

УДК 539.3

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО НОВОГО ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

В. И. Одинокоев, А. М. Сергеева

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре  
E-mail: mail@imim.ru

С использованием теории малых упругопластических деформаций и апробированного численного метода решается пространственная задача по определению напряженно-деформированного состояния ледяной пластины конечной толщины при ее разрушении запатентованным методом.

Ключевые слова: разрушение ледяного покрова, напряжения, деформации.

**Введение.** Продление навигации, особенно в северных морях, является важной проблемой. Это подтверждается многочисленными патентами, направленными на разработку способов разрушения ледяного покрова [1]. В работе строится математическая модель нового технологического процесса разрушения ледяного покрова. Процесс защищен патентом [2] и позволяет разрушать лед до трех метров толщиной. Идея заключается в том, что подо льдом создается разреженное пространство необходимой площади, при котором лед будет разрушаться под действием собственного веса и внешнего атмосферного давления. Для реализации данного способа под лед вводится контейнер, имеющий две подвижные щеки, перемещающиеся в горизонтальном направлении перпендикулярно фарватеру (рис. 1). Две боковые стенки и днище препятствуют активному заполнению контейнера водой при раздвижении щек. С торцевых внешних сторон контейнер предельно открыт (имеется только привод перемещения щек), и нет препятствий отжиму воды щеками. Скорость перемещения щек  $v$  и глубина контейнера  $h$  должны быть такими, чтобы при раздвижении щек до величины, при которой начнет разрушаться лед, контейнер наполнился водой через имеющиеся зазоры не более чем на  $2/3$  своего объема.

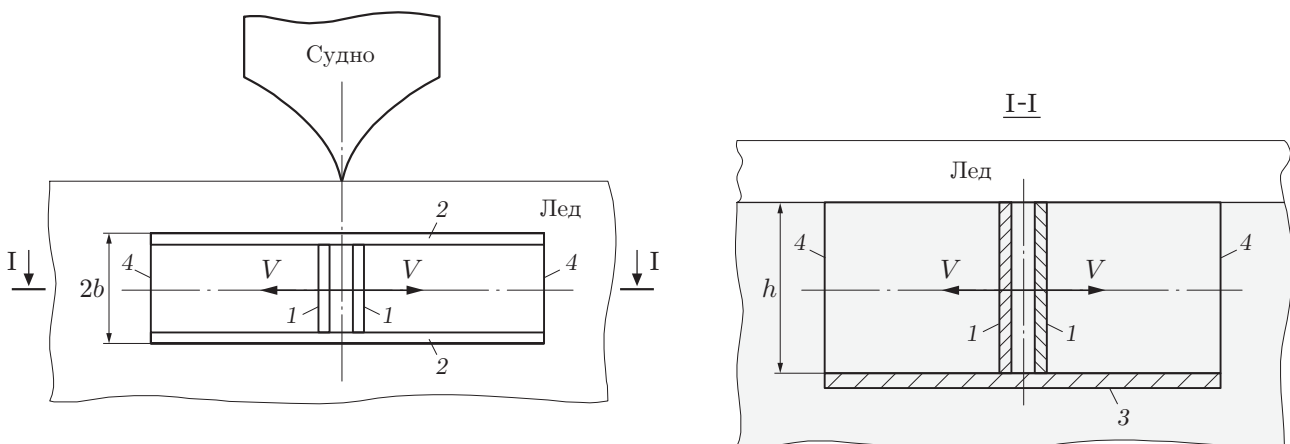


Рис. 1. Схема получения разреженного подо льдом пространства:

1 — подвижные щеки; 2 — боковые стенки; 3 — днище; 4 — торцевые внешние стороны контейнера

Расчет заполнения контейнера водой выполнен в работе [3]. Получена аналитическая формула для скорости раздвижения щек

$$v = 3M/(2bh), \tag{1}$$

где

$$M = \delta \sqrt{\frac{2\sigma_0 q}{\gamma}} (b_1 + x) + \frac{4}{3} \delta \sqrt{2q} \left[ \left( \frac{\sigma_0}{\gamma} + h \right)^{3/2} - \left( \frac{\sigma_0}{\gamma} \right)^{3/2} \right] + \delta b \sqrt{2q \left( \frac{\sigma_0}{\gamma} + h \right)}.$$

Здесь  $x$  — величина расхождения щек от вертикальной плоскости симметрии;  $\delta$  — величина зазора между подвижными щеками и неподвижными частями контейнера, а также ледяной пластиной;  $q$  — ускорение свободного падения;  $\gamma$  — удельный вес воды;  $\sigma_0$  — атмосферное давление;  $b_1 = 2b$  — полная ширина контейнера.

