

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

С. В. СЕРИКОВ

(Челябинск)

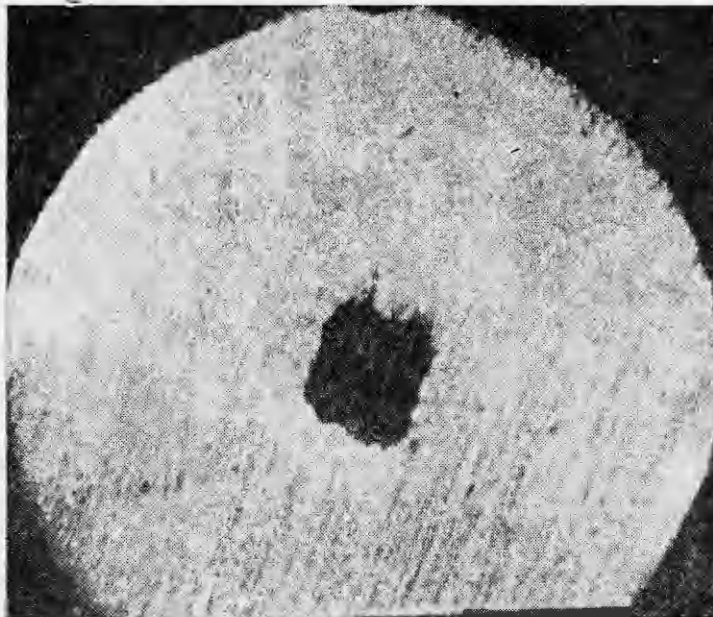
В теоретическом плане рассматривается неустановившаяся деформация металлических цилиндрических оболочек при импульсном нагружении. Движение границ плоского кольца по инерции к центру или от него исследуется на устойчивость по отношению к малым гармоническим возмущениям границ, вектора скорости и тензора напряжений. Получено соотношение на волновое число, при котором отмечается неустойчивость движения. Результат сопоставляется с известными экспериментальными данными.

1. **Примеры моделируемых процессов.** В отличие от известных работ (см., например, [1—5]) по динамической потере устойчивости цилиндрических оболочек при воздействии импульса внешнего или внутреннего давления здесь рассматриваются задачи с большими пластическими деформациями (порядка 100%). Механизм развития неустойчивости движения и оценка последней в нашем случае методологически ближе всего к работам о неустановившемся движении конечной массы жидкости со свободной границей [6—8].

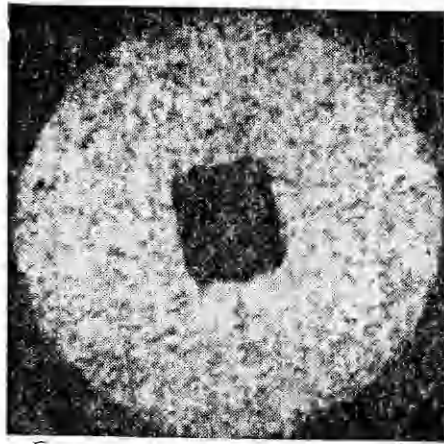
На фиг. 1 представлен результат эксперимента по осесимметричному обжатию продуктами взрыва цилиндрической оболочки из дюралюминия Д16. Начальные геометрические размеры патрубка: внешний диаметр, толщина стенки и высота соответственно $22 \times 2,5 \times 80$ мм. После опыта в среднем — $9,4 \times 3,9 \times 80$ мм с внутренним квадратичным отверстием (на фиг. 1 увеличение 10). В процессе безоправочного волочения трубы из стали 12Х1МФ размером 10×2 мм на размер $6 \times 2,2$ мм наблюдается образование квадратного канала (фиг. 2, увеличение 10). Если рассмотреть другой способ продольной прокатки бесшовных труб, а именно безоправочное редуцирование в двух-валковых круглоовальных калибрах трубы из ст. 20 с размера 86×10 мм на размер 65×11 мм, получим внутренний канал квадратной формы (фиг. 3).

Эти примеры показывают, что в широком диапазоне начальных параметров формоизменения труб (скорость движения границ 1—1000 м/с, механические свойства материала оболочек и т. д.) имеем характерный внутренний профиль. При волочении и редуцировании толстостенных труб в ряде случаев наблюдаются шестигранные и восьмигранные и т. д. внутренние каналы [9, 10]. Волнообразование на границах имеем в процессе изготовления горячим способом баллонов из бесшовных труб (фиг. 4). Здесь можно предположить, что в процессе неустановившейся деформации цилиндрической оболочки к своей оси внутренняя свободная граница становится волнистой с определенной преимущественной длиной волны за счет неустойчивости движения по отношению к малым возмущениям границ и вектора скорости.

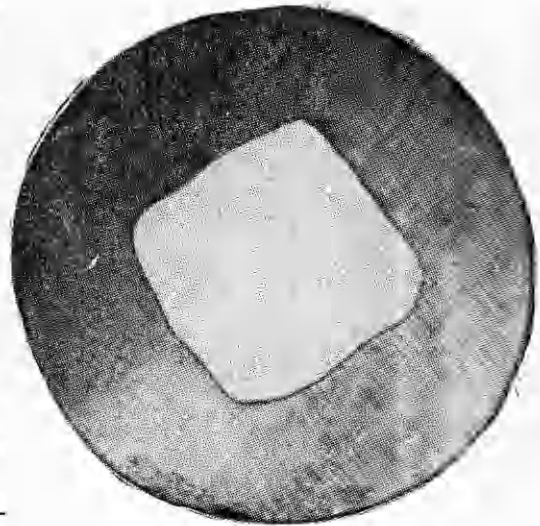
Рассмотрим теперь движение кольца от своей оси. При интенсивном динамическом нагружении внутренней границы оболочки последняя расширяется вплоть до разрушения на отдельные куски (см., например, [11—13]). Здесь предположение о корре-



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

ляции количества образующихся осколков и образование неустойчивых гармоник на границах оболочки имеет простой физический смысл.

Ниже в схеме вязкопластической среды с определенным приближением исследуется устойчивость инерционного движения кольцевой оболочки без ограничения на начальные толщину стенки и диаметр.

2. Постановка задачи. Рассматривается неустановившаяся плоская деформация без закручивания несжимаемой вязкопластической среды в кольце. Пусть r, θ — полярная система координат на плоскости с началом координат в центре кольца, $t \geq 0$ — время. Компоненты тензора напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ и составляющие вектора скорости v_r, v_θ при неустановившейся деформации среды в замкнутой области с переменной границей определяются из следующей системы равенств.

Уравнения движения непрерывной среды вне поля внешних массовых сил

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right),$$

где ρ — плотность среды.

