УДК 539.375

ВЛИЯНИЕ ЗАКРЫТИЯ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ИЗГИБАЕМЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

И. П. Шацкий, Н. В. Маковийчук

Ивано-Франковский сектор Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, 76000 Ивано-Франковск, Украина
E-mails: opm@nung.edu.ua, makoviy@ua.fm

В рамках теории Кирхгофа рассматривается задача о закрытии коллинеарных трещин при изгибе пологой оболочки. Для описания закрытия трещин использована модель контакта вдоль линии на одной из лицевых поверхностей. Изучены зависимости коэффициентов интенсивности усилий, моментов и величины разрушающей нагрузки от параметров кривизны оболочки и расположения дефектов, исследовано распределение контактных усилий вдоль трещин.

Ключевые слова: оболочка, изгиб, закрытие трещин, прочность.

Постоянно возрастающие требования к надежности современной техники обусловливают необходимость разработки и совершенствования расчетных методик, учитывающих влияние различного рода повреждений на прочностные свойства тонкостенных элементов конструкций. При наличии деформаций изгиба в пластинах и оболочках следует учитывать закрытие трещин. Основные подходы к решению указанной проблемы представлены в обзорах [1–4]. Для описания взаимодействия берегов трещин в изгибаемых оболочках целесообразно использовать модель контакта вдоль линии на одной из лицевых поверхностей оболочки, обеспечивающую получение непротиворечивых результатов с помощью двумерных теорий. В настоящее время сформулированы краевые условия для такой модели [1, 5–7], изучены вопросы существования, единственности и гладкости решений соответствующих краевых задач теории пологих оболочек [1, 6], с использованием классической теории [7–10] и с учетом трансверсального сдвига [11, 12] решены конкретные задачи изгиба оболочек с одиночными прямолинейными разрезами, исследовано частичное закрытие трещины в пологих оболочках при совместном растяжении и изгибе [13].

В данной работе изучено влияние контакта берегов коллинеарных разрезов на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек при изгибе. Аналогичные исследования для пластины проведены в работе [14]. В [15, 16] изучено взаимодействие трещин в оболочках при действии растягивающей нагрузки, в [17] — при изгибе с дополнительным растяжением, достаточным для предотвращения контакта берегов.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную оболочку толщиной $2h$ с системой сквозных коллинеарных разрезов, расположенных вдоль главной линии кривизны на отрезках L_n ($n = \overline{1, N}$) (рис. 1). К противоположным краям трещин приложены самоуравновешенные равномерно распределенные изгибающие моменты $m_n = \mathrm{const}$ одинакового знака. Остальные поверхности оболочки, включая бесконечно удаленные точки, свободны

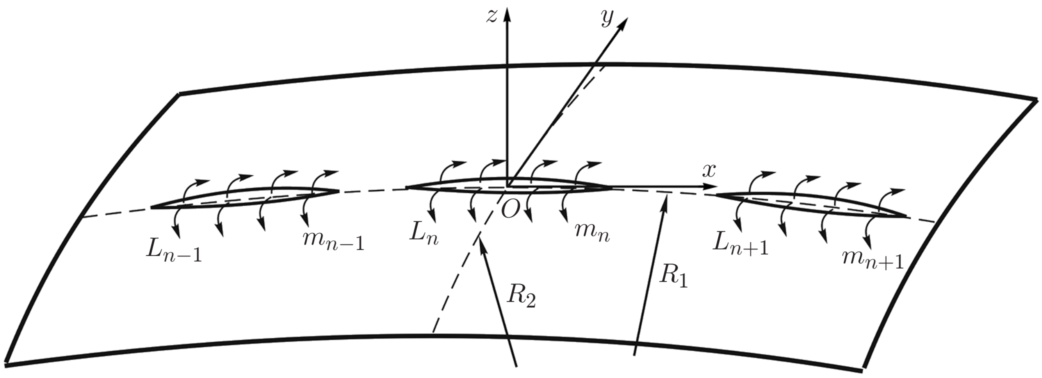

Рис. 1. Пологая оболочка с системой коллинеарных разрезов

от нагрузки. Исследуем влияние расположения трещин и контактного взаимодействия их берегов на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемой оболочки.