**Постановка и решение задачи.** Решается пространственная задача о деформации ледяного покрова под действием атмосферного давления и силы тяжести собственно льда. Так как задача симметричная, рассмотрим четвертую часть области деформирования (рис. 2, *a*). Формализуя схему деформации, будем полагать, что лед I опирается на коробку контейнера II и упругое основание (воду) с внешней стороны контейнера. Внутри контейнера лед провисает под действием собственного веса и внешнего атмосферного давления. Деформируемая среда считается упругой и изотропной, а упругие перемещения — малыми. Инерционными силами из-за малости скорости раздвижения щек будем пренебрегать. Используя уравнения теории упругости для малых деформаций, запишем систему дифференциальных уравнений в декартовой системе координат:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad F_2 = F_3 = 0; \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}^*, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - (1/3) \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \tag{3}$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ii} = 3k\sigma$$

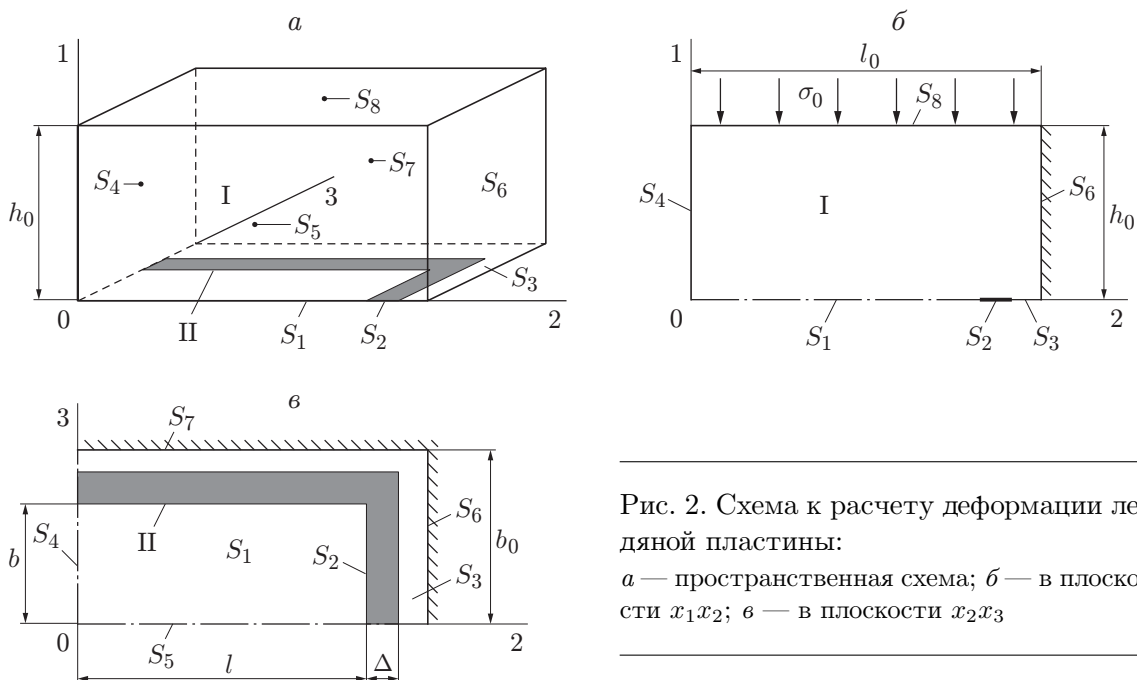


Рис. 2. Схема к расчету деформации ледяной пластины:  
*a* — пространственная схема; *б* — в плоскости  $x_1x_2$ ; *в* — в плоскости  $x_2x_3$

и уравнение теплопроводности для стационарного случая

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (5)$$

В (2)–(5)  $G = G(\theta)$  — модуль сдвига;  $\theta$  — температура;  $k = k(\theta)$  — коэффициент объемного сжатия;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;  $F_i$  — проекция удельной объемной силы по осям  $x_i$ ;  $u_i$  — проекции перемещений по координатным осям  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Уравнения (2)–(5) записаны с учетом суммирования по повторяющимся индексам.