Предположение о несжимаемости среды приводит к известному соотношению

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Вязкопластический несжимаемый материал в плоском случае описывается, согласно [14], уравнениями



Ф и г. 4

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\sigma_s}{2} \cos 2\theta_1, \quad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \sigma_\theta &= \sigma + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\sigma_s}{2} \cos 2\theta_1, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) - \frac{\sigma_s}{2} \sin 2\theta_1, \\ \operatorname{tg} 2\theta_1 &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \left/ \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right., \end{aligned}$$

где $\sigma_s \geq 0$ — динамический предел текучести; $\mu \geq 0$ — динамический коэффициент вязкости. Относительно осевой компоненты тензора напряжений σ_z при плоской деформации принимаем $\sigma_z = \sigma$.

Пусть $F_i(t, r, \theta) = 0$ есть уравнения границ кольцевой области, которая расширяется или сжимается к своему центру. На границах потребуем выполнения кинематического условия

$$(2.4) \quad \frac{\partial F_i}{\partial t} + v_r \frac{\partial F_i}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial F_i}{\partial \theta} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

и динамического при нулевых нагрузках на границах

$$(2.5) \quad \sigma_r \cos(r, n) + \sigma_{r\theta} \cos(\theta, n) = 0, \quad \sigma_{r\theta} \cos(r, n) + \sigma_\theta \cos(\theta, n) = 0,$$

где направляющие косинусы внешней нормали n к границам рассматриваются по отношению к координатным осям на плоскости.

В начальный момент времени ($t = 0$) заданы область несжимаемой вязкопластической среды со своей границей и начальное поле скоростей.

Система равенств (2.1)–(2.5) вместе с начальными данными определяет замкнутую математическую модель неустановившейся деформации вязкопластического материала в области с переменной границей. Когда $\sigma_s = 0$, $\mu \neq 0$, имеем случай несжимаемой вязкой жидкости; при $\sigma_s \neq 0$, $\mu = 0$ — модель идеальной пластичности; при $\sigma_s = 0$, $\mu = 0$ задача (2.1)–(2.5) описывается в схеме идеальной несжимаемой жидкости [6, 7].

3. Основное движение кольца. В дальнейшем рассмотрим два случая нагружения кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиуса R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Первый, когда вязкопластическое кольцо осесимметрично сжимается к своему центру при заданном начальном поле скоростей. Во втором случае происходит осесимметричное расширение кольца по инерции.

Точное решение задачи (2.1)–(2.5) при осевой симметрии движения кольца из вязкопластического материала известно [15]. Перед тем как выписать решение для рассматриваемых случаев, введем безразмерные величины по формулам

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{r} &= r/R_{10}, \quad \bar{t} = tV_{10}/R_{10}, \quad \bar{\sigma}_r = \sigma_r/\rho V_{10}^2, \quad \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/\rho V_{10}^2, \\ \bar{\sigma}_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}/\rho V_{10}^2, \quad \bar{v}_r = v_r/V_{10}, \quad \bar{v}_\theta = v_\theta/V_{10}, \quad \bar{R}_i = R_i/R_{10}, \\ \sigma_* &= \sigma_s/\rho V_{10}^2, \quad \nu = \mu/\rho V_{10} R_{10}, \quad \kappa_0 = R_{20}/R_{10}, \quad V_{10} \neq 0, \end{aligned}$$

где черту над безразмерными величинами в дальнейшем для простоты опускаем.

Для осесимметричного движения кольца получим из (2.1)–(2.5), (3.1) следующие зависимости относительно компонент тензора напряжений:

$$(3.2) \quad \sigma_{r,j} = (\ddot{R}_j R_j + \dot{R}_j^2 + \sigma_*) \ln r/R_j + \frac{1}{2} \dot{R}_j R_j (4\nu - \dot{R}_j R_j) (R_j^{-2} - r^{-2}),$$

$$\sigma_{\theta,j} = \sigma_{r,j} + \sigma_* + 4\nu \dot{R}_j R_j r^{-2}, \quad \sigma_{r\theta,j} = 0,$$

где $j = 1$ соответствует решению для сходящегося кольца, при $j = 2$ кольцо расширяется, точка над величинами соответствует дифференцированию по времени; относительно компонент вектора скорости в обоих случаях имеем

$$(3.3) \quad v_r = \dot{R}_1 R_1 r^{-1}, \quad v_\theta = 0, \quad \dot{R}_1 R_1 = \dot{R}_2 R_2,$$

а уравнение границ кольца определяется равенством $F_i = r - R_i$.

Закон изменения внутренней границы вязкопластического кольца определяется из задачи Коши для нелинейного уравнения второго порядка

$$(3.4) \quad R_1 \ddot{R}_1 + a_1 \dot{R}_1^2 + a_2 \dot{R}_1 + \sigma_* = 0, \quad R_1 = 1, \quad \dot{R}_1 = \mp 1 \text{ при } t = 0,$$

$$a_1 = 1 + \frac{(\kappa_0^2 - 1)}{w R_1^2 \ln w}, \quad w = 1 + (\kappa_0^2 - 1)/R_1^2, \quad a_2 = 4\nu (\kappa_0^2 - 1)/w R_1^3 \ln w.$$

Когда кольцо инерционно сходится к центру, в начальных данных принимается $\dot{R}_1(0) = -1$, в противоположном случае $\dot{R}_1(0) = 1$. Вследствие несжимаемости материала кольца внешний его радиус определяется по формуле

$$R_2 = (R_1^2 + \kappa_0^2 - 1)^{1/2}.$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (3.4) сводится к уравнению первого порядка с помощью подстановки

$$(3.5) \quad z = \dot{R}_1 R_1, \quad \dot{R}_1 = z/R_1, \quad \ddot{R}_1 = (z'R_1 - z)zR_1^{-3},$$

тогда из (3.4) получим дифференциальное уравнение Абеля второго рода [16] в виде

$$(3.6) \quad zz' + (a_1 - 1)R_1^{-1}z^2 + a_2z + \sigma_*R_1 = 0, \quad z(1) = \mp 1.$$

Здесь и ниже штрих над величиной обозначает дифференцирование по R_1 . Пусть в начальный момент времени кольцо тонкостенное, а именно $\kappa_0 = 1 + \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = s_0/R_{10} \ll 1$, где s_0 — начальная толщина стенки кольца. Из (3.4), (3.6) с точностью до первого порядка малости относительно ε_0 получим

$$(3.7) \quad R_1zz' - z^2 + 4vz + R_1^2\sigma_* = 0, \quad z(1) = \mp 1.$$

Введем новую функцию $u = (z - 4v)/R_1$ и, подставляя ее в (3.7), приходим к уравнению $u'(4v + R_1u) = -\sigma_*$. Принимая $u = u(t)$ за независимое переменное, последнее нелинейное уравнение сводим к линейному относительно R_1 . Интеграл решения задачи (3.7) при $\sigma_* \neq 0$ имеет вид

$$(3.8) \quad R_1 = e^{-f(u)} \left(1 - \frac{4v}{\sigma_*} \int_{\mp 1 - 4v}^u e^{f(\tau)} d\tau \right), \quad f(u) = [u^2 - (\mp 1 - 4v)^2]/2\sigma_*.$$

В случае $\sigma_* = 0$, $v \neq 0$ и $\sigma_* \neq 0$, $v = 0$ получим из (3.7) соответственно

$$(3.9) \quad z = \mp R_1 + 4v(1 - R_1), \quad z = \mp R_1 \sqrt{1 - 2\sigma_* \ln R_1}.$$

