УДК 532.516

ТОЧЕЧНЫЙ ВИХРЬ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Рассматривается плоская стационарная задача о точечном вихре в области, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью и ограниченной твердой стенкой. Доказано существование решения уравнений Навье — Стокса, описывающих такое течение, в случае если циркуляция вихря Γ и вязкость ν удовлетворяют условию $|\Gamma| < 2\pi\nu$. Поле скоростей полученного решения имеет бесконечный интеграл Дирихле. Показано, что это решение может быть приближено решением задачи о вращении диска радиусом γ с угловой скоростью ω при условии $2\pi\gamma^2\omega \to \Gamma$, когда $\gamma \to 0$ и $\omega \to \infty$.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, условие прилипания, точечный вихрь.

Введение. В данной работе рассматриваются стационарные решения $\boldsymbol{v}$, p уравнений Навье — Стокса

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu\, \Delta \boldsymbol{v}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, содержащей начало координат. Здесь $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; p — отношение давления к постоянной плотности жидкости; $\nu = \mathrm{const} > 0$ — кинематическая вязкость. При записи системы (1) предполагалось, что на жидкость не действуют внешние массовые силы. Если эти силы потенциальны, то систему уравнений Навье — Стокса можно привести к виду (1) простым преобразованием функции давления.

Известно, что система (1) допускает решения с потенциальным полем скоростей

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi, \qquad p = C - |\nabla \phi|^2/2, \tag{2}$$

где ϕ — произвольная гармоническая функция переменных x_1, x_2; C — постоянная. Выбирая в качестве ϕ фундаментальное решение уравнения Лапласа или его производные, получаем семейство решений системы (1), определенных на всей плоскости и обладающих точечными особенностями. Рассмотрим сужение решения (2) на ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и его возмущение за счет изменения значений вектора скорости на границе $\partial\Omega$ этой области. Если $\phi = (2\pi)^{-1} q \log |x|$, где $q = \mathrm{const}$, то особенность решения характеризуется источником интенсивности q в начале координат. Такая задача рассмотрена в работе [1]. Другая сингулярная краевая задача для системы (1) соответствует случаю $\phi = (2\pi)^{-1}\Gamma \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$, где $\Gamma = \mathrm{const}$. В этом случае в начале координат помещен вихрь с циркуляцией Γ. Указанная задача рассматривается в данной работе.

Работа выполнена в рамках программы № 2.13.2 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН.

Теория стационарных краевых задач для уравнений Навье — Стокса изложена в монографии О. А. Ладыженской [2]. Доказательство разрешимости этих задач основано на получении априорной оценки интеграла Дирихле вектора скорости

$$I = \int\limits_{\Omega} \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{v}\, dx. \tag{3}$$

Задача о возмущении поля скорости, порожденного точечным вихрем, не попадает в стандартный класс стационарных задач для уравнений Навье — Стокса, поскольку в ней интеграл Дирихле I бесконечен.

Введем следующие обозначения: r, φ — полярные координаты, v_r, v_φ — радиальная и окружная компоненты скорости. Одно из простейших потенциальных решений системы (1) имеет вид

$$v_r = 0, \qquad v_\varphi = \omega\gamma^2 r^{-1}, \qquad p = C - (\omega\gamma^2 r^{-1})^2/2, \tag{4}$$

где γ, ω — постоянные, имеющие размерность длины и размерность, обратную размерности времени, соответственно. Это решение допускает простую интерпретацию. Пусть жидкость заполняет область вне круга $r < \gamma$, а ее движение индуцируется вращением круга вокруг центра с угловой скоростью ω. Тогда на границе круга выполнено условие прилипания. Решение (4) дает пример редкого потенциального течения вязкой жидкости, удовлетворяющего естественному условию прилипания на границе области течения.

Пусть область течения — круговое кольцо $\gamma < r < \rho$. Решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = \omega\gamma, \quad r = \gamma, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad r = \rho,$$

имеет вид [3]

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = v_0 \equiv \frac{\omega\gamma^2}{\rho^2 - \gamma^2}\Big(\frac{\rho^2}{r} - r\Big), \quad p = \int\limits_{\gamma}^{r} \frac{v_0^2(s)}{s}\, ds + C$$

(частный случай известного решения Куэтта). Устремим ω к бесконечности, а γ к нулю, так чтобы выполнялось условие $2\pi\gamma^2\omega \to \Gamma$. Поле скоростей в предельном решении определяется формулами

$$v_r = 0, \qquad v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2}\Big(\frac{\rho^2}{r} - r\Big).$$

Полученное решение удовлетворяет условию прилипания на окружности $r = \rho$ и имеет особенность в начале координат в виде точечного вихря с циркуляцией Γ.