Ледяной покров можно рассматривать как пластину конечной толщины, в которой

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (6)$$

при граничных условиях  $\theta|_{x_1=0} = 0$ ,  $\theta|_{x_1=h} = \theta_1$ . Коэффициент  $\lambda(\theta)$  изменяется от температуры по линейному закону [8]

$$\lambda = \lambda_0(1 + a\theta). \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (6) и принимая  $\theta_0 = 0$ , получим

$$\theta = -\frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{x_1}{h} \left(\frac{2\theta_1}{a} + \theta_1^2\right)}. \quad (8)$$

По данным работы [8]  $a = -0,0159$ ,  $\lambda_0 = 2,22$  Вт/(м·К).

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_8} = -\sigma_0, \quad (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_8} = 0, \quad (\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_1} = 0, \\ (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_3} = 0, \quad \sigma_{21}|_{S_4} = 0, \quad \sigma_{23}|_{S_i} = 0, \quad i = 4, 6; \quad (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_2} = 0, \\ \sigma_{31}|_{S_5} = 0, \quad \sigma_{32}|_{S_i} = 0, \quad i = 5, 7; \quad \sigma_{11}|_{S_3} = -q_1, \quad \sigma_{11}|_{S_2} = \sigma_*, \\ u_2|_{S_i} = 0, \quad i = 4, 6, \quad u_3|_{S_i} = 0, \quad i = 5, 7, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $q_1 = \sigma_0 + \gamma h_*$ ;  $h_*$  — глубина погружения льда.

Отметим, что контейнер, наполненный водой, имеет положительную плавучесть. При раздвижении щек контейнера появляется сила, направленная снизу на лед от бортов контейнера. Эта сила появляется от действия атмосферного давления и вытесненной воды вследствие образовавшейся в контейнере полости. Тогда выталкивающая сила равна  $P = bh_1\gamma$ , где  $h_1$  — высота образовавшейся в контейнере полости ( $h_1 < h$ , так как в процессе раздвижения щек внутрь затекает вода);  $\gamma$  — удельный вес воды;  $\sigma_0$  — атмосферное давление.

Следовательно, напряжение на бортах контейнера  $S_2$  (см. рис. 2) выполнено:

$$\sigma_* = -P/[(l + \Delta)\Delta + b\Delta] = \sigma_{11}|_{S_2}. \quad (10)$$

То есть при раздвижении щек подо льдом создается безвоздушное пространство, и лед начинает под действием собственного веса и внешнего атмосферного давления, деформируясь, погружаться вместе с контейнером в воду. На внешних гранях  $S_6$ ,  $S_7$  (рис. 2) принимается условие закрепления льда, не дающее ему перемещаться в воду. Тем самым

имитируется связь рассматриваемой ледовой подушки с внешней недеформируемой основой. Данная связь определяется уравнениями [7]

$$\sigma_{21}|_{S_6} = -\psi_6 \tau_S v_{\text{ск}}/|v|; \quad \sigma_{31}|_{S_7} = -\psi_7 \tau_S v_{\text{ск}}/|v|. \quad (11)$$

Здесь  $\psi_6 = \psi_7 = 1000$ ;  $v_{\text{ск}}$  — скорость скольжения ледяной подушки относительно основы;  $v_{\text{ск}} = v_1|_{S_3} - v_1^*$ ,  $v_1^*$  — скорость перемещения основы. В нашем случае  $v_1^* = 0$ ;  $|v|$  — нормирующая скорость;  $\tau_s$  — условный предел текучести льда. Как показали расчеты, при принятых значениях  $\psi_i$  ( $i = 6, 7$ ) перемещение  $u_1$  вблизи  $S_6, S_7$  составило 0,0007 мм. При этом касательные напряжения на поверхностях  $S_6, S_7$  не превышали 0,02 МПа.