Считая, что в зоне возмущения напряженного состояния оболочка является пологой, введем декартову систему координат $Oxyz$ с осью абсцисс, ориентированной вдоль линии расположения трещин. Напряженно-деформированное состояние оболочки вне разрезов опишем уравнениями теории пологих оболочек

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\,\Delta_k w = 0, \qquad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\,\Delta_k\varphi = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L. \tag{1}$$

Здесь φ — функция напряжений; w — прогиб оболочки;

$$B = 2Eh; \qquad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$

E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta_k = \beta_2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_1\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \beta_1 = \frac{R}{R_1}; \quad \beta_2 = \frac{R}{R_2}; \quad R = \min\,(|R_1|, |R_2|);$$

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны нормальных сечений срединной поверхности; $L = \bigcup\limits_{n=1}^{N} L_n$ — совокупность разрезов.

Учитывая симметрию задачи относительно оси абсцисс, с использованием гипотезы Кирхгофа запишем краевые условия на разрезах [1, 5–7]

$$[u_y]_n = h|[\theta_y]_n| \geqslant 0, \qquad M_y = -m_n + hN_y \operatorname{sgn}[\theta_y]_n, \qquad N_y \leqslant 0, \quad x \in L_n, \quad n = \overline{1, N}. \tag{2}$$

На бесконечности напряжения отсутствуют:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \qquad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \qquad Q_x^* = Q_y^* = 0, \qquad (x,y) \to \infty. \tag{3}$$

В формулах (2), (3) $[u_y]_n$, $[\theta_y]_n$ — раскрытие трещины на срединной поверхности оболочки и скачок угла поворота нормали для каждой трещины; N_{ij}, M_{ij}, Q_i^* — мембранные силы, моменты и обобщенные поперечные силы.

Краевая задача (1)–(3) рассматривается в предположении, что контакт берегов осуществляется по всей длине трещин; если на какой-либо трещине неравенство $N_y \leqslant 0$ нарушается, то в этом случае следует решать смешанную задачу с неизвестными областями контакта и раскрытия.

Интегральные уравнения задачи. Для построения решения сформулированной задачи используем метод сингулярных интегральных уравнений. Запишем интегральные представления усилий и моментов на линии разрезов через производные от скачков смещений и углов поворота нормали [16]:

$$
\begin{aligned}
N_y(x,0) &= \frac{B}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m}\left\{K_{11}(\xi-x)[u_y]'_m(\xi) - K_{13}(\xi-x)a[\theta_y]'_m(\xi)\right\}d\xi,\\
M_y(x,0) &= \frac{Ba}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m}\left\{K_{31}(\xi-x)[u_y]'_m(\xi) - K_{33}(\xi-x)a[\theta_y]'_m(\xi)\right\}d\xi.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$; ядра $K_{jk}(\xi-x)$ определяются формой оболочки и в общем случае выражаются через интегралы Фурье:

$$
K_{jk}(z) = \left[\delta_{jk}\operatorname{Re} + (1-\delta_{jk})\operatorname{Im}\right]\int_0^\infty g_{jk}\Big(\gamma\,\frac{\sqrt{-i}}{\tau}\Big)\sin z\tau\,d\tau \qquad (j,k=1,3),
$$

$$
g_{11}(\rho) = \frac{r(\rho)}{\omega(\rho)}, \qquad g_{13}(\rho) = g_{31}(\rho) = -r(\rho)\Big(1+\frac{\nu}{\omega(\rho)}\Big),
$$

$$
g_{33}(\rho) = r(\rho)\Big(2-2\nu+\beta_1\rho^2+\omega(\rho)+\frac{\nu^2}{\omega(\rho)}\Big),
$$

$$
r(\rho) = 2(2+\beta_1\rho^2+2\omega(\rho))^{1/2}, \quad \omega(\rho) = (1+\beta_2\rho^2)^{1/2}, \quad \gamma = 1/\sqrt{Ra}, \quad z = \xi - x.
$$