Специфика приведенных решений состоит в том, что в них не входит вязкость. Это свойство исчезает, если граница Σ области Ω не является окружностью с центром в начале координат. В этом случае появляется безразмерный параметр $|\Gamma|/(2\pi\nu) = \mathrm{Re}$, который естественно назвать числом Рейнольдса. Вопрос о том, имеет ли система (1) решение с точечной особенностью в начале координат, удовлетворяющее условию прилипания на кривой Σ, не является тривиальным. Целью данной работы является доказательство разрешимости этой задачи при достаточно малых значениях числа Рейнольдса.

1. Формулировка задачи. Перейдем в системе (1) к новым искомым функциям

$$w_r = v_r, \qquad w_\varphi = v_\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad \bar{p} = p + \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}, \tag{5}$$

удовлетворяющим уравнениям

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\, w_r + \frac{1}{r}\, \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$
w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r} w_\varphi \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} w_\varphi^2 + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{\Gamma}{2\pi r^2} w_\varphi =
$$

$$
= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu\Big(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} w_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}\Big), \qquad (6)
$$

$$
w_r \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} w_\varphi \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} w_r w_\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} =
$$

$$
= -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \nu\Big(\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} w_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Big).
$$

В новых обозначениях условие прилипания $\boldsymbol{v} = 0$ в полярной системе координат (r, φ) записывается в виде

$$
w_r = 0, \qquad w_\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad (r, \varphi) \in \Sigma. \qquad (7)
$$

В задаче (6), (7) удобно перейти к функции тока $\psi(r, \varphi)$, определяемой соотношениями

$$
w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \qquad w_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.
$$

Уравнение для функции тока имеет вид

$$
\nu \Delta^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial\,(\Delta\psi, \psi)}{\partial\,(r, \varphi)} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial \varphi} = 0, \qquad (r, \varphi) \in \Omega, \qquad (8)
$$

а краевые условия (7) преобразуются в следующие:

$$
\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} n_r, \qquad x \in \Sigma. \qquad (9)
$$

Здесь $\partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к кривой Σ; n_r — проекция вектора $\boldsymbol{n}$ на направление r.

Перейдем в задаче (8), (9) к новой искомой функции $\chi = \psi - f$, так чтобы были выполнены равенства

$$
f = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r, \qquad \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} n_r, \qquad x \in \Sigma. \qquad (10)
$$

Выбор функции f будет осуществлен ниже. Функция χ является решением следующей краевой задачи:

$$
\nu\,\Delta^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial\,(\Delta\chi, \chi)}{\partial\,(r, \varphi)} - \frac{1}{r} \frac{\partial\,(\Delta\chi, f)}{\partial\,(r, \varphi)} - \frac{1}{r} \frac{\partial\,(\Delta f, \chi)}{\partial\,(r, \varphi)} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial \varphi} = g, \qquad x \in \Omega \setminus \{0\}; \qquad (11)
$$

$$
\chi = 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Sigma. \qquad (12)
$$

Здесь

$$
g = -\nu \Delta^2 f + \frac{1}{r} \frac{\partial\,(\Delta f, f)}{\partial\,(r, \varphi)} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial \varphi}.
$$

Выберем число γ, такое что $0 < \gamma < \operatorname{dist}(\Sigma, \{0\})$, и обозначим через Ω_γ двусвязную область, ограниченную кривой Σ и окружностью $r = \gamma$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_\gamma)$, получаемое в результате замыкания семейства функций класса $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ в норме

$$
\|\eta\|_{H^2}^2 = \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\eta_{rr}^2 + \frac{2}{r^2} \eta_{r\varphi}^2 + \frac{1}{r^4} \eta_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} \eta_r^2\Big) r\,dr\,d\varphi.
$$