В дальнейшем при исследовании устойчивости осесимметричного движения вязкопластического кольца по отношению к малым возмущениям границ потребуются асимптотика решения задачи (3.7). Из анализа (3.7)–(3.9) следует, что в случае схождения и расхождения кольца асимптотические решения уравнения (3.7) при $\sigma_* \neq 0$, $v \neq 0$ определяются следующими соотношениями:

$$(3.10) \quad z \sim 4v \text{ при } R_1 \rightarrow 0, \\ z \rightarrow R_1 \sqrt{1 - 2\sigma_* \ln R_1} \text{ при } R_1 \rightarrow R_{1*} \quad (R_{1*} = e^{1/2\sigma_*}).$$

Таким образом, из (3.3)–(3.10) получим асимптотические представления основного движения:
для сходящегося кольца ($R_1 \rightarrow 0$)

$$(3.11) \quad \dot{R}_1 R_1 = \dot{R}_2 R_2 \sim 4v, \quad \ddot{R}_i \dot{R}_i \sim -16v^2 R_i^{-2}, \quad R_2 \sim \varepsilon_0 R_1^{-1}, \\ \kappa = R_2/R_1 \sim \varepsilon_0 R_1^{-2}, \quad \dot{\kappa} = \kappa (\dot{R}_2/R_2 - \dot{R}_1/R_1) \sim -8v\varepsilon_0 R_1^{-4};$$

для расходящегося кольца ($R_1 \rightarrow R_{1*}$)

$$(3.12) \quad \dot{R}_i \sim 0, \quad \ddot{R}_i R_i \sim -\sigma_*, \quad R_2 \sim R_1 + \frac{\varepsilon_0}{R_1}, \\ \kappa = R_2/R_1 \sim 1 + \varepsilon_0 R_1^{-2}, \quad \dot{\kappa} \sim 0.$$

4. Исследование на устойчивость. Рассмотрим задачу об устойчивости неустановившегося осесимметричного движения вязкопластического кольца со свободными границами. Математическая постановка формулируется в эйлеровых координатах по аналогии [14]. Устойчивость основного движения кольца, определяемого равенствами п. 3, в дальнейшем исследуется по отношению к малым возмущениям вектора скорости, тензора напряжений и границ кольца. Вследствие малости элементарного возмущения предполагается, что главное направление в возмущенном движении, соответствующее направлению касательной к возмущенной поверхности оболочки, образует малый угол с главным направлением невозмущенного кольца.

Методология вывода системы математических соотношений для возмущенного движения кольца с прочностью со свободными границами известна (см., например, [17, 18]). Отсюда в силу громоздкости задачи такого типа укажем только последовательность выкладок.

Задавая компоненты вектора скорости, тензора напряжений и границы кольца в возмущенном движении в виде суммы основного (осесимметричного) движения и малых добавок (возмущений), производим линеаризацию уравнений (2.1)–(2.5). Вследствие линейности условия несжимаемости (2.2) рассматриваемой среды замечаем существование достаточно гладкой функции тока. Подставляя линеаризованные компоненты тензора напряжений (2.3) в уравнение движения (2.1) и выражая компоненты вектора скорости через функцию тока, получим два линейных уравнения относительно среднего напряжения и функции тока. После дифференцирования одного уравнения по r , другого по θ и вычета приходим относительно функции тока к линейному дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка по r , θ и первого по t .

Линеаризация кинематического (2.4) и динамического (2.5) граничных условий с учетом подвижности границ дает шесть соотношений: четыре из (2.5) для формулировки краевой задачи относительно функции тока и остальные два для определения возмущения границ оболочки уже при известной функции тока и заданных начальных условиях. Вид дифференциального уравнения для функции тока и граничных условий позволяет искать решение относительно среднего напряжения, функции тока и границ возмущенного кольца гармоничными по переменной θ . Это существенно упрощает задачу, которая после введения новой переменной $y = \ln r/R_1$ принимает наиболее простой вид

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \omega^2 \psi \right) + \frac{\dot{R}_1}{R_1} e^{-2y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \omega^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\omega^2 \psi \right) - \\ - \frac{\sigma_*}{4\dot{R}_1 R_1} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega^4 \psi \right) + \frac{\nu e^{-2y}}{2R_1^2} \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - 4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (8 - \omega^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 4\omega^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - 8\omega^2 \psi \right] = 0 \quad (0 < y < \ln \kappa);$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\dot{R}_i}{R_i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\sigma_*}{4\dot{R}_i R_i} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (\omega^2 - 4) \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\omega^2 \psi \right] - \\ - \frac{\nu}{2R_i^2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \omega^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad (y = \ln R_i/R_1);$$

$$(4.3) \quad \frac{\omega}{R_i} \left(\sigma_* + 4\nu \frac{\dot{R}_i}{R_i} \right) \xi_i + \left(\frac{\sigma_*}{4\dot{R}_i R_i} + \frac{\nu}{2R_i^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \omega^2 \psi \right) = 0 \\ (y = \ln R_i/R_1);$$

$$(4.4) \quad \dot{\xi}_i - \frac{\omega}{R_i} \psi + \frac{\dot{R}_i}{R_i} \xi_i = 0 \quad (y = \ln R_i/R_1), \quad \xi_i(0) = \xi_{i0}, \quad \psi(0, y) = 0.$$

Здесь $\psi(t, y)$, $\xi_i(t)$ — амплитуды гармонического возмущения функции тока и границ кольца соответственно; ω — волновое число гармонического возмущения; $i = 1$ соответствует внутренней границе кольца, $i = 2$ — внешней.

Введем новую функцию $\varphi(t, y)$ по формуле

$$(4.5) \quad \varphi = \partial^2 \psi / \partial y^2 - \omega^2 \psi,$$

тогда уравнение (4.1) примет вид

$$(4.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\dot{R}_1}{R_1} e^{-2y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2\varphi \right) - \frac{\sigma_*}{4\dot{R}_1 R_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \omega^2 \varphi \right) + \\ + \frac{\nu e^{-2y}}{2R_1^2} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - 4 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 8\varphi \right) = 0.$$

5. Построение решения для кольца, сходящегося к своему центру. В этом случае справедливы асимптотические соотношения (3.11). Обозначим $\beta = R_1^2 e^{2y}$, которая является малой величиной ($\beta \rightarrow 0$ при $R_i \rightarrow 0$). Принимая в (4.6) соотношение

$\dot{R}_1 R_1 \sim 4\nu$, получим уравнение параболического типа

$$(5.1) \quad \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\sigma_* \beta}{16\nu^2} - i \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\sigma_* \omega^2 \beta}{16\nu} \varphi = 0.$$

Заметим, что уравнение (5.1) содержит малый параметр β сингулярным образом [19, 20]. Асимптотическое разложение решения по малому параметру в этом случае осуществляется в виде ряда

$$(5.2) \quad \varphi(t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_1^n(t, y) + \varphi_2^n(\tau, y)] \beta^n, \quad \tau = t/\beta.$$

