ПМТФ, № 3, 1970

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. О. Бытев

(Новосибирск)

Рассматривается плоская задача о вращательно-симметричном движении вращающегося кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей.

Получена теорема существования и единственности решения задачи. Исследованы качественные свойства решения и его асимптотика при $t \to \infty$.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая жидкость заполняет в начальный момент кольцо $R_{20} < r < R_{10}$ и имеет заданное распределение радиальных и угловых скоростей, обладающее вращательной симметрией.

Требуется изучить движение кольца по инерции. Начальные условия обладают вращательной симметрией, поэтому естественно искать решение задачи в том же классе. Как будет показано ниже, в этом классе задача однозначно разрешима.

Имеет ли она решения, не обладающие осевой симметрией, неизвестно. В качестве математической модели движения используется система уравнений Навье — Стокса, которую следует решить в области $t > 0$, $R_2(t) < r < R_1(t)$. Здесь $r = R_{1,2}(t)$ — соответственно внешняя и внутренняя границы кольца, которые заранее неизвестны. Уравнение неразрывности в полярных координатах $d(rv_r) / dr = 0$ легко интегрируются, и получается

$$v_r = r^{-1}\Phi(t) \tag{1.1}$$

Поэтому систему уравнений Навье — Стокса в полярных координатах можно записать так:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\Phi^2}{r^3} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Phi}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\Phi v}{r^2} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) \tag{1.3}$$

Здесь $v \equiv v_\theta$, а $\rho = 1$, что не нарушает общности. Из равенства нулю вектора напряжений на свободной границе получим следующие краевые условия:

$$\tau_{rr} = -p - \frac{2\nu\Phi}{r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \qquad \text{при } r = R_{1,2}(t)$$

$$\tag{1.4}$$

Из уравнения (1.2) с помощью (1.4) находим

$$\int\limits_{R_2(t)}^{R_1(t)} \frac{v^2}{r}\,dr - \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right)\left(2\nu\Phi - \frac{\Phi^2}{2}\right) - \frac{d\Phi}{dt}\ln\frac{R_1}{R_2} = 0 \tag{1.5}$$

К соотношению (1.5) следует добавить начальное условие

$$\Phi(0) = \Phi_0. \tag{1.6}$$

Кинематическое условие на свободной границе

$$\frac{d\,[R_{1,2}(t)]}{dt} = \frac{\Phi(t)}{R_{1,2}(t)} \tag{1.7}$$

дает интеграл площадей

$$R_1^2 - R_2^2 = R_{10}^2 - R_{20}^2, \qquad R_{i0} = R_i(0) \qquad (i = 1,2)$$

Начальное и краевое условия для уравнения (1.3) имеют следующий вид:

$$v(r,\ 0) = v_0(r) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0, \quad t \geqslant 0, \quad r = R_{1,2}(t) \tag{1.9}$$

Отметим, что для уравнения (1.3) выполняется закон сохранения момента количества движения

$$\int\limits_{R_2(t)}^{R_1(t)} r^2 v(r,\, t)\, dr = \int\limits_{R_{20}}^{R_{10}} r^2 v_0(r)\, dr \tag{2.10}$$

В полученной системе перейдем к новым независимым переменным и искомым функциям по следующим формулам:

$$\eta = \frac{r^2 - R_2^2(t)}{R_{20}^2}, \qquad t = \frac{R_{20}^2}{\nu}\tau \tag{1.11}$$

$$v = \frac{\nu}{R_{20}^2} r\omega, \quad \xi = \frac{R_2^2(t)}{R_{20}^2}, \quad \psi = \frac{\Phi}{\nu}$$

Кроме того, введем обозначение

$$a = R_{10}^2 \,/\, R_{20}^2 - 1$$

Тогда задача (1.3), (1.5)—(1.9) примет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{2\psi}{\xi + \eta}\omega = 4(\xi + \eta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + 8\frac{\partial\omega}{\partial\eta} \tag{1.12}$$

$$\omega\,|_{\tau=0} = \omega_0(\eta) \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant a) \tag{1.13}$$

$$\partial\omega \,/\, \partial\eta = 0, \ \tau \geqslant 0, \ \eta = 0,\ a \tag{1.14}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{a\psi(\psi - 4)}{\xi(\xi + a)\ln(1 + a/\xi)} + \frac{1}{\ln(1 + a/\xi)}\int\limits_0^a \omega^2\, d\eta \tag{1.15}$$

$$d\xi / d\tau = 2\psi, \ \psi(0) = \psi_0, \ \ \xi(0) = 1 \tag{1.16}$$

Следует отметить, что в результате проведенной замены удается перейти от краевой задачи с неизвестной границей к задаче в фиксированной области $\{0 \leqslant \eta \leqslant a,\ \tau \geqslant 0\}$

2. Радиальное движение кольца. Если $\omega \equiv 0$, то задача (1.12)—(1.16) существенно упрощается и приводится к задаче Коши (1.15), (1.16).