При $\gamma \to 0$ получим гильбертово пространство, которое обозначим $\mathring{H}_0^2(\Omega)$. Норма в этом пространстве определяется последним равенством, в котором область интегрирования Ω_γ заменена на Ω. Функции $\eta \in \mathring{H}_0^2(\Omega)$ непрерывны в области $\bar{\Omega}$ и обращаются в нуль при $r = 0$. Имеет место оценка $|\eta| \leqslant C_0 r^\alpha \|\eta\|_{H^2}$, $(r,\varphi) \in \bar{\Omega}$, $0 < \alpha < 1$ с постоянной $C_0 > 0$, зависящей от области Ω и показателя α. Нижний индекс в определении пространства $\mathring{H}_0^2(\Omega)$ обозначает, что оно является собственным подпространством гильбертова пространства $\mathring{H}_0^2(\Omega)$. Функцию $\chi \in \mathring{H}_0^2(\Omega)$ будем называть обобщенным решением задачи (11), (12), если интегральное тождество

$$\nu \int\limits_\Omega \Big(\chi_{rr}\eta_{rr} + \frac{2}{r^2}\,\chi_{r\varphi}\eta_{r\varphi} + \frac{1}{r^4}\,\chi_{\varphi\varphi}\eta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}\,\chi_r\eta_r\Big)\, r\,dr\,d\varphi +$$

$$+ \int\limits_\Omega \Big[\frac{\Delta\chi}{r}\,\frac{\partial\,(\chi,\eta)}{\partial\,(r,\varphi)} + \frac{\Delta\chi}{r}\,\frac{\partial\,(f,\eta)}{\partial\,(r,\varphi)} + \frac{\Delta f}{r}\,\frac{\partial\,(\chi,\eta)}{\partial\,(r,\varphi)} - \frac{\Gamma\,\Delta\chi}{2\pi r^2}\,\eta_\varphi\Big]\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_\Omega g\eta r\,dr\,d\varphi \qquad (13)$$

выполняется для любого $\eta \in \mathring{H}_0^2(\Omega)$.

2. Вспомогательные утверждения. Доказательство разрешимости задачи (11), (12) основано на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть $\Sigma \in C^\infty$ — жорданова кривая, внутри которой содержится начало координат. Существует удовлетворяющая условиям* (10) *функция $f \in H^2(\Omega)$, такая что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\Big|\int\limits_\Omega \Delta\chi\,\frac{\partial\,(f,\chi)}{\partial\,(r,\varphi)}\,dr\,d\varphi\Big| \leqslant \varepsilon\|\chi\|_{H^2}^2 \qquad (14)$$

выполнено при произвольном $\chi \in \mathring{H}_0^2(\Omega)$.

Лемма 1 является аналогом классической леммы Хопфа [4, 5], ее доказательство имеется в работе [1].

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1. *Если дополнительно*

$$|\Gamma| < 2\pi\nu, \qquad (15)$$

то для любого обобщенного решения задачи (11), (12) *справедлива априорная оценка*

$$\|\chi\|_{H^2} \leqslant 4\pi(2\pi\nu - |\Gamma|)^{-1}(\nu\|f\|_{H^2} + C_1\|f\|_{H^2}^2) = C_2, \qquad (16)$$

где постоянная C_1 зависит лишь от области Ω.

Доказательство. Положим в тождестве (13) $\eta = \chi$. После интегрирования по частям интеграла, содержащего множитель Γ, это тождество принимает следующий вид:

$$\int\limits_\Omega \Big[\nu\Big(\chi_{rr}^2 + \frac{2}{r^2}\,\chi_{r\varphi}^2 + \frac{1}{r^4}\,\chi_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{r^2}\,\chi_r^2\Big) - \frac{\Gamma}{\pi r^3}\,\chi_r\chi_\varphi + \frac{\Delta\chi}{r}\,\frac{\partial\,(f,\chi)}{\partial\,(r,\varphi)}\Big]\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_\Omega g\chi r\,dr\,d\varphi.$$

Из (13), выбирая функцию f в соответствии с леммой 1 и учитывая представление функции g в обозначениях f и ее производных, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\nu\Big(\chi_{rr}^2 + \frac{2}{r^2}\,\chi_{r\varphi}^2 + \frac{1}{r^4}\,\chi_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{r^2}\,\chi_r^2\Big) - \frac{|\Gamma|}{2\pi}\Big(\frac{\chi_r^2}{r^2} + \frac{\chi_\varphi^2}{r^4}\Big)\Big]\, r\,dr\,d\varphi \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|\chi\|_{H^2}^2 + (\nu\|f\|_{H^2} + C_3\|f\|_{H^2}^2)\|\chi\|_{H^2},$$

где C_3 зависит лишь от области Ω. Для завершения доказательства леммы 2 достаточно положить

$$\varepsilon = \nu/2 - |\Gamma|/(4\pi),$$

что приводит к требуемой априорной оценке нормы χ.