Для сокращения выкладок и ясности изложения при получении асимптотического решения сингулярно возмущенного параболического уравнения (5.1) предполагаем β фиксированной величиной ($\beta = \text{const}$). С этой целью заметим, что производные $\dot{\beta} = 2\beta \dot{R}_1/R_1$, $\partial^n \beta / \partial y^n = 2n\beta$ не вносят особенностей при $\beta \rightarrow 0$, а влияют только на порядок точности в последующих членах ряда с номером $n \geq 1$. Относительно первого биннома ряда (5.2) $\varphi^0 = \varphi_1^0 + \varphi_2^0$ имеем из (5.1)

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial \tau} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial y^2} = 0,$$

отсюда получим

$$(5.3) \quad \varphi_1^0 = c_1(t) + c_2(t)y, \quad \varphi_2^0 = (c_3 \operatorname{ch} \sqrt{\nu/2} y + c_4 \operatorname{sh} \sqrt{\nu/2} y) \exp(-\nu^2 t/4\beta),$$

где c_3, c_4 — константы.

При известном φ^0 определяется с той же точностью решение для ψ^0 из (4.5) в виде

$$(5.4) \quad \psi^0 = c_5(t) e^{\omega y} + c_6(t) e^{-\omega y} + \frac{1}{\omega} \int_0^y \varphi^0(x) \operatorname{sh} \omega(y-x) dx.$$

Прежде чем подставить (5.4) в граничные условия (4.2), (4.3) и получить систему для определения неизвестных функций времени, отметим значения интегралов, необходимые в дальнейшем:

$$(5.5) \quad \int_0^\gamma \varphi^0(x) \operatorname{ch} \omega(\gamma-x) dx = \frac{c_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega\gamma + \frac{c_2}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega\gamma - 1) + \frac{e^{-\frac{\nu^2 t}{4\beta}}}{\left(\frac{\nu}{2} - \omega^2\right)} (a_1 c_3 + a_2 c_4),$$

$$\int_0^\gamma \varphi^0(x) \operatorname{sh} \omega(\gamma-x) dx = \frac{c_1}{\omega} (\operatorname{ch} \omega\gamma - 1) + \frac{c_2}{\omega^2} (\operatorname{sh} \omega\gamma - \omega\gamma) + \frac{e^{-\frac{\nu^2 t}{4\beta}}}{\left(\frac{\nu}{2} - \omega^2\right)} (a_1 c_4 + a_2 c_3),$$

$$\int_0^\gamma \varphi(x) \operatorname{ch}(\gamma-x) dx = \frac{c_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega\gamma + \frac{c_2}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega\gamma - 1) - \frac{\nu^2 \exp(-\nu^2 t/4\beta)}{4\beta \left(\frac{\nu}{2} - \omega^2\right)} (a_1 c_3 + a_2 c_4),$$

$$\gamma = \ln \kappa, \quad a_1 = \sqrt{\frac{\nu}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\nu}{2}} \gamma - \omega \operatorname{sh} \omega\gamma,$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{\nu}{2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\nu}{2}} \gamma - \omega \operatorname{ch} \omega\gamma, \quad \omega^2 \neq \nu/2.$$

При $\omega^2 = \nu/2$ функции a_i принимают несколько другой вид. Третьи слагаемые в (5.5) имеют порядок малости ниже при $\beta \rightarrow 0$, чем первые два, и при построении асимптотики решения влияния на первый член асимптотического ряда они не оказывают.

В дальнейшем, заменяя производную по t на R_1 согласно соотношению $d/dt = \dot{R}_1 d/R_1$, принимая во внимание асимптотические зависимости (3.11) и значения пределов $\lim \operatorname{ch}(\omega \ln \kappa)/\kappa^\omega = 1/2$, $\lim \operatorname{th}(\omega \ln \kappa) = 1$ при $\kappa \rightarrow \infty$, получим из (5.3)–(5.5) и (4.2), (4.3) систему

$$(5.6) \quad 4\omega(c'_5 - c'_6) R_1 + 2\omega^2(1 + 2\omega)c_5 - 2\omega^2(2\omega - 1)c_6 - 10c_1 - c_2 = 0,$$

$$2\omega(c'_5 - \kappa^{-2\omega} c'_6) + \omega^{-2}(\omega c'_1 + c'_2) - \frac{\sigma_* R_1}{(4\nu)^2} \left[\omega(\omega^2 + \omega - 2)c_5 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\omega(\omega^2 - \omega - 2)\kappa^{-2\omega}c_5 + \frac{(1+\omega)}{4\omega^2}c_1 + \frac{(\omega^{-2} + 2\omega^2 - 4)}{4\omega}c_2 \Big] = 0, \\
& 2\omega(\omega - 1)c_5 + 2\omega(\omega + 1)c_6 + c_1 = -\omega q_1 \xi_1 / R_1, \\
& 2\omega(\omega - 1)c_5 + 2\omega(\omega + 1)\kappa^{-2\omega}c_6 + \frac{1}{2}(1 - 2\omega^{-1} + \omega^{-2})c_1 + \\
& + \frac{1}{2}(\omega^{-1} - 2\omega^{-2} + \omega^{-3})c_2 = -\omega q_2 \frac{\xi_2}{R_1} \kappa^{-\omega-1},
\end{aligned}$$

где $q_i = \left(\sigma_* + 4\nu \frac{\dot{R}_i}{R_i} \right) / \left(\frac{\sigma_*}{4\dot{R}_i R_i} + \frac{\nu}{2R_i^2} \right)$; $q_1 \sim 32\nu$; $q_2 \sim 16\nu$.

Учитывая начальные условия для амплитуды возмущения функции тока на границах кольца $\Phi^0(0, 0) = \Phi^0(0, \gamma)$ при $t = 0$, можно принять $c_5(1) = c_6(1) = 0$ при $\bar{R}_i = 1$, когда постоянные c_j ($j = \overline{1,4}$) не равны нулю в начальный момент времени. Отсюда с точностью до главных членов относительно $\bar{R}_i \rightarrow 0$ и $\omega \gg 1$ решение системы (5.6) имеет вид

$$\begin{aligned}
(5.7) \quad c_1 &= -2\omega(\omega I_1 + 16\nu \xi_1 R_1^{-1}), \quad c_2 = 2\omega^2(\omega I_1 + 16\nu \xi_1 R_1^{-1}), \\
c_5 &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad c_6 = \frac{1}{2}(I_1 - I_2), \\
I_1 &= -8\omega \nu e^{-f_1} \int_1^{R_1} [p^{-2}(\xi_1 - \kappa^{-\omega-1}\xi_2) + 4\omega^{-2}p^{-1}\kappa^{-\omega-1}\xi_2'] e^{f_1(p)} dp, \\
I_2 &= -8\omega \nu \int_1^{R_1} (\xi_1 - \kappa^{-\omega-1}\xi_2) p^{-2} dp, \quad f_1(R_1) = \frac{a\omega^2}{2}(R_1^2 - 1), \quad a = \sigma_*/(4\nu)^2.
\end{aligned}$$