Используя граничные условия на каждом разрезе L_n, $n=\overline{1,N}$ и исключая $[u_y]_n$ с помощью первого условия в (2), получаем систему N сингулярных интегродифференциальных уравнений для нахождения неизвестных функций скачка угла поворота нормали

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m}&\left\{3(1-\nu^2)K_{11}(\xi-x) + 2s\sqrt{3(1-\nu^2)}\,K_{13}(\xi-x) + \right.\\
&\left. + K_{33}(\xi-x)\right\}[\theta_y]'_m(\xi)\,d\xi = m_n, \qquad x\in L_n, \quad n=\overline{1,N}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь учтено, что $\operatorname{sgn}[\theta_y]_n = -\operatorname{sgn} m_n = -s$ [5, 7].

На концах разрезов решения полученной системы уравнений должны быть однозначными:

$$
[\theta_y]_n(\partial L_n^{\pm}) = 0, \qquad n=\overline{1,N}. \tag{6}
$$

Если контакт берегов не учитывается, то, подставляя интегральные представления (4) в классические условия $N_y=0$, $M_y=-m_n$, $x\in L_n$, $n=\overline{1,N}$, получаем систему $2N$ уравнений относительно разрывов перемещений и углов поворота на разрезах [16, 17]

$$
\frac{B}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{L_m}\left\{K_{11}(\xi-x)[\bar{u}_y]'_m(\xi) - K_{13}(\xi-x)a[\bar{\theta}_y]'_m(\xi)\right\}d\xi = 0,
$$

$$\frac{Ba}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{L_m}\bigl\{K_{31}(\xi-x)[\bar{u}_y]'_m(\xi)-K_{33}(\xi-x)a[\bar{\theta}_y]'_m(\xi)\bigr\}\,d\xi=-m_n, \tag{7}$$

$$x\in L_n,\qquad n=\overline{1,N}$$

с дополнительными условиями

$$[\bar{u}_y]_n(\partial L_n^{\pm})=0,\qquad [\bar{\theta}_y]_n(\partial L_n^{\pm})=0,\qquad n=\overline{1,N}. \tag{8}$$

По найденным функциям скачка перемещений и углов поворота нормали вычисляются коэффициенты интенсивности усилий и моментов

$$K_{N,n}^{\pm}=\mp\frac{B}{4}\lim_{x\to\partial L_n^{\pm}}\sqrt{2|x-\partial L_n^{\pm}|}\;[u_y]'_n(x),$$

$$K_{M,n}^{\pm}=\pm(3-2\nu-\nu^2)\,\frac{D}{4}\lim_{x\to\partial L_n^{\pm}}\sqrt{2|x-\partial L_n^{\pm}|}\;[\theta_y]'_n(x).$$

Затем с помощью энергетического критерия разрушения при условии комбинированного растяжения и изгиба [16] для каждой вершины определяется предельная нагрузка, при которой начинается распространение трещины:

$$\frac{\pi}{4h^2E}\Bigl\{(K_{N,n}^{\mp})^2+\varkappa\Bigl(\frac{K_{M,n}^{\mp}}{h}\Bigr)^2\Bigr\}=2\gamma_*$$

($\varkappa=3(1+\nu)/(3+\nu)$; γ_* — плотность эффективной поверхностной энергии материала).

Анализ результатов. Численные решения задач (5), (6) и (7), (8) получены методом квадратур при $\nu=0{,}3$ для наиболее распространенных (цилиндрических и сферических) форм оболочек. Ядра интегральных уравнений (5), (7) для таких оболочек выражаются через функции Кельвина [16]. Рассмотрены случаи взаимодействия двух одинаковых трещин длиной $2l$, расстояние между центрами которых равно $2d$. Моментные нагрузки на берегах разрезов приняты равными ($m_1=m_2=m$).