3. Разрешимость задачи (11), (12). Доказывается следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия лемм* 1 *и* 2. *Тогда задача* (11), (12) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение* $\chi \in \mathring{H}_0^2(\Omega)$, *и для этого решения верна оценка* (16).

Доказательство основано на естественной регуляризации задачи, когда область течения заменяется двусвязной областью Ω_γ и на окружности $r = \gamma$ ставятся условия $v_r = 0$, $v_\varphi = (2\pi\gamma)^{-1}\Gamma$. Затем осуществляется предельный переход $\gamma \to 0$. Кратко изложим доказательство теоремы.

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти решение уравнения (8) в области Ω_γ, удовлетворяющее условиям (9) и

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad x \in C_\gamma, \tag{17}$$

где C_γ — окружность радиусом γ с центром в начале координат. Перейдем в задаче (8), (9), (17) к новой искомой функции $\chi^{(\gamma)} = \psi - f^{(\gamma)}$. Функция $f^{(\gamma)}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} f^{(\gamma)} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\,\log r, \qquad \frac{\partial f^{(\gamma)}}{\partial n} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\,n_r, \qquad x \in \Sigma, \\ f^{(\gamma)} = 0, \qquad \frac{\partial f^{(\gamma)}}{\partial r} = 0, \qquad x \in C_\gamma, \end{gathered} \tag{18}$$

функция $\chi^{(\gamma)}$ является решением уравнения

$$\nu\Delta^2\chi^{(\gamma)} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta\chi^{(\gamma)}, \chi^{(\gamma)})}{\partial\,(r, \varphi)} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta\chi^{(\gamma)}, f^{(\gamma)})}{\partial\,(r, \varphi)} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta f^{(\gamma)}, \chi^{(\gamma)})}{\partial\,(r, \varphi)} - \\ - \frac{\Gamma}{2\pi r^2}\,\frac{\partial\,\Delta\chi^{(\gamma)}}{\partial\varphi} = g^{(\gamma)}, \tag{19}$$

удовлетворяющим краевым условиям

$$\chi^{(\gamma)} = 0, \quad \frac{\partial\chi^{(\gamma)}}{\partial n} = 0, \quad x \in \Sigma, \qquad \chi^{(\gamma)} = 0, \quad \frac{\partial\chi^{(\gamma)}}{\partial r} = 0, \quad x \in C_r. \tag{20}$$

Здесь

$$g^{(\gamma)} = -\nu\Delta^2 f^{(\gamma)} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta f^{(\gamma)}, f^{(\gamma)})}{\partial\,(r, \varphi)} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2}\,\frac{\partial\,\Delta f^{(\gamma)}}{\partial\varphi}. \tag{21}$$

Функцию $\chi^{(\gamma)} \in \mathring{H}^2(\Omega_\gamma)$ будем называть обобщенным решением задачи (19), (20), если для любого $\eta^{(\gamma)} \in \mathring{H}^2(\Omega_\gamma)$ выполнено интегральное тождество

$$\nu \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\chi^{(\gamma)}_{rr} \eta^{(\gamma)}_{rr} + \frac{2}{r^2}\, \chi^{(\gamma)}_{r\varphi} \eta^{(\gamma)}_{r\varphi} + \frac{1}{r^4}\, \chi^{(\gamma)}_{\varphi\varphi} \eta^{(\gamma)}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}\, \chi^{(\gamma)}_{r} \eta^{(\gamma)}_{r} \Big)\, r\, dr\, d\varphi +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big[\frac{\Delta\chi^{(\gamma)}}{r}\, \frac{\partial\,(\chi^{(\gamma)}, \eta^{(\gamma)})}{\partial\,(r,\varphi)} + \frac{\Delta\chi^{(\gamma)}}{r}\, \frac{\partial\,(f^{(\gamma)}, \eta^{(\gamma)})}{\partial\,(r,\varphi)} + \frac{\Delta f^{(\gamma)}}{r}\, \frac{\partial\,(\chi^{(\gamma)}, \eta^{(\gamma)})}{\partial\,(r,\varphi)} +$$

$$+ \frac{\Gamma\Delta\chi^{(\gamma)}}{2\pi r^2}\, \eta^{(\gamma)}_{\varphi} \Big]\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\Omega_\gamma} g^{(\gamma)} \eta^{(\gamma)}\, r\, dr\, d\varphi. \qquad (22)$$