Подставляя (5.4) в (4.4), где заменяем производную по времени на радиус, получим относительно амплитуд гармонического возмущения границ кольца дифференциальные уравнения

$$(5.8) \quad (\xi_1 + R_1^{-1}\xi_1)\dot{R}_1 = \frac{\omega}{R_1}(c_5 + c_6), \quad (\xi_2' + \kappa^{-1}R_2^{-1}\xi_2)\dot{R}_1 = \frac{\omega}{R_2} [c_5 \kappa^\omega + c_6 \kappa^{-\omega} + \omega^{-2}c_1(\operatorname{ch} \omega\gamma - 1) + \omega^{-3}c_2(\operatorname{sh} \omega\gamma - \omega\gamma)].$$

Замечаем, что имеет место равенство

$$c_5 \kappa^\omega + c_6 \kappa^{-\omega} = I_1 \operatorname{ch} \omega\gamma + I_2 \operatorname{sh} \omega\gamma,$$

и вводим новую функцию по формуле

$$(5.9) \quad \eta = \kappa^{-\omega-1}\xi_2, \quad \kappa^{-\omega-1}\xi_2' = \eta' + (\omega + 1)\kappa^{-1}\eta.$$

Для определения ξ_1 , η из (5.7)–(5.9) получим систему интегродифференциальных уравнений. Чтобы исключить во втором уравнении системы два разнотипных интеграла, осуществляем вычитание удвоенного второго уравнения из первого, получим два дифференциальных уравнения первого порядка, включающих I_1 или I_2 . Обобщая интегралы, после почленного дифференцирования по радиусу имеем из (5.7)–(5.9) вследствие (3.11) систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(5.10) \quad R_1^2 \xi_1'' + (1 + a\omega^2 R_1^2) R_1 \xi_1' + \omega^2(2 + aR_1^2) \xi_1 + 8R_1 \eta' - 2\omega^2 \eta = 0, \\
\varepsilon_0^2 R_1^2 \eta'' - 2\omega \varepsilon_0^2 R_1 \eta' + 10\omega \varepsilon_0^2 \eta - \frac{1}{2} R_1^4 (R_1^2 \xi_1'' + R_1 \xi_1' - 2\omega^2 \xi_1) = 0.$$

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы (5.10) по малому параметру ε_0^2 определяется рядом [20], аналогичным (5.2). Первое приближение при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $R_1 \rightarrow 0$ системы (5.10) имеет вид

$$(5.11) \quad \xi_1 \sim [\gamma_1 (\alpha R_1^2)^m + \gamma_2 (\alpha R_1^2)^{-m}] \exp\left(-\frac{1}{4} a\omega^2 R_1^2\right), \\
\eta \sim \gamma_3 R_1^{n_1} + \gamma_4 R_1^{n_2}, \quad n_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + 2\omega \pm m_1),$$

где $m = i\omega/\sqrt{2}$; $\alpha = a\omega^2/2$; $m_1 = \sqrt{(1 - 2\omega)^2 - 32\omega}$; $\gamma_j = \text{const}$; $j = \overline{1,4}$.

Рассматривая действительную часть для ξ_1 и принимая во внимание (5.9), получим из (5.11) при $\bar{R}_i \rightarrow 0$ следующие асимптотики:

$$(5.12) \quad \xi_1 \sim (\gamma_1 + \gamma_2) \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}} \ln \alpha R_1^2\right), \quad \xi_2 \sim \varepsilon_0^{\omega+1} R_1^{-3/2} (\gamma_3 + \gamma_4 R_1^{-2\omega}).$$

Следовательно, в процессе инерционного схождения к центру вязкопластического кольца малые возмущения границ неограниченно возрастают на внешней границе, а на внутренней—имеют волновой характер с ограниченной амплитудой. При этом возмущение на внешней границе кольца возрастает с увеличением ε_0 . Последний параметр характеризует относительную толщину стенки кольца в начальный момент времени.

Отметим, что при инерционном движении вязкопластической кольцевой оболочки к своей оси схлопывания до нулевого внутреннего радиуса практически никогда не происходит. Например [21], в опытах по обжатию цилиндрических оболочек слоем взрывчатого вещества обнаружено взрывное испарение внутренних слоев оболочки за счет превращения кинетической энергии в тепловую. При этом отмечается существование внутреннего канала у обжатой оболочки. Обозначим $R_t = R_{1*}$ в момент остановки кольца, тогда из (5.12) в предположении о максимальной величине амплитуды гармонического возмущения на внутренней границе оболочки имеем $\alpha R_{1*}^2 = 1$. Отсюда вследствие (3.1) получим зависимость волнового числа от размерных параметров в виде

$$(5.13) \quad \omega_0 = \frac{4\mu}{R_{1*}} \left(\frac{2}{\rho\sigma_s} \right)^{1/2}.$$

6. Кольцо, расширяющееся от центра. В этом случае имеем асимптотические соотношения (3.12). Обозначим в качестве малого параметра $\beta = \dot{R}_1/R_1$, тогда из (4.6) получим сингулярно возмущенное уравнение

$$(6.1) \quad 4\beta R_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 4\beta^2 R_1^2 e^{-2y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - 2\Phi \right) - \sigma_* \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \omega^2 \Phi \right) + 2\nu\beta e^{-2y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 8\Phi \right) = 0.$$

Асимптотическое разложение решения по параметру β осуществляется в виде ряда (5.2). Отметим, что имеют место равенства

$$(6.2) \quad \dot{\beta} = (\ddot{R}_1 R_1 - \dot{R}_1^2) R_1^{-2}, \quad \dot{\tau} = (1 - \dot{\beta}) \beta^{-1}, \quad \text{где } \tau = t/\beta.$$

С точностью до первого порядка малости имеем при $\beta \rightarrow 0$ систему

$$(6.3) \quad \frac{\partial^2 \Phi_1^0}{\partial y^2} - \omega^2 \Phi_1^0 = 0, \quad 4R_1^2 (1 - \dot{\beta}) \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial \tau} - \sigma_* \left(\frac{\partial^2 \Phi_2^0}{\partial y^2} - \omega^2 \Phi_2^0 \right) = 0.$$

Из (6.2), (6.3) получим

$$(6.4) \quad \Phi_1^0(t, y) = C_1(t) \operatorname{ch} \omega y + C_2(t) \operatorname{sh} \omega y, \\ \Phi_2^0(t, y) = (C_3 + C_4 y) \exp \left[-\omega^2 \int_0^{t/\beta} b(\tau) d\tau \right],$$

где $b = \sigma_*/4R_1^2(1 - \dot{\beta})$ ($C_3, C_4 - \text{const}$).