Для решения системы дифференциальных уравнений (2)–(4) с учетом (8) и граничных условий (9)–(11) воспользуемся численным методом [5]. Согласно этому методу область деформирования разбивается на ортогональные элементы конечных размеров; для каждого элемента записывается в разностном виде система (2)–(4), которая решается по разработанному алгоритму с учетом смешанных граничных условий (9). В результате решения имеем поля напряжений  $\sigma_{ij}$  и перемещений  $u_i$  по граням каждого элемента.

При использовании указанного численного метода применялась разработанная в [6] численная схема решения пространственных задач, в соответствии с которой исходная система разностных уравнений свертывается в эквивалентную систему, но с меньшим на порядок количеством неизвестных, чем в исходной. По разработанному в [7] алгоритму рассчитывается матрица новой эквивалентной системы, решение которой осуществляется по стандартной программе.

При моделировании использовались свойства пресноводного льда. Следует отметить, что пресноводный лед прочнее морского.

В соответствии с работой [4]  $E = (87,6 - 0,21\theta - 0,0017\theta^2) \cdot 10^2$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,5 + 0,003\theta$  ( $0 > -40$  °С), коэффициент объемного сжатия  $k = (1 - 2\nu)/E$ , модуль сдвига  $G = E/(2(1 + \nu))$ .

В формуле (8) принималось значение  $\theta_1 = -30$  °С.

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Задаются начальные условия.
2. Исследуемая область деформации разбивается на элементы ортогональной формы. Рассчитывается матрица длин дуг элементов.
3. Задается матрица граничных условий в соответствии с (9).
4. По формуле (8) насчитывается поле температур по каждому элементу.
5. По приведенным выше формулам рассчитываются значения  $(G)_n$  и  $(k)_n$  по каждому элементу ( $n$  — номер элемента).
6. Вычисляется матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с вышеуказанной последовательностью вычислений.
7. Решается система линейных уравнений по стандартной программе.
8. По каждому элементу (его граням —  $IJ$ ) рассчитываются  $\sigma_{ij}$ ,  $u_i$ .
9. Окончание расчета.

**Результаты исследования.** На рис. 3 приведены эпюры  $\sigma_{22}$  (а),  $\sigma_{33}$  (б) при различных толщинах льда  $h_0 = 1, 2, 3$  м. Как и следовало ожидать, растягивающие напряжения с увеличением толщины льда уменьшаются. Наибольших значений достигают растягивающие напряжения в нижней части льда в центре плоскости  $x_2 = 0$  (см. рис. 3, б). Интересно отметить, что если эпюра напряжений  $\sigma_{22}$ , переходя борт контейнера в плоскости  $x_3 = 0$ , качественно изменяет свой характер (см. рис. 3, а), то эпюра  $\sigma_{33}$  в плоскости  $x_2 = 0$  (рис. 3, б), переходя борт, качественно остается той же самой, монотонно затухая к краю  $x_3 = b_0$ . Результаты расчетов показывают, что разрушение льда безусловно произойдет