Рассмотрим семейство задач (19), (20), в которых $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Разрешимость каждой из этих задач доказывается известными методами (см., например, [2, 6]). В основе доказательства лежат аналоги лемм 1 и 2. При любом $\gamma \in (0, \gamma_0]$ существует удовлетворяющая условиям (18) функция $f^{(\gamma)} \in H^2(\Omega_\gamma)$, такая что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\Big| \int\limits_{\Omega_\gamma} \Delta\chi^{(\gamma)}\, \frac{\partial\,(f^{(\gamma)}, \chi^{(\gamma)})}{\partial\,(r,\varphi)}\, dr\, d\varphi \Big| \leqslant \varepsilon \|\chi^{(\gamma)}\|^2_{H^2} \qquad (23)$$

для произвольного $\chi^{(\gamma)} \in H^2(\Omega_\gamma)$. Доказательство неравенства (23) почти полностью повторяет доказательство леммы 1, изложенное в работе [1]. Нужно только выбрать значение γ_0 настолько малым, чтобы носитель $\bar{\Delta}_\delta$ функции $f^{(\gamma)}$ не пересекался с окружностью $C_{2\gamma_0}$. Следует отметить, что в неравенстве (23) можно выбрать одно и то же значение ε для всех $\gamma \in (0, \gamma_0]$.

Ниже доказывается утверждение, аналогичное лемме 2. Пусть выполнены условия леммы 2 и величина Γ удовлетворяет неравенству (15). Тогда любое обобщенное решение $\chi^{(\gamma)}$ задачи (19), (20) допускает оценку

$$\|\chi^{(\gamma)}\|_{H^2} \leqslant C_4 \qquad (24)$$

с постоянной C_4, не зависящей от γ, если $0 < \gamma < \gamma_0$. Далее в задаче (19), (20) следует перейти к пределу при $\gamma \to 0$. С этой целью продолжим нулем функции $\chi^{(\gamma)}$, $f^{(\gamma)}$ в круг радиусом γ с центром в начале координат, сохранив прежние обозначения этих функций. Продолженные функции определены во всей области Ω и имеют конечные нормы в пространстве $H^2(\Omega)$. В силу оценки (24) нормы функций $\chi^{(\gamma)}$ $(0 < \gamma \leqslant \gamma_0)$ ограничены в указанном пространстве. При $\gamma \to 0$ существует слабый предел χ семейства функций $\{\chi^{(\gamma)}\}$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Предельная функция принадлежит пространству $\mathring{H}^2_0(\Omega)$. Слабокомпактное в пространстве $\mathring{H}^2(\Omega)$ множество функций $\{\chi^{(\gamma)}\}$, $\gamma \in [0, \gamma_0]$ является компактным в пространстве $\mathring{W}^{1,4}(\Omega)$. Это позволяет осуществить предельный переход в тождестве (22) при $\gamma \to 0$. Предельная функция χ удовлетворяет тождеству (13), что и завершает доказательство теоремы.

Вопрос о гладкости обобщенного решения вблизи границы $\Sigma \in C^\infty$ области Ω решается известными методами [2]. Имеют место включения $w_r, w_\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}')$, где Ω' — любая подобласть области Ω, не содержащая начала координат; $\boldsymbol{w} = (w_r, w_\varphi)$ — регулярная составляющая решения системы (1). Поведение вектора $\boldsymbol{w}$ вблизи особой точки $r = 0$ системы (6) требует специального исследования, в частности адекватного выбора весового класса функций. (Возможно, в данном случае следует использовать классы В. А. Кондратьева [7].)

Проблема единственности обобщенного решения стационарной задачи для уравнений Навье — Стокса очень сложна, и регулярность решения не дает гарантий его единственности, если число Рейнольдса велико. Следует отметить, что даже единственность радиального стационарного течения в круговом кольце до сих пор не доказана, хотя известно, что это решение изолировано [8].