При известной функции $\Phi^0 = \Phi_1^0 + \Phi_2^0$ из (4.5) определяется значение для Ψ^0 соотношением (5.4). Повторяя последовательность рассуждений п. 5 и отмечая предельные значения (3.12), в частности $\operatorname{sh} \gamma \xi \sim \varepsilon_0 R_1^{-2}$, $\operatorname{ch} \gamma \xi \sim 1$, а также рассматривая решение системы для неизвестных функций времени в виде асимптотического ряда по малому параметру ε_0 (см., например, [20]), получим для первого члена ряда (при $\varepsilon_0 = 0$, когда $\xi_1 = \xi_2 = \xi$) уравнение относительно ξ

$$(6.5) \quad \frac{d\xi}{d\tau} \dot{\tau} + \left(\beta + \frac{q_1}{2R_1^2} \right) \xi + bR_1^{-1} \left[C_2 + 3\omega^2 e^{-f_2} \int_0^{\tau} bC_2 e^{f_2(\tau)} d\tau \right] = 0,$$

где функции времени q_1, f_2, C_2 определяются из соотношений

$$(6.6) \quad q_1 = 4\beta R_1^2 (\sigma_* + 4\nu\beta)/(\sigma_* + 2\nu\beta), \quad f_2(\tau) = -3\omega^2 \int_0^{\tau} b(\tau) d\tau, \\ \frac{d^2 C_2}{d\tau^2} + (2 - 3\omega^2 b) \frac{dC_2}{d\tau} - 2b(2 + 3\omega^2) C_2 = 0.$$

Обособляя интеграл в (6.5), после дифференцирования уравнения (6.5) по переменной τ получим

$$(6.7) \quad B \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \left(\frac{dB}{d\tau} + A - 3\omega^2 b \right) \frac{d\xi}{d\tau} + \left(\frac{dA}{d\tau} - 3\omega^2 b A \right) \xi + \frac{dC_2}{d\tau} = 0, \\ B = \frac{4R_1^2 (1 - \dot{\beta})^2}{\beta\sigma_*}, \quad A = \frac{B}{\tau} \left(1 + 2 \frac{\sigma_* + 4\nu\beta}{\sigma_* + 2\nu\beta} \right).$$

Введем новую переменную $p = R_1/R_{1*} - 1$, где R_{1*} — значение внутреннего радиуса кольца в момент остановки. При расширении кольца имеем $R_1 \rightarrow R_{1*}$, отсюда $p \rightarrow 0$. Переходя к новой переменной в (6.6), (6.7), получим относительно $\xi(p)$, $C_2(p)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(6.8) \quad B \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 \xi'' + \left[B \frac{d^2 p}{d\tau^2} + \left(\frac{dB}{d\tau} - 3\omega^2 b + A \right) \frac{dp}{d\tau} \right] \xi' + \\ + \left(\frac{dA}{d\tau} - 3\omega^2 b A \right) \xi + C_2' \frac{dp}{d\tau} = 0, \\ \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 C_2'' + \left[\frac{d^2 p}{d\tau^2} + (2 - 3\omega^2 b) \frac{dp}{d\tau} \right] C_2' - 2b(2 + 3\omega^2) C_2 = 0,$$

здесь штрих означает дифференцирование по переменной p .

Как следует из (3.12) с точностью до первого порядка малости относительно p , справедливы соотношения $\beta \sim p(1-p)$, $\dot{\beta} \sim -[\sigma_* R_{1*}^{-2} + \dot{p}^2](1-2p)$, $\ddot{\beta} \sim 2p \times \times (2\sigma_* R_{1*}^{-2} + \dot{p}^2)(1-3p)$, отсюда

$$\frac{dp}{d\tau} = \dot{\tau}^{-1} \dot{p} \simeq \dot{p}^2 (1+k)^{-1}, \quad \frac{d^2 p}{d\tau^2} = \dot{\tau}^{-1} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{p}}{\dot{\tau}} \right) \simeq -2k(1+k)^{-2} \dot{p}^2, \quad k = \sigma_* R_{1*}^{-2}.$$

После линеаризации коэффициентов в (6.8) получим систему

$$(6.9) \quad \dot{p}^3 \xi'' - k \dot{p} \xi' - \frac{9\omega^2}{4} k \xi + \frac{k \dot{p}^2}{4R_{1*}(1+k)} C_2' = 0, \\ \dot{p}^4 C_2'' + \left(2 - \frac{3\omega^2 k}{4} \right) \dot{p}^2 C_2' - \left(1 + \frac{3}{2} \omega^2 \right) k (1+k) C_2 = 0.$$

При фиксированном малом параметре \dot{p} решение системы (6.9) имеет вид [16]

$$(6.10) \quad \xi = m_1 \exp(n_1 p / \dot{p}^2) + m_2 \exp(n_2 p / \dot{p}^2) - \frac{k \dot{p} R_{1*}^{-1}}{2\lambda(k+1)} \times \\ \times \int_0^p C_2'(q) e^{-\frac{k}{2\dot{p}^2}(q-p)} \operatorname{sh} \frac{\lambda(p-q)}{2\dot{p}^2} dq, \\ C_2 = m_3 \exp(n_3 p / \dot{p}^2) + m_4 \exp(n_4 p / \dot{p}^2).$$

Здесь m_j , $j = \overline{1,4}$ — постоянные интегрирования; n_j и λ определяются равенствами

$$n_1 = \frac{1}{2}(\lambda + k), \quad n_2 = -\frac{1}{2}(\lambda - k), \quad \lambda = k \sqrt{1 + 9\omega^2 \dot{p} / k}, \\ n_{3,4} = \pm \lambda_1 - 1 + \frac{3}{8} k \omega^2, \quad \lambda_1 = \left[1 + k \left(1 + k + \frac{3}{4} \omega^2 + \frac{3}{2} \omega^2 k \right)^{1/2} \right].$$

Учитывая предельные равенства

$$\lim_{p \rightarrow 0, \dot{p} \rightarrow 0} (p/\dot{p}) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow 0, \dot{p} \rightarrow 0} (p/\dot{p}^2) = 1/2k,$$

имеем из (6.10) в асимптотическом приближении относительно амплитуды гармонического возмущения границ кольца зависимость

$$\xi \sim \text{const} + \text{const} \left[p \left(n_3 - k - \frac{9}{4} \omega^2 \dot{p} \right) \right]^{-1},$$

отсюда следует $\xi \rightarrow \infty$ при $\dot{p} \rightarrow 0$. В особом случае $n_3 = k$ неустойчивость движения кольца экстремальна. При интенсивном расширении оболочки из $n_3 = k$ имеем соотношение на волновое число $\omega_*^2 \simeq \frac{8}{3k} \left(1 + \frac{5}{4} k \right)$. Пусть $\varepsilon_* = \ln R_{1*}/R_{10}$ — предельная величина логарифмической деформации кольца. Принимая во внимание (3.1), получим для волнового числа, характеризующего неустойчивое формоизменение вязкопластической оболочки, зависимость от размерных параметров в виде

$$(6.11) \quad \omega_* = \frac{2V_{10} e^{\varepsilon_*}}{\sqrt{3\sigma_s/2\rho}} \left(1 + \frac{5\sigma_c}{4\rho V_{10}^2} e^{-2\varepsilon_*} \right)^{1/2}.$$