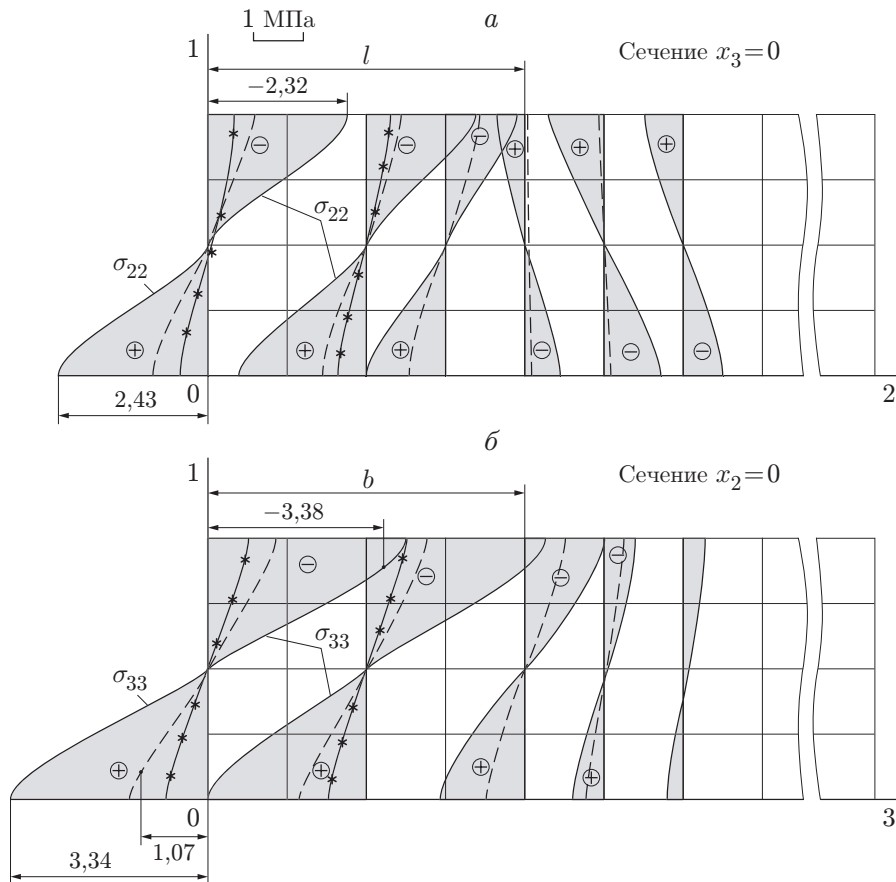


Рис. 3. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  (а),  $\sigma_{33}$  (б) при различных значениях  $h_0$  ( $h_1 = 2$  м,  $l = 10$  м,  $b = 3$  м,  $l_0 = 20$  м,  $b_0 = 13$  м,  $\Delta = 1$ )

при  $h_0 = 1, 2$  м и вероятнее всего — при  $h_0 = 3$  м. Предел прочности льда при изгибе вырезанного стандартного образца составляет 2–3 МПа. Обычно экспериментальные значения прочности в льдинах больших размеров на несколько порядков меньше лабораторных данных и составляют  $\sigma_{пр} = 0,04 \div 0,09$  МПа [8]. То есть большое значение в этих экспериментах имеет масштабный фактор. Эпюры касательных напряжений  $\sigma_{ij}$ ,  $j \neq i$  в работе не приводятся, так как они меньше нормальных примерно на порядок и не являются в данном случае определяющими при разрушении льда.

На рис. 4 представлены эпюры напряжений  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  при  $h_0 = 3$  м и значениях  $b = 3, 5$  м. Как и на рис. 3, линии со звездочками соответствуют  $b = 3$  м, сплошные линии —  $b = 5$  м. Значения растягивающих напряжений увеличиваются практически пропорционально увеличению  $b$ .

На рис. 5 показано, как изменяются эпюры  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  по мере заполнения контейнера водой, т. е. от изменения величины  $h_1$ . Штриховыми линиями, как и на рис. 3, показаны эпюры при  $h_1 = 2$  м, сплошными — при  $h_1 = 1$  м, линии со звездочками соответствуют  $h_1 = 0,5$  м. Результаты показывают, что по мере того как контейнер заполняется водой, давление бортов контейнера на лед уменьшается и контейнер сильнее подтапливается массой льда, а следовательно, лед более интенсивно деформируется, о чем свидетельствует рост растягивающих напряжений  $\sigma_{22}$  (а) и  $\sigma_{33}$  (б).

Как следует из рис. 5, напряжения  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  существенно зависят от заполняемости контейнера водой, т. е. от давления кромок контейнера на лед. Заполнение контейнера водой происходит в процессе движения его щек (см. рис. 1).