Выбирая в уравнении (1.15) в качестве независимой переменной ξ и используя (1.16), имеем

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{d\tau} = 2\psi\frac{d\psi}{d\xi}, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{a(\psi - 4)}{2\xi(\xi + a)\ln(1 + a/\xi)} \tag{2.1}$$

$$\psi\,|_{\xi=1} = \psi_0 \tag{2.2}$$

Как будет показано ниже, знак $d\xi / d\tau$ при всех $\tau \geqslant 0$ совпадает со знаком

$$\left.\frac{d\xi}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 2\psi_0$$

Случай $\psi_0 \geqslant 0$ описывает расхождение, а $\psi_0 < 0$ — схождение кольца.

Интегрируя уравнение (2.1) с условием (2.2), получаем

$$\psi = 4 + \frac{(\psi_0 - 4)\sqrt{\ln(1+a)}}{\sqrt{\ln(1+a/\xi)}} \tag{2.3}$$

Пусть $\psi_0 < 0$, тогда при

$$\xi = \xi_0^* = \frac{a}{(1+a)^\varkappa - 1}, \qquad \varkappa = \left(\frac{4-\psi_0}{2}\right)^2$$

функция ψ обращается в нуль, причем $0 < \xi_0^* < 1$ для любых $\psi_0 < 0$. Это означает, что кольцо сходится до критического радиуса. Вследствие (1.16)

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = t \tag{2.4}$$

Из представления (2.3) следует, что время схождения кольца до критического радиуса бесконечно, а скорость экспоненциально стремится к нулю.

Пусть $\psi_0 > 0$, что соответствует расхождению кольца. Возможно три случая:

1) если $\psi_0 > 4$, то $\psi = O(\sqrt{\xi})$. Тогда $R_2(t) \sim t$ и скорость расширения кольца асимптотически постоянна;

2) если $\psi_0 = 4$, то $\psi \equiv 4$. В этом случае $R_2(t) \sim \sqrt{t}$, а скорость расширения $R_2' \sim 1 / \sqrt{t}$;

3) если $\psi_0 < 4$, то кольцо расходится за бесконечное время до критического радиуса, а скорость расширения экспоненциально стремится к нулю.

3. Априорные оценки. Пусть $\xi(\tau)$, $\psi(\tau)$ — непрерывные функции и $\xi(\tau) > 0$, тогда решение ω задачи (1.12) —(1.14) удовлетворяет следующей энергетической оценке:

$$\int\limits_0^a \omega^2 d\eta \leqslant \frac{ca}{\xi(\xi+a)} \tag{3.1}$$

Для доказательства умножим уравнение (1.12) на $(\xi + \eta)\omega$. Получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}[(\xi+\eta)\omega^2] + \frac{1}{2}\xi'\omega^2 = 4\frac{\partial}{\partial\eta}[(\xi+\eta)^2\omega\omega_\eta] - 4(\xi+\eta)^2\omega_\eta^2$$

Здесь $\xi' \equiv d\xi/d\tau = 2\psi$ согласно (1.16). Проинтегрируем это равенство по η от 0 до a. Используя краевые условия (1.14) и неотрицательность $(\xi+\eta)^2\omega_\eta^2$, получаем

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^a (\xi+\eta)\omega^2 d\eta + \xi'\int\limits_0^a \omega^2 d\eta \leqslant 0$$

Но

$$\int\limits_0^a \omega^2 d\eta \geqslant \frac{1}{\xi+a}\int\limits_0^a (\xi+\eta)\omega^2 d\eta$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^a (\xi+\eta)\,\omega^2 d\eta + \frac{\xi'}{\xi+a}\int_0^a (\xi+\eta)\,\omega^2 d\eta \leqslant 0$$