На рис. 2 приведены зависимости безразмерных коэффициентов интенсивности усилий и моментов $\tilde{K}_N=hK_N/(|m|\sqrt{l}\,)$, $\tilde{K}_M=K_M/(m\sqrt{l}\,)$, а также разрушающей нагрузки $\tilde{m}_*=|m_*|/m^0$ ($m^0=2h^2\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}\,$) от параметра расположения дефектов $\rho=l/d$ при фиксированных значениях безразмерного параметра кривизны $\lambda=(3(1-\nu^2))^{1/4}l/\sqrt{Rh}$. Результаты расчета без учета контакта согласуются с данными [17]. Значение коэффициента интенсивности усилий для трещины с контактирующими берегами получено из выражения $K_N=\varkappa K_M\operatorname{sgn}m/h$, которое является следствием первого условия в (2).

Учет контакта берегов трещин приводит к увеличению коэффициентов интенсивности усилий и уменьшению коэффициентов интенсивности моментов, а также к их немонотонным зависимостям от параметра ρ. При изгибе цилиндрических оболочек учет контакта берегов трещин приводит к увеличению значений безопасных нагрузок и к более быстрому уменьшению разрушающего момента при сближении дефектов. В случае сферической оболочки разрушающий момент может быть меньше, чем в случае, когда контакт берегов не учитывается. При учете контакта берегов на внутренней поверхности имеет место четко выраженная немонотонная зависимость $\tilde{m}_*(\rho)$. В отличие от результатов расчета без учета контакта берегов в данном случае немонотонные зависимости коэффициентов интенсивности и предельной нагрузки от параметра ρ усиливаются, если берега смыкаются на внутренней лицевой поверхности оболочки, и ослабляются при контакте берегов на внешней лицевой поверхности. С увеличением кривизны оболочки появляется диапазон значений параметра ρ, в котором наиболее опасными являются дальние вершины трещин.