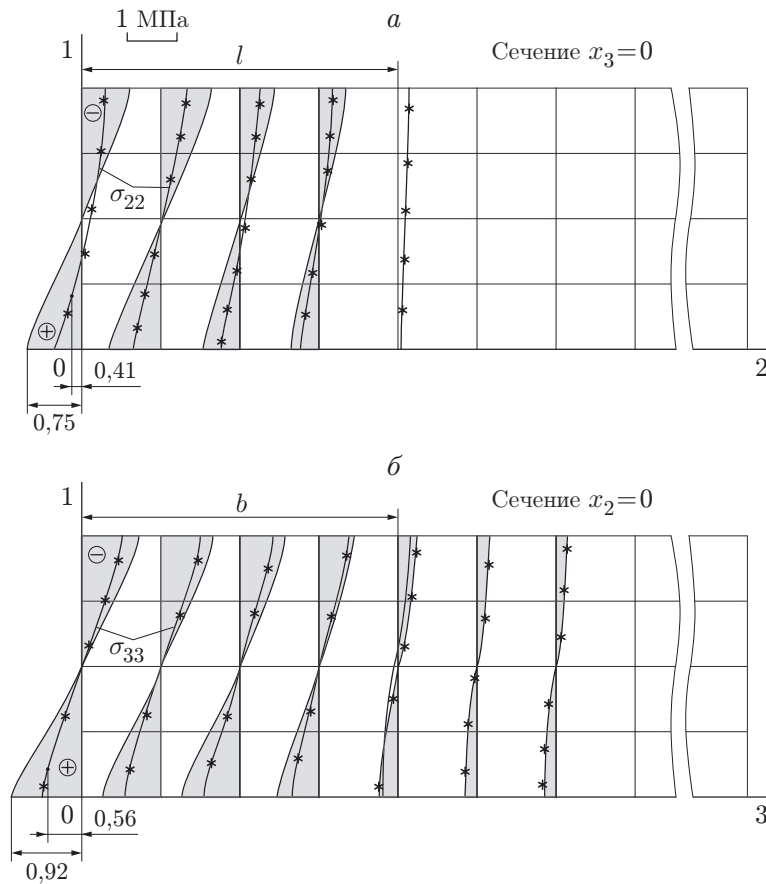


Рис. 4. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  (а),  $\sigma_{33}$  (б) при различных значениях  $b$  ( $h_1 = 2$  м,  $l = 10$  м,  $l_0 = 20$  м,  $h_0 = 3$  м,  $\Delta = 1$ )

В соответствии с полученной в работе [3] формулой объем заполняемой воды в рассматриваемой части равен  $V = M\tau/2 = Mx/(2v)$  ( $v$  — скорость перемещения щек), объем текущей части контейнера  $\bar{V}_k = xbh$ , объем не заполненного водой контейнера  $\bar{V}_{k_1} = xbh_1$ , где  $h_1$  — высота свободного от воды пространства (расстояние от внутренней поверхности льда до поверхности воды в контейнере).

Тогда составим уравнение  $xbh_1 + Mx/v = xbh$ , откуда

$$h_1 = h - M/(2bv). \quad (12)$$

Примем  $b = 6$  м;  $h = 3$  м;  $\delta = 10$  мм;  $\sigma_0 = 1$  кг/см<sup>2</sup>;  $\gamma = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $q = 10$  м/с<sup>2</sup>;  $v = 20$  м/мин. Величину  $h_1$ , от которой зависит напряжение на поверхности  $S_2$ , будем определять по формуле (12).

Некоторые результаты численного решения представлены на рис. 6, 7.

Напряжения  $\sigma_{22}$  наибольшей величины достигают на оси симметрии  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . График изменения  $\sigma_{22}$  по высоте льда  $h_0$  представлен на рис. 6, а при изменении  $l$ . Цифры 1–5 на рис. 6 относятся к соответствующим значениям  $x$  (1 —  $l = 1$  м; 2 —  $l = 3$  м; 3 —  $l = 6$  м; 4 —  $l = 8$  м; 5 —  $l = 10$  м). По мере расхождения щек растягивающие напряжения  $\sigma_{22}$  при  $x_1 = 0$  увеличиваются до определенной величины. Кривые 4 и 5 практически совпадают; даже при  $l = 8$  м напряжения  $\sigma_{22}|_{x_1=0}$  несколько больше, чем при  $x = 10$  м. На рис. 6, б показано поведение напряжения  $\sigma_{33}$  также при  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Как видно из графика, напряжение  $\sigma_{33}$  при  $x_1 = 0$  растет по мере расхождения щек, причем оно больше напряжения  $\sigma_{22}$  при тех же значениях  $x$ . На рис. 7 показано изменение напряжений  $\sigma_{22}$