Введем обозначение

$$\int_0^a (\xi+\eta)\,\omega^2 d\eta \equiv J$$

Тогда в силу неотрицательности J из последнего неравенства следует:

$$J \leqslant \frac{ca}{\xi+a}\left(c=\frac{1}{a}\int_0^a (1+\eta)\,\omega_0{}^2(\eta)\,d\eta\right) \qquad (3.2)$$

Так как

$$J \geqslant \xi \int_0^a \omega^2 d\eta$$

то требуемая оценка получена. Отметим, что для решения ω задачи (1.12)—(1.14) справедлив принцип максимума в следующей форме [2]. При любых непрерывных $\xi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\xi(\tau) > 0$, $|\psi| < \infty$ функция $u = (\xi+\eta)\omega$ достигает экстремума либо при $\tau \geqslant 0$, $\eta = 0, a$, либо при $\tau = 0$, $0 \leqslant \eta \leqslant a$.

Теперь установим априорные оценки на ξ и ψ. Рассмотрим случай $\psi_0 < 0$. Выбирая в уравнении (1.15) в качестве независимой переменной ξ, получаем

$$2\psi\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{a\psi(\psi-4)}{\xi(\xi+a)\ln(1+a/\xi)} + \frac{1}{\ln(1+a/\xi)}\int_0^a \omega^2 d\eta \qquad (3.3)$$

Уравнение (2.1) в этом случае является мажорирующим для уравнения (3.3). Обозначим через ψ_1 решение уравнения (2.1), удовлетворяющее тому же начальному условию, что и ψ. На основании дифференциального неравенства типа Чаплыгина получаем $\psi_1 < \psi$. Производные

$$d\xi\,/\,d\tau = 2\,\psi, \qquad d\xi_1\,/\,d\tau = 2\psi$$

поэтому

$$0 < \xi_1(\tau) < \xi(\tau)$$

В качестве миноранты можно взять $\xi = 1$, так как $d\psi\,/\,d\xi$ ограничена в интервале $[\xi_0{}^*, 1]$.

Отсюда заключаем, что при $\psi_0 < 0$ и любой непрерывной $\omega_0(\eta)$ существует такое ξ^*, $\xi_0{}^* < \xi^* \leqslant 1$, что $\psi(\xi^*) = 0$. Можно получить более точную оценку сверху на ξ^*, если воспользоваться минорирующим уравнением

$$2\varphi\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{a\varphi(\varphi-4)}{\xi(\xi+a)\ln(1+a/\xi)} + \frac{ac}{\xi(\xi+a)\ln(1+a/\xi)} \qquad (3.4)$$

где C определена (3.2). Эта оценка не приводится ввиду громоздкости. Можно показать, что при $\psi_0 < 0$ вращающееся кольцо сходится до критического радиуса за конечное время.

Действительно, пусть $\xi \to \xi^*$, тогда первый член в правой части уравнения (3.3) стремится к нулю, а второй член — к конечной величине, отличной от нуля. Если она была бы равна нулю, то вследствие принципа максимума для функции $u = (\xi+\eta)\omega$ получим, что $\omega \equiv 0$.

Поэтому $\psi = O(\sqrt{\xi^* - \xi})$ и интеграл

$$\int_1^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = t$$

сходится при $\xi \to \xi^*$.

Отсюда и вытекает доказываемое утверждение.

В случае $\psi_0 \geqslant 0$ неравенство (3.1) позволяет записать мажорирующее уравнение для (3.3), уравнение (2.1) будет минорирующим. Тем самым получаем априорную оценку $|\psi| \leqslant K(T)$ для $(0, T)$ с любым $T < \infty$. После того как получены оценки на (3.1), а также оценки для $\psi(\tau)$ можно перейти к доказательству теоремы существования и единственности.

4. Теорема существования и единственности. При любой непрерывной $\omega_0(\eta)$ и любой ψ_0 существует единственное решение задачи (1.12)—(1.16) для всех $t \geqslant 0$.