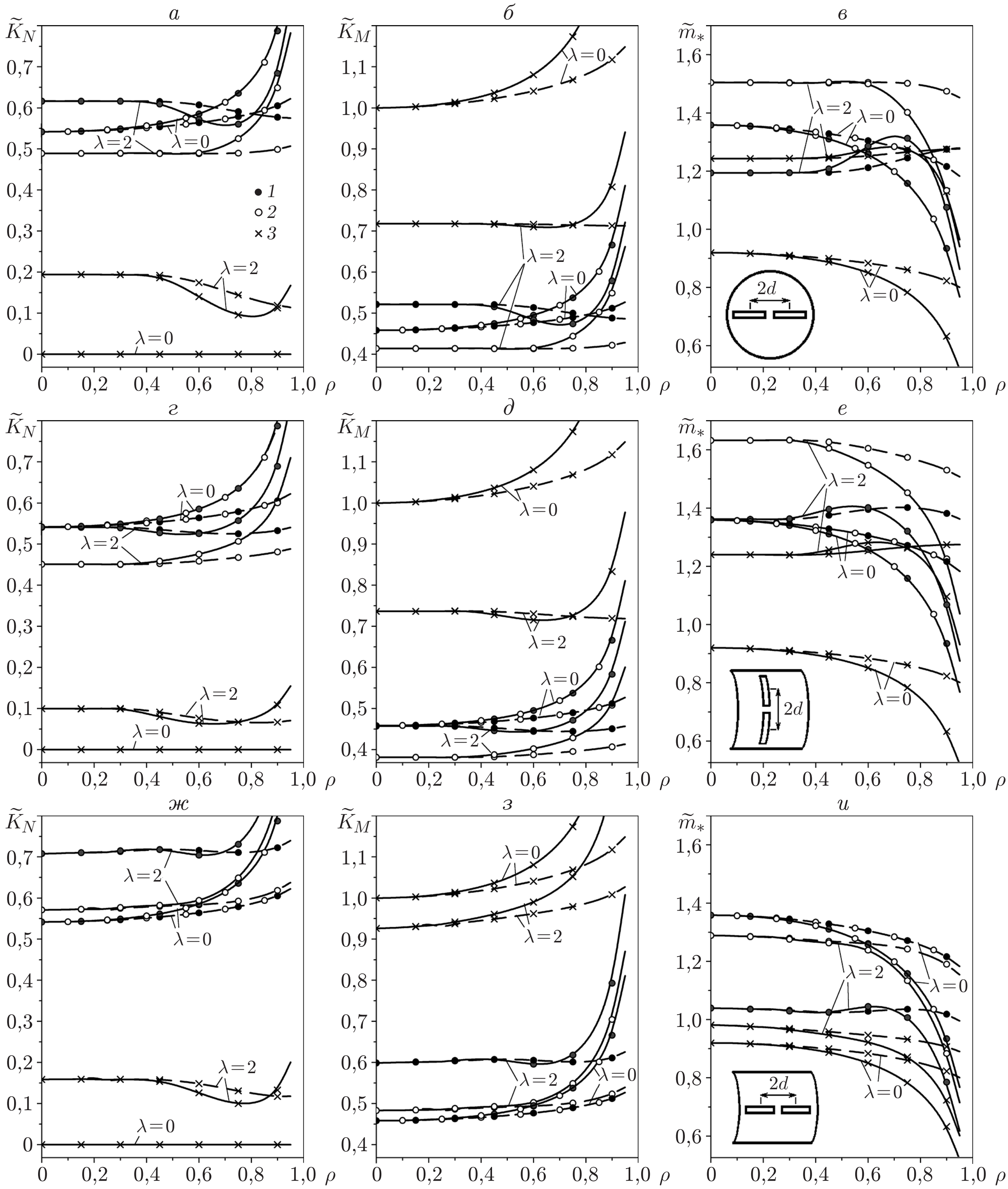

Рис. 2. Зависимости коэффициентов интенсивности усилий (*а, г, ж*) и моментов (*б, д, з*), а также разрушающей нагрузки (*в, е, и*) от параметра ρ для оболочек с коллинеарными трещинами:

а–в — сферическая оболочка, *г–и* — цилиндрические оболочки; сплошные линии — результаты расчетов для внутренних вершин разрезов, штриховые — для внешних вершин разрезов; *1, 2* — результаты расчетов с учетом закрытия трещин (*1* — в случае, когда берега смыкаются на внутренней ($m > 0$) лицевой поверхности оболочки, *2* — на внешней ($m < 0$) лицевой поверхности оболочки), *3* — результаты расчета без учета закрытия трещин