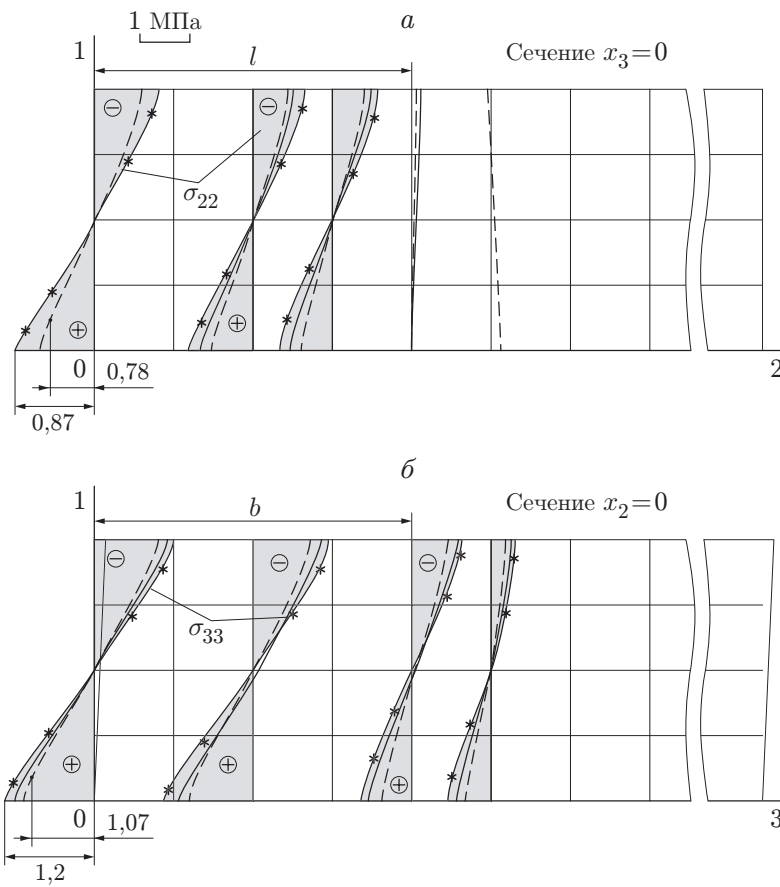


Рис. 5. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$  (а),  $\sigma_{33}$  (б) при различных значениях  $h_1$  ( $b = 3$  м,  $l = 10$  м,  $l_0 = 20$  м,  $b_0 = 13$  м,  $\Delta = 1$ ,  $h_0 = 2$  м)