Таблица 1

№ п/п	$I_0 \cdot 10^{-2}$ кН·с/м ²	ε_{2*}	ω_0	ω_0
1	0,10	0,11	6	3—4
2	0,10	0,36	6	5—6
3	0,10	0,41	8	5—7
4	0,23	0,36	8	5—6
5	0,63	0,77	7	8—10
6	0,53	0,53	7	8—10
7	0,16	0,72	7	9—11

Таблица 2

№ п/п	V_{10} , м/с	s_0 , мм	ω_0	ω'_*	ω'_1
1	450	2	20	24	28
2	240	4	12	10	8
3	200	6	6	7	5
4	1000	2	40	50	63
5	500	4	23	18	17
6	370	6	16	11	9
7	1100	4	50	37	38

7. Обсуждение. Рассмотрим экспериментальную оценку полученных выражений (5.13), (6.11). Известны опытные данные [22] по импульсной нагрузке металлических труб подрывом зарядов взрывчатого вещества, концентрически расположенных на внешней поверхности оболочки. В опытах использовались бесшовные трубы из ст. 10 и ст. 20. Как следует из экспериментов, схождение стенок трубы к ее оси сопровождается потерей устойчивости и приводит к волнообразованию на границах оболочки [22, 23].

В табл. 1 приведены опытные данные удельного импульса I_0 , относительная деформация $\varepsilon_{2*} = (R_{20} - \bar{R}_{2*})/\bar{R}_{20}$ в центральном сечении сжатой трубы и число волн (складок) ω_0 в этом сечении. В опытах 1—3 материал труб ст. 10, в остальных — ст. 20. Геометрические размеры труб $R_{20} \times s_0 \times h$ в опытах 1—2, 4—6 — $54 \times 4 \times 216$ мм, 3 — $54 \times 4 \times 1080$ мм, 7 — $54 \times 4 \times 360$ мм. Расчет количества волн ω_0 по формуле (5.13) осуществлялся при коэффициенте динамической вязкости для стали [24, 25] $\mu = (4-5) \cdot 10^4$ кг/(м·с), плотность $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. Динамический предел текучести для ст. 10 и ст. 20 вычислен на основании статистических экспериментальных данных согласно [26], и принято в расчетах соответственно $\sigma_s = 0,37$ ГПа, $\sigma_s = 0,41$ ГПа. Значение \bar{R}_{2*} определялось из условия несжимаемости материала, откуда следует

$$R_{2*}^2 - R_{1*}^2 = R_{20}^2 - R_{10}^2, \text{ где } \bar{R}_{2*} = R_{20}(1 - \varepsilon_{2*}).$$

Известные расчетные формулы [5, 27] по динамической теории потери устойчивости цилиндрических оболочек при пластическом течении дают более приближенные оценки по сравнению с выражением (5.13) или формулой [28], полученной в схеме упругой потери устойчивости тонкостенных труб. Подробнее этот вопрос отмечался в [2, 22, 28]. Отметим, что в случае тонкостенных оболочек ($s_0/R_{20} \leq 0,05$) расчет гармоник по формуле (5.13) дает заниженный результат в сравнении с экспериментом. Введение в (5.13) множителя $\sqrt{R_{20}/s_0}$ дает хорошее совпадение с экспериментом и в случае существования тонкостенных оболочек (ср., например, опытные данные [4, 28]).

Рассмотрим опытный результат по безоправочному редуцированию трубы из ст. 20 (см. фиг. 3). Здесь $R_{1*} = 26,5$ мм, остальные параметры приведены выше, из (5.13) получим $\omega_0 \approx 4$, что согласуется с действительностью. Исследования в лабораторных и промышленных условиях показали уменьшение поперечной разностенности при продольной прокатке труб на многоклетевых станах от применения в первых клетях стана валков с волнообразным профилем ($\omega_0 = 6-8$) [29].

Остановимся теперь на оценке соотношения (6.11) относительно осколкообразования при разрушении металлических колец и труб под действием продуктов взрыва. Из известных теоретических [12, 17] и экспериментальных [30, 31] результатов следует, что закон изменения количества осколков от начальной скорости расширения оболочки близок к линейному. В табл. 2 показано соответствие опытных данных [30] количества осколков ω_0 при разрушении колец из алюминия ($\sigma_s = 0,12$ ГПа, $\varepsilon_* = 0,28$, $\rho = 2,75 \cdot 10^3$ кг/м³). Здесь меняются толщины стенки кольца s_0 и скорость расширения последнего. Высота кольца и заряда ВВ 10 мм, внутренний радиус 20 мм. Введем в (6.11) масштабный множитель $(R_{20}/s_0)^{3/2}$ по формуле $\omega'_* = \omega_* (R_{20}/s_0)^{2/3}$. В табл. 2 представлены расчет ω'_* и эксперимент ω_0 , показывающие удовлетворительное соответствие.

В [32] на основе известного критерия разрушения получено выражение $l_* = c\varepsilon_{2*}R_{20}/V_{10}$ для оценки средней длины осколка при разрушении металлической оболочки, расширяющейся в инерционном режиме. Здесь c — скорость звука (стержневая) в материале кольца; $\varepsilon_{2*} = R_{2*}/R_{20} - 1$. Отсюда (см., например, [12]) количество осколков определяется равенством $\omega_1 = 2\pi R_{2*}/l_*$. В качестве масштабного множителя возьмем линейную зависимость (R_{20}/s_0) , тогда получим

$$(7.1) \quad \omega'_1 = \frac{2\pi V_{10} R_{20}}{c s_0 \varepsilon_{2*}} (\text{где } \varepsilon_{2*}).$$

Результаты расчета по формуле (7.1) для описанной выше серии экспериментов [30] сведены в табл. 2, откуда следует близость значений ω'_* и ω'_1 . Отметим, что точ-

ность количественного сопоставления расчета с экспериментом здесь существенно зависит от величины предельной относительной (логарифмической) деформации. В общем случае последняя зависит от скорости деформирования и толщины образца, тогда как выше в расчетах принималась постоянной. Возможно, этим объясняется необходимость введения масштабных множителей типа R_{20}/s_0 .

Таким образом, задача об устойчивости инерционного движения кольцевой оболочки по отношению к малым гармоническим возмущениям границ, вектора скорости и тензора напряжений в схеме вязкопластической среды позволяет выявить волновое число гармоник, при котором ожидается максимальный рост амплитуды возмущения границ. В случае схождения кольца к своей оси количество неустойчивых гармоник существенно зависит от значения коэффициента динамической вязкости материала оболочки, тогда как в процессе расширения кольца эта зависимость проявляется во втором порядке малости. Вывод соотношений для оценки количества складок и осколков при потере устойчивости (разрушении) реальных металлических колец не противоречит экспериментальным и теоретическим результатам, а в некоторых случаях имеет хорошее опытное соответствие.

