычисленные на ЭВМ, нижние — по формуле (19); $\beta\Theta_н = 0,9$; 1 — $n = 1$, 2 — $n = 2$.

Таким образом, методом оценок получена аналитическая зависимость скорости горения от числа Le для первого порядка реакции. С помощью замены реального нелинейного источника скорости химической реакции модельным построена и проанализирована аналогичная зависимость для произвольного порядка реакции и числа Le. Проведено сравнение результатов приближенных методов с численными расчетами на ЭВМ и между собой.

Авторы благодарят В. С. Баушева за консультации при численной реализации задачи и А. М. Тимохина за обсуждение работы.

Поступила в редакцию 13/V 1983,
после доработки — 20/IX 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович и др.** Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
2. **Б. В. Новожилов.** Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
3. **Б. И. Хайкин, А. Г. Мержанов.** ФГВ, 1966, 2, 3.
4. **В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев.** ФГВ, 1975, 11, 2.
5. **В. С. Баушев, В. Н. Вилюнов.** ПМТФ, 1976, 3.
6. **Г. Бейтман, А. Эрдейи.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
7. **D. Shanks.** J. Math. and Phys., 1955, 34.
8. **А. П. Алдушин, С. Г. Каспарян.** Теплодиффузионная неустойчивость стационарной волны горения. Препринт. Черноголовка, 1978.
9. **А. П. Алдушин, Я. Б. Зельдович, С. И. Худяев.** ФГВ, 1979, 15, 6.