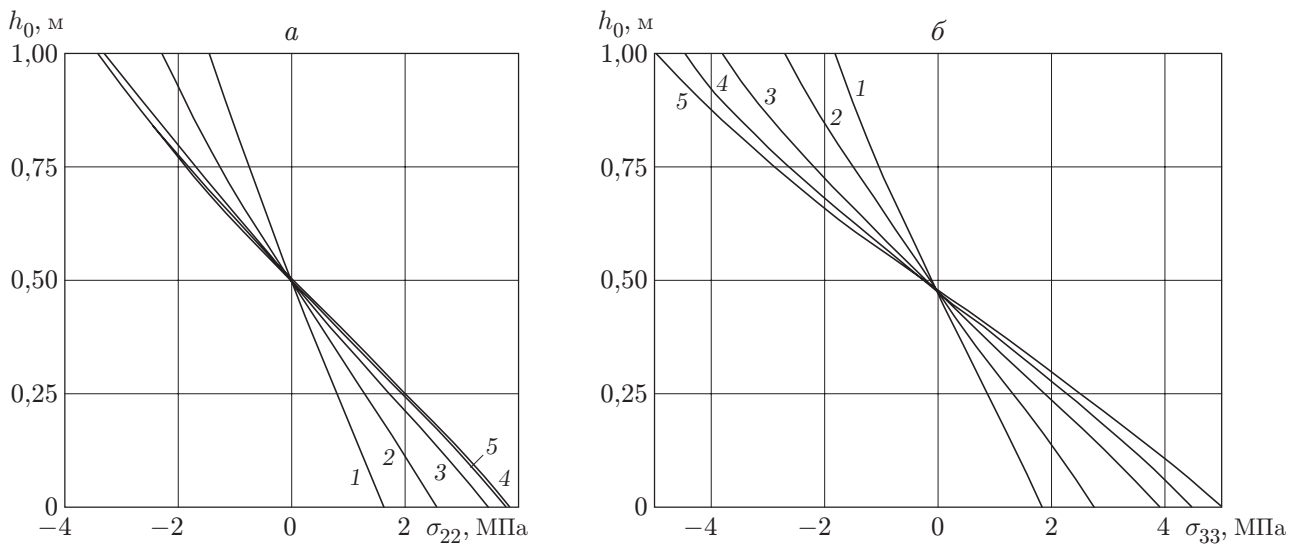


Рис. 6. График изменения по высоте  $h_0$  напряжений  $\sigma_{22}$  (а),  $\sigma_{33}$  (б) в зависимости от величины расхождения щек ( $x$ ) при  $l_0 = 20$  м,  $b_0 = 13$  м,  $b = 3$  м,  $h = 3$  м,  $\delta = 10$  мм,  $\sigma_0 = 1$  кг/см<sup>2</sup>,  $\gamma = 10$  кг/см<sup>3</sup>,  $q = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $v = 20$  м/мин

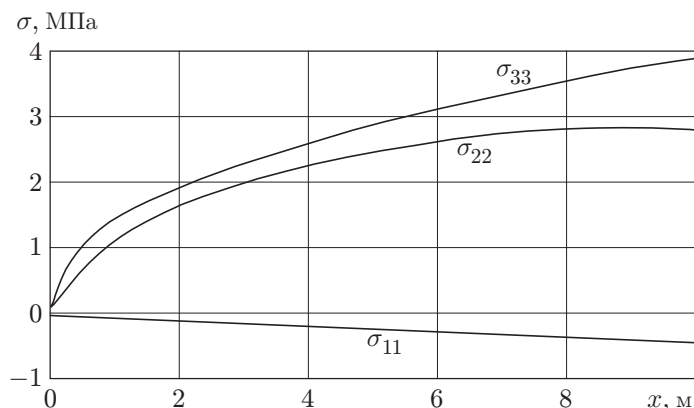


Рис. 7. График изменения напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  по  $x_2$  при  $x_3 = x_1 = 0$  (по данным рис. 6)

и  $\sigma_{33}$  при  $x_3 = x_1 = 0$  в зависимости от величины перемещения щек. На рисунке показано также изменение напряжения  $\sigma_{11}$  на кромках контейнера по мере раскрытия шторок. Несмотря на то что контейнер все больше будет заполняться водой, давление на кромки контейнера растет. Это говорит о том, что хотя контейнер и заполняется водой, но объем полости, свободной от воды, увеличивается при заданной скорости  $v$  быстрее.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Богородский В. В., Гаврило В. П., Недошивин О. А. Разрушение льда. Методы, технические средства. Л.: Гидрометеиздат, 1983.
2. Патент РФ № 2220878. Способ разрушения ледяного покрова / В. И. Одинокоев, В. М. Козин. Бюл. № 1. Оpubл. 10.01.04 г.
3. Полярус А. М., Романов Д. Ю. Об одном способе разрушения ледяного покрова // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения: Сб. докл. Второй конф. Владивосток, 31 авг. — 6 сент. 2003 г. Комсомольск-на-Амуре: Ин-т машиноведения и металлургии ДВО РАН, 2003. С. 23–28.
4. Бердяников В. П. Изучение модуля упругости льда // Тр. ГПИ, 1948. Вып. 7 (61). С. 13–23.
5. Одинокоев В. И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток: Дальнаука, 1995.
6. Меркулов В. И., Одинокоев В. И., Ловизин Н. С. Об одном подходе к численному решению задач упругопластического деформирования тел пространственной формы // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2001. № 6. С. 12–19.
7. Макеранец Е. И., Одинокоев В. И. Расчет пластического течения полых овальных цилиндров неограниченной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 2. С. 103–110.
8. Богородский В. В., Гаврило В. П. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980.

Поступила в редакцию 11/II 2005 г.,  
в окончательном варианте — 7/IV 2005 г.