Поступила 15 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем.— ДАН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Stüiver W. On the buckling of rings subject to impulsive pressures. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, N 3. Рус. пер.— Прикл. механ. Тр. Амер. о-ва инж.-механ., 1965, т. 32, № 3.
3. Anderson D. L., Lindberg H. E. Dynamic pulse buckling of cylindrical shells under transient lateral pressures — AIAA J., 1968, vol. 6, N 4. Рус. пер.— Ракетн. техника и космонавтика, 1968, № 4.
4. Florence A. L. Buckling of viscoplastic cylindrical shells due to impulsive loading.— AIAA J., 1968, vol. 6, N 3. Рус. пер.— Ракетн. техника и космонавтика, 1968, № 3.
5. Малый В. Н. Потеря устойчивости пластической оболочки при обжатии сильным импульсом давления.— В кн.: Труды VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973.
6. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной жидкости в полосе и кольце.— ПМТФ, 1964, № 2.
7. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры.— В кн.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967.
8. Андреев В. К., Пухначев В. В. О движении конечной массы жидкости.— ПМТФ, 1979, № 2.
9. Гуляев Г. Н., Ившин П. П. и др. Технология непрерывной безоправочной прокатки труб. М.: Metallургия, 1975.
10. Столетний М. Ф., Клемнерт Е. Д. Точность труб. М.: Metallургия, 1975.
11. Кошелев Э. А., Кузнецов В. М. и др. Статистика осколков, образующихся при разрушении твердых тел взрывом.— ПМТФ, 1971, № 2.
12. Кузнецов В. М. О разрушении металлических колец в пластическом состоянии.— ФГВ, 1973, т. 9, № 4.
13. Сериков С. В. Влияние локальных возмущений на разрушение металлических колец взрывом.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1974.
14. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута.— ПММ, 1943, т. VII, № 2.
15. Санасарян Н. С. Вязкопластическая деформация труб при взрыве ВВ в зависимости от свойств окружающей среды.— ФГВ, 1971, т. 7, № 4.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
17. Сериков С. В. Об устойчивости течения металлических колец под действием взрыва.— ФГВ, 1975, т. 11, № 1.
18. Сериков С. В. Об устойчивости течения плоского пластического кольца со свободными границами.— ПМТФ, 1975, № 2.
19. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
20. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
21. Матюшкин Н. Н., Тришин Ю. А. Взрывное испарение вещества вязкой цилиндрической оболочки при ее схлопывании к центру.— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 10.
22. Иванов А. Г., Минеев В. Н., Тюнькин Е. С. Импульсное схлопывание стальных цилиндрических оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2.
23. Иванов А. Г., Клещевников О. А. и др. Потеря устойчивости стальной трубы при коротком асимметричном ударе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
24. Годунов С. К., Дерibas А. А. и др. Исследование вязкости металлов при высокоскоростных соударениях.— ФГВ, 1971, т. 7, № 1.
25. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела.— Учен. зап. МГУ. Механика, 1940, вып. 39.

26. Гладков В. М., Кудрявцева Л. А., Сухин В. П. О соотношении между статическими механическими характеристиками и импульсным напряжением в металлических стержнях.— ПМТФ, 1977, № 5.
27. Abrahamson G. B., Goodier J. N. Dynamic plastic flow buckling of a cylindrical shell from uniform radial impulse.— In: Proc. 4th U. S. National Congress Appl. Mech., Berkeley, California. Vol. 2. N. Y.: ASME, 1962.
28. Lindberg H. E. Buckling of very thin cylindrical shell due to an impulsive pressure.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, N 2. Рус. пер.— Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1964, т. 31, № 2.
29. Блинов Ю. И., Сериков С. В. и др. Валок для продольной прокатки труб.— БИ, 1982, № 33.
30. Черников А. Г. Разрушение колец из алюминия и дюралюминия под действием интенсивной радиальной нагрузки.— ФГВ, 1976, т. 12, № 4.
31. Banks E. E. The fragmentation behavior of thin-walled metal cylinders.— J. Appl. Phys., 1969, N 4.
32. Сериков С. В. Нестационарное расширение до разрушения сжимаемого кольца в схеме идеальной пластичности.— ФГВ, 1980, т. 16, № 4.

УДК 539. 30

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБОЛОЧКИ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Л. И. ШКУТИН

(Новосибирск)

Сформировавшаяся в [1, 2] нелинейная двумерная модель оболочки типа Тимошенко обобщена в данной работе за счет сохранения поперечного нормального напряжения. При построении обобщенной модели деформация оболочки подчинена кинематической связи, обеспечивающей однородность по толщине оболочки поперечной деформации растяжения — сжатия, и применен разработанный в [3, 4] метод явного выделения поля конечных поворотов.

В результате трехмерная нелинейная задача для оболочки расщеплена на две последовательно решаемые задачи: двумерную нелинейную задачу, определяющую продольные компоненты тензоров деформаций и напряжений, и одномерную (по поперечной координате) линейную задачу, определяющую поперечные компоненты этих тензоров.

В отличие от [1, 2, 4] дифференциальный порядок двумерной нелинейной задачи равен двенадцати, а число ее естественных контурных условий равно шести.

При изложении материала сохранены обозначения, принятые в [4]. Прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2.

1. Формулировка двумерных кинематических и динамических уравнений. Пусть t_M — пространственная система криволинейных координат, связанная с базисной поверхностью b оболочки (параметры t_1 и t_2 — внутренние координаты этой поверхности, параметр t_3 — нормальная к ней координата). Введенной системе координат ставятся в соответствие два начальных базиса: трехмерный базис $A_{(N)}(t_M)$, определенный во всем объеме оболочки, и двумерный базис $a_{(N)}(t_m)$, определенный на базисной поверхности.

Деформация оболочки преобразует начальные базисы в соответствующие мгновенные базисы $A_{(N)}(t_M)$ и $a_{(N)}(t_m)$ (возможная зависимость от времени предполагается, но явно не указывается). Из полного их преобразования выделяется жесткий поворот, порождающий повернутые базисы $A_{[N]}(t_M)$ и $a_{[N]}(t_m)$. Длина нормального вектора $a_{(3)}$ принимается по определению постоянной (не обязательно единичной). В процессе деформации этот вектор преобразуется в мгновенный вектор $a_{(3)}$, не являющийся нормальным к деформированной базисной поверхности и имеющий длину, отличную от начальной. Соответствующий повернутый вектор $a_{[3]}$ принимается по определению коллинеарным мгновенному, так что

$$a_{(3)} = (a_{33} + u_{[33]})a^{[3]}, \quad \{a_{[3]} \| a_{(3)} \Rightarrow a^{[3]} \| a_{(3)}\}.$$

Скалярная функция $u_{[33]}(t_m)$ является мерой удлинения нормального вектора при деформации.

Пусть в любой момент времени деформация оболочки подчиняется кинематической связи

$$(1.1) \quad A_{(3)} = a_{(3)},$$

обеспечивающей однородность по толщине оболочки поперечной деформации растяжения — сжатия. Следствием связи (1.1) является линейное распределение по нормальной координате поля перемещений оболочки:

$$(1.2) \quad U = u + t_3 w, \quad w = a_{(3)} - a_{(3)}$$