Приведем сокращенное доказательство. Введем в рассмотрение пространство $C = C[0,\tau_1]$, элементами которого являются непрерывные на $[0,\tau_1]$ вектор-функции $\lambda\{\xi(\tau), \psi(\tau)\}$ с нормой

$$||\lambda|| = \max_\tau \{\max|\xi|, \ |\psi|\}$$

Задаем $\lambda_1\{\xi_1(\tau), \psi_1(\tau)\}$, непрерывную на $[0, \tau_1]$, и подставляем ξ_1 и ψ_1 вместо ξ, ψ в уравнение (1.12). Тогда функция ω однозначно определяется как решение второй краевой задачи (1.12) —(1.14) ([2], гл. 5) и имеет место оценка

$$\int_0^a \omega^2 d\eta \leqslant K(\tau_1) \qquad (\xi \geqslant \delta > 0)$$

По найденному ω определяются ξ, ψ как решение задачи Коши (1.15), (1.16). Тем самым определен оператор T, ставящий в соответствие паре функций $\{\xi_1, \psi_1\}$ пару функций $\{\xi, \psi\}$. В силу полученных априорных оценок для ξ, ψ, а также (3.1) этот оператор переводит шар $||\lambda - \lambda_0|| < k$ пространства $C[0, \tau_1]$ в себя. Здесь $\lambda_0 = \{1, \psi_0\}$. Кроме того, оператор T — сжимающий; этого легко добиться за счет малости τ_1. Ясно, что наличие неподвижной точки у оператора T доказывает теорему существования и единственности задачи (1.12)—(1.18) для достаточно малого τ_1. Существование равномерной априорной оценки для

$$\int_0^a \omega^2 d\eta, \ \xi(\tau), \ \psi(\tau)$$

позволяет получить повторным применением этих рассуждений теорему существования и единственности для интервала $(0, T)$ с любым $T < \infty$.

5. Качественное описание движения. Выше были получены некоторые качественные результаты: кольцо сходится всегда до критического радиуса за конечное время, за исключением случая $\omega \equiv 0$. В этом случае время схождения бесконечно. После схождения кольца до критического радиуса начинается его расхождение. Этот случай более сложен.

Уравнение (3.4) является мажорирующим для уравнения (3.3) при $\xi \geqslant 1$. Рассмотрим для него задачу Коши с начальными данными $\varphi|_{\xi=1} = \psi_0$. Эта задача решается явно

$$\int_{\psi_0}^{\varphi} \frac{2\chi d\chi}{\chi^2 - 4\chi + c} = \ln \frac{\ln(1 + a/\xi)}{\ln(1 + a)}$$

Ввиду громоздкости, конечные формулы не выписываются. Возможны следующие три случая.

Первый случай $C > 4$. Тогда $\varphi = 0(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to \infty$. Если $\psi_0 > 4$, то миноранта (2.3) при $\xi \to \infty$ ведет себя точно так же, поэтому и решение при $\xi \to \infty$ в этом случае есть $\psi = O(\sqrt{\xi})$. Далее

$$\frac{d\,[R_2(t)]}{dt} = \frac{\psi}{R_2(t)}, \quad \xi = \frac{R_2{}^2(t)}{R_{20}{}^2}$$

Следовательно $R_2(t) = O(t)$ при $t \to \infty$

Второй случай $C = 4$. Тогда:

а) если $\psi_0 > 2$, то как и прежде

$$\varphi = O(\sqrt{\xi}) \quad \text{при } \xi \to \infty$$

в) если $\psi_0 = 2$, то непосредственно из (5.1) находим

$$\varphi \equiv 2 \text{ или } \psi(\xi) \leqslant 2$$

с) если $\psi_0 < 2$, то $\varphi \to 2$ при $\xi \to \infty$.

Третий случай $c < 4$. Введем обозначение $b = \sqrt{4 - C}$.

а) если $\psi_0 > 2 + b$, то $\varphi = O(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to \infty$

в) если $2 - b < \psi_0 < 2 + b$, то $\varphi(\xi)$ ограничена

$$\varphi(\xi) \to 2 - b > \text{при } \xi \to \infty$$

с) если $\psi_0 < 2 - b$, то $\varphi(\xi) \to 2 - b$, но если в предыдущем $\varphi(\xi)$ стремилось к $2 - b$ сверху, то в этом подслучае снизу.

Для $\psi_0 < 4$ миноранта обращается в нуль при некотором конечном ξ.

Покажем, что решение ψ уравнения (3.3) в нуль не обращается ни при каком конечном ξ.