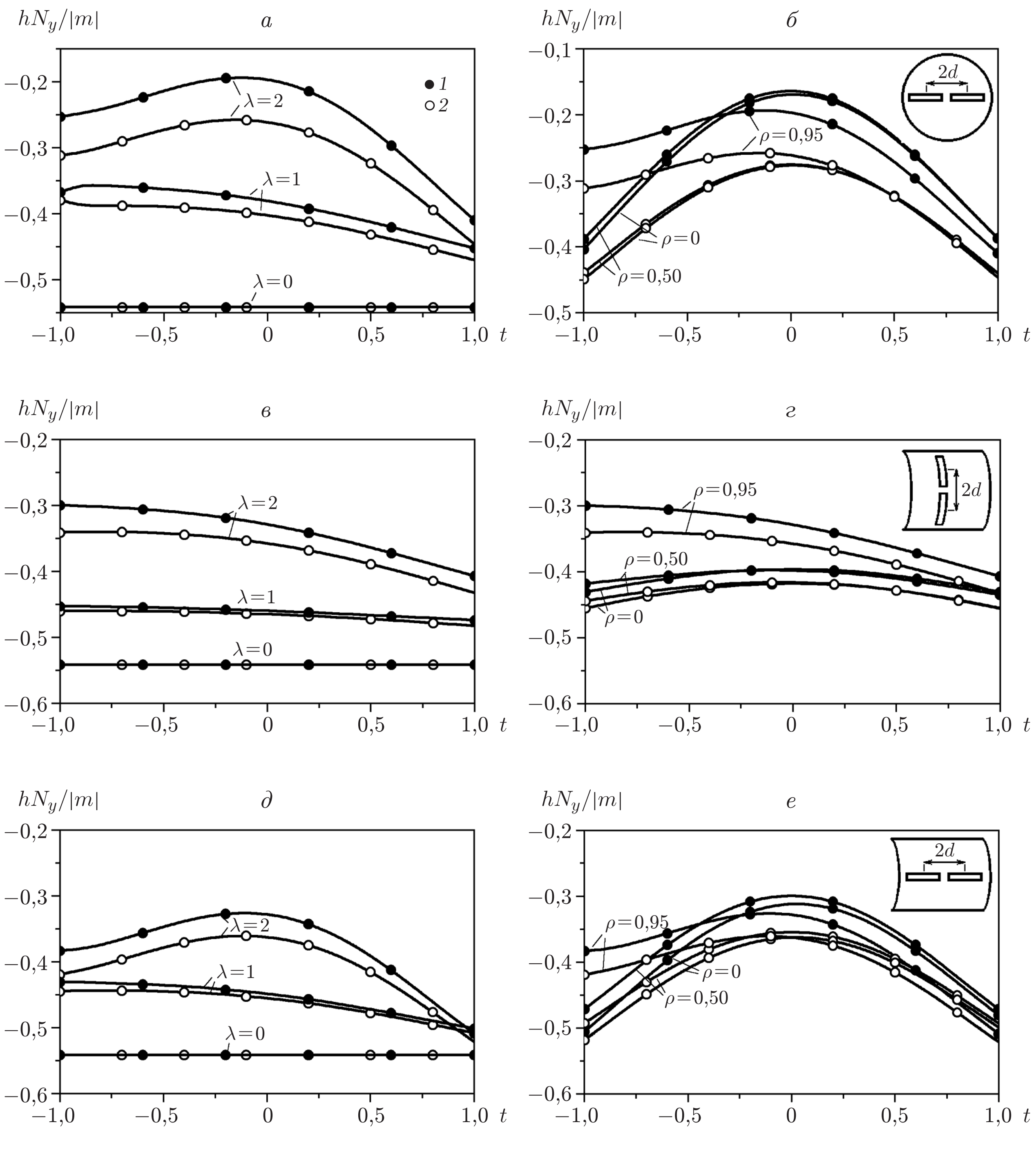

Рис. 3. Распределение безразмерной контактной реакции на правой трещине в оболочках при различных значениях параметров λ (*а, в, д*) и ρ (*б, г, е*):

а, б — сферическая оболочка, *в–е* — цилиндрические оболочки; *а, в, д* — $\rho = 0{,}95$, *б, г, е* — $\lambda = 2$; *1, 2* — результаты расчетов с учетом закрытия трещин (*1* — в случае, когда берега смыкаются на внутренней ($m > 0$) лицевой поверхности оболочки, *2* — на внешней ($m < 0$) лицевой поверхности оболочки)

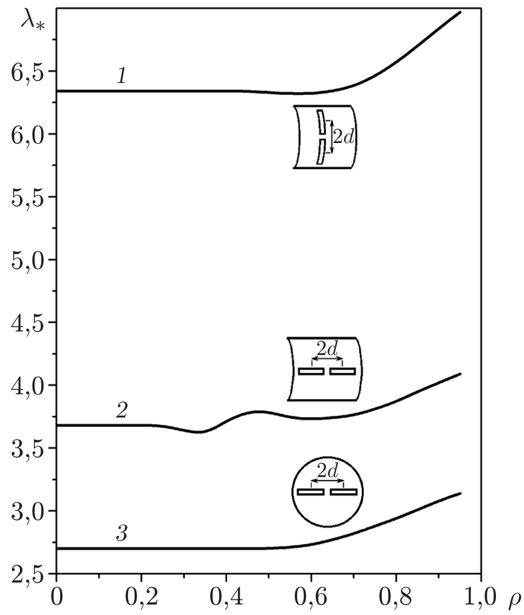

Рис. 4. Зависимость параметра λ_* от ρ для цилиндрических (*1, 2*) и сферической (*3*) оболочек