4. О решении Гольдштика. Как отмечено выше, решение задачи о точечном вихре имеет бесконечный интеграл Дирихле вектора скорости, что обусловлено наличием особенности в области течения. Иногда точечные особенности возникают на ее границе. Подобным свойством обладают некоторые автомодельные решения уравнений Навье — Стокса, в частности решение Джеффри — Гамеля задачи о течении в плоском диффузоре с источником в начале координат [3]. Среди автомодельных решений системы [1] особый интерес представляет решение задачи о взаимодействии полубесконечной вихревой нити с твердой плоскостью, изученное М. А. Гольдштиком [9].

Обозначим через R, θ, φ сферические координаты, а через U, V, W — проекции вектора скорости на оси R, θ, φ в сферической системе координат. Общее представление автомодельных стационарных вращательно-симметричных решений системы (1) в сферических координатах задается формулами [10]

$$U = \frac{F'(s)}{R}, \qquad V = \frac{F(s)}{R\sin\theta}, \qquad W = \frac{G(s)}{R\sin\theta},$$

где $s = \cos\theta$. Функции F, G удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu(1-s^2)F'''' - 4\nu sF''' + FF''' + 3F'F'' = -2(1-s^2)^{-1}GG'; \tag{25}$$

$$\nu(1-s^2)G'' + FG' = 0. \tag{26}$$

Зададим краевые условия для решения этой системы:

$$F(0) = 0, \qquad F'(0) = 0, \qquad G(0) = 0; \tag{27}$$

$$\nu G \to \Gamma/(2\pi) \quad \text{при} \quad s \to 1. \tag{28}$$

Условие (27) является условием прилипания на твердой плоскости $z \equiv R\cos\theta = 0$. Условие (28) означает, что на оси симметрии $r \equiv R\sin\theta = 0$ расположены точечные вихри с постоянной линейной плотностью Γ. Величина $\mathrm{Re} = \Gamma/(2\pi\nu)$ является единственным определяющим параметром задачи. Не нарушая общности, можно считать, что $\Gamma > 0$. Данная задача впервые рассматривалась в работе [9]. Основной результат этой работы состоит в том, что при условии ограниченности осевой скорости w на оси симметрии решение задачи (25)–(28) существует и единственно, если $0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}^* \approx 5{,}53$, вне указанного интервала ее решения не существует.

Парадокс Гольдштика стимулировал дальнейшее изучение задачи взаимодействия вихря с плоскостью. В работе [11] показано, что если расширить класс решений задачи, допустив логарифмическую особенность функции w при $r \to 0$, то задача становится разрешимой при любом значении $\mathrm{Re} > 0$. Однако коэффициент при этой особенности остается неопределенным.

Рассмотрим краевую задачу для системы (1) в пространственной области Q, ограниченной поверхностью вращения S. Обозначим через P_- и P_+ точки пересечения поверхности S с осью симметрии z, а через l — интервал этой оси, заключенный между точками P_- и P_+. Вектор скорости удовлетворяет условию прилипания на поверхности S. На интервале l распределены вихри с постоянной линейной плотностью Γ. В дальнейшем необходимо выяснить, имеет ли эта задача решение при малых значениях числа Рейнольдса и дает ли решение Гольдштика главный член асимптотики решения системы (1) вблизи точек P_- и P_+.

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову, который в 1959 г. предложил ему заняться изучением уравнений Навье — Стокса и поддерживал работу автора в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pukhnachev V. V.** Singular solutions of Navier — Stokes equations // Proc. St Petersburg Math. Soc. 2014. V. 15. Trans. AMS. Ser. 2. V. 232.
2. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
3. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
4. **Hopf E.** Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik // Math. Ann. 1941. Bd 117. S. 764–775.
5. **Hopf E.** On nonlinear partial differential equations // Lecture series of the symposium on partial differential equations. Berkeley: Univ. of Kansas, 1955. P. 1–31.
6. **Fujita H.** On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier — Stokes equations // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1961. V. 9, pt 1. P. 59–102.
7. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
8. **Fujita H., Morimoto H., Okamoto H.** Stability analysis of the Navier — Stokes equations flows in annuli // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 950–978.
9. **Гольдштик М. А.** Об одном парадоксальном решении уравнений Навье — Стокса // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 610–621.
10. **Слезкин Н. А.** Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1934. Вып. 2. С. 89–90.
11. **Serrin J.** The swirling vortex // Phylos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1972. V. 271, N 1214. P. 325–360.

Поступила в редакцию 30/IX 2013 г.