Рассмотрим уравнение (3.3). Пусть $\xi_1 > 1$ — первое значение, при котором $\psi = 0$. При $\xi \to \xi_1$ слева имеем $\psi \to +0$, а интеграл

$$\int_0^a \omega^2 d\eta \to \text{const} > 0$$

(Положительность указанного предела следует из принципа максимума (см. п. 2), так как в противном случае $\omega \equiv 0$.) С другой стороны, предел левой части уравнения (3.3), очевидно, не может быть положительным при $\xi \to \xi_1 - 0$, что и доказывает сделанное утверждение.

Из предыдущего анализа видно, что существуют два качественно различных режима расхождения. В первом режиме $R_2(t) = O(t)$. Этот режим соответствует расхождению либо при $\psi_0 \geqslant 4$ и любом C, причем ψ_0 играет роль радиального числа Рейнольдса; либо при $c > 4$ и любом $\psi_0 \geqslant 0$, причем c играет роль углового числа Рейнольдса; либо при $c = 4$ и $\psi_0 > 2$. Подобная асимптотика характерна для потенциального движения вращающегося кольца идеальной жидкости [3]. Во втором режиме $R_2(t) = O(\sqrt{t})$. Это осуществляется либо при $\psi_0 < 4$, $c < 4$, либо при $\psi_0 < 2$, $c = 4$.

Действительно, в этом случае решение мажорирующего уравнения ограничено при всех t, поэтому

$$\frac{d\,[R_2(t)]}{dt} \leqslant \frac{K}{R_2(t)}, \quad R_2(t) = O(\sqrt{t})$$

Отметим такой интересный факт. Пусть $R_{20} = 0$, тогда исходные уравнения допускают стационарное решение

$$v = \Omega r, \quad \Phi = 0, \quad p = -{}^1/_2\Omega^2(R_1^2 - r^2)$$

что соответствует вращению круга как твердого тела, но достаточно взять $R_{20} \neq 0$ хотя бы сколь угодно малым, как картина резко меняется: стационарных решений вообще нет, кроме

$$v = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad p = 0$$

6. Движение кольца идеальной жидкости. Л. В. Овсянников [3] рассмотрел потенциальное движение вращающегося кольца идеальной жидкости. Ниже рассматривается более общий случай вихревого движения. При $\nu \equiv 0$ исходные уравнения упрощаются и после замены независимых переменных и искомых функций по формулам

$$\xi = \frac{R_2^2(t)}{R_{20}^2}, \qquad \eta = \frac{r^2 - R_2^2(t)}{R_{20}^2}, \qquad U = \frac{R_{20}}{\Phi_0}v, \quad W = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{U}{\xi + \eta} = 0, \qquad U(\eta, 1) = U_0(\eta) \tag{6.1}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[W^2 \ln\frac{\xi + a}{\xi}\right] = \int_0^a U^2 d\eta, \qquad W|_{\xi=1} = W_0 \qquad \left(a = \frac{R_{10}^2}{R_{20}^2} - 1\right) \tag{6.2}$$

Задачи (6.1) и (6.2) решаются последовательно и дают

$$U = \frac{u_0(\eta)(1+\eta)}{\xi + \eta}, \qquad W^2 = \frac{1}{\ln(1 + a/\xi)}\left[C_0 + \int_1^\xi \left(\int_0^a U^2 d\eta\right) d\xi\right]$$

$$C_0 = W_0^2 \ln(1 + a) - \left[\int_1^\xi \left(\int_0^a U^2 d\eta\right) d\xi\right]_{\xi=1}$$

Ясно, что для любой непрерывной на $[0, a]$ функции $U_0(\eta)$ и $\xi(\tau) < 1$ существует такое $0 < \xi^* < 1$, что $w(\xi^*) = 0$.

При $\xi \to \xi^*$ имеем

$$w(\xi) = K\sqrt{\xi - \xi^*}[1 + O(\xi - \xi^*)] \quad (k \neq 0)$$

Учитывая, что

$$t = \int_1^\xi \frac{d\xi}{W(\xi)}$$

получаем, что кольцо сходится до критического радиуса за конечное время. Если же $W_0 > 0$, то $W(\xi) = O(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to \infty$. Это означает, что $R_2(t) = O(t)$ при $t \to \infty$, что аналогично асимптотике потенциального движения [3].

Работа выполнена под руководством В. В. Пухначева.

Поступила 8 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М. «Мир.», 1968.
3. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. В кн. «Задача о неустановившемся движении со свободной границей», Новосибирск, «Наука», 1967, стр. 3—75.