Результаты расчета контактного усилия для правой трещины представлены на рис. 3. Видно, что с увеличением параметра λ контактные усилия на берегах трещины уменьшаются (в наибольшей степени посередине трещины и вблизи внутренних вершин дефектов). На рис. 4 приведена зависимость параметра λ_* от ρ. В случае $m > 0$ при $\lambda > \lambda_*(\rho)$ следует решать смешанную задачу со свободной границей, при $\lambda < \lambda_*(\rho)$ смыкание кромок происходит по всей длине разреза. В случае $m < 0$ при любом значении λ происходит смыкание кромок по всей длине разреза. Для сферической оболочки и цилиндрической панели с продольными разрезами при контакте берегов на внутренней поверхности ($m > 0$) зависимость контактной реакции от параметра ρ является немонотонной.

В частном случае нулевой кривизны ($\lambda = 0$) получаем решение задачи изгиба для коллинеарных трещин с контактирующими берегами в пластине [14]. При неограниченном увеличении расстояния между трещинами ($\rho = 0$) полученные результаты соответствуют задаче о закрытии одиночных прямолинейных трещин в сферической и цилиндрической оболочках [8–10].

Таким образом, в работе исследовано влияние учета контакта берегов трещины на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемых пологих оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
2. **Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А.** Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. Львів: Каменяр, 2000. Т. 2. С. 51–54.
3. **Zehnder A. T., Viz M. J.** Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads // Appl. Mech. Rev. 2005. V. 58. P. 37–48.

4. **Хлуднев А. М.** Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 4. С. 41–82.
5. **Шацький І. П.** Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1991. № 2. С. 26–29.
6. **Хлуднев А. М.** Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, № 2. С. 318–326.
7. **Шацкий И. П.** Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 5. С. 164–173.
8. **Шацький І. П.** Закриття поперечної тріщини при згині пологої циліндричної оболонки // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. Т. 43, № 2. С. 149–154.
9. **Шацький І. П.** Закриття поздовжньої тріщини в пологій циліндричній панелі під час її згину // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2005. Т. 41, № 2. С. 45–48.
10. **Шацкий И. П., Маковийчук Н. В.** Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе // Теорет. и прикл. механика. 2005. Вып. 41. С. 146–150.
11. **Liu Rong, Wang C. H., Bathgate R. G.** Crack closure in spherical shells // Intern. J. Fract. 1999. V. 99, N 4. P. 307–323.
12. **Liu Rong, Zhang Tie, Wu X. J., Wang C. H.** Crack closure effect on stress intensity factors of an axially and a circumferentially cracked cylindrical shell // Intern. J. Fract. 2004. V. 125, N 3/4. P. 227–248.
13. **Шацький І. П., Маковійчук М. В.** Контактна взаємодія берегів тріщин у пологих оболонках за згину з розтягом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2005. Т. 41, № 4. С. 45–52.
14. **Шацкий И. П.** Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // Физ.-хим. механика материалов. 1990. Т. 26, № 3. С. 70–75.
15. **Erdogan F., Ratwani M.** A note on the interference of two collinear crack in a cylindrical shells // Intern. J. Fract. 1974. V. 10, N 4. P. 463–465.
16. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985.
17. **Механика** композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1993. (Т. 7. Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. Киев: А. С. К., 1998).

Поступила в редакцию 10/XII 2009 г.,
в окончательном варианте — 14/V 2010 г.