

УДК 531.391.1:532.5.011

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СТЕРЖНЯ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Шаповалов, С. В. Лапшина

Волжский политехнический институт Волгоградского государственного
технического университета, 404121 Волжский

Выведены уравнения пространственного движения искривленного стержня конечной длины в потоке вязкой жидкости. Получены аналитические решения задач о движении прямолинейного стержня в условиях чистого сдвига, простого сдвига и одноосного растяжения жидкости. Исследована продольная устойчивость прямолинейного стержня при его пространственном движении. Выполнена оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной жесткими прямыми стержнями.

Ключевые слова: поток вязкой жидкости, прямолинейный стержень, криволинейный стержень, упругая линия.

Дифференциальные уравнения упругой линии для тонкого упругого стержня с различающимися главными жесткостями, находящегося в равновесии под действием сил, приложенных к его концам, вывел Г. Р. Кирхгоф. Наиболее подробно эта задача изучена в [1].

В данной работе рассмотрена эволюция формы упругой линии стержня под действием распределенной нагрузки, действующей со стороны вязкой жидкости. Интенсивность распределенной нагрузки зависит от пространственной ориентации стержня. В работах [2, 3] исследованы основные закономерности плоского движения нити и стержня конечной длины в потоке вязкой жидкости.

В качестве приложения результатов решения рассматриваемой задачи можно указать процессы переработки полимерных материалов, наполненных армирующими короткими волокнами различной природы (полиамидные, стеклянные, углеродные, металлические и др.). Переработка указанных материалов сопровождается смешением расплава полимера с наполнителем, разрушением волокнистого наполнителя, ориентацией наполнителя, образованием пристенного слоя и т. д. Полученные уравнения могут использоваться при анализе рептационного движения длинномерных биологических объектов в сплошной среде, а также ориентационных эффектов электромагнитореологических жидкостей.

1. Динамические уравнения. Рассматривается изолированный пространственный стержень произвольной формы в ламинарном потоке вязкой жидкости. При изгибе тонкого стержня внешние силы, действующие на боковую поверхность, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями. Силы инерции и тяжести пренебрежимо малы. Стержень смачивается жидкостью, и выполняется условие прилипания. Со стороны вязкой жидкости на стержень действует сила трения, при этом поле скоростей в жидкости не изменяется (не учитывается эффект аэроупругости). Упругие деформации, обусловленные растяжением или сжатием упругой оси стержня, не учитываются. На стержне в естественном состоянии и при деформации отсутствуют участки большой кривизны и выполняется условие $\max(d/l, kd) \ll 1$ ($2l$, d — длина и диаметр стержня; k — кривизна). Поперечное сечение принимается малым по сравнению с общими размерами стержня и при деформации не меняется, т. е. отсутствует давление продольных волокон друг на друга. При

изгибе сечения остаются плоскими, лишь поворачиваясь на некоторый угол относительно первоначального положения.

Введем неподвижную в пространстве (или “вмороженную” в жидкость) систему координат (x, y, z) . Обозначим через x, y, z координаты точек упругой линии стержня s . Положение кривой s описывает вектор-функция $\mathbf{r}(s, t)$, $-l \leq s \leq l$ (t — время). Направлениям x, y, z соответствует правосторонне ориентированный триэдр $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Обозначим через \mathbf{l} ($\mathbf{l} = \mathbf{r}_s$, $|\mathbf{l}| = 1$) вектор касательной к упругой линии, $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{l}$ — вектор нормали, \mathbf{b} — вектор бинормали.

Согласно [4] уравнения равновесия стержня имеют вид

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{M}_s + \mathbf{m} = \mathbf{F} \times \mathbf{l}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{K} = A\mathbf{l}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{l}) + B\mathbf{n}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{n}) + B\mathbf{b}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{b})$ — линейная плотность внешних сил; $A = 2\pi\mu/\ln(0,952/\sqrt{c})$ — коэффициент, характеризующий продольную составляющую силы трения; μ — вязкость жидкости; \mathbf{m} — момент внешней нагрузки на единицу длины; c — объемная концентрация волокнистого наполнителя в жидкости; $B = 4\pi\mu/\ln(7,4/\text{Re})$ — коэффициент, характеризующий поперечную составляющую силы трения; $\text{Re} = \langle v \rangle \rho d / \mu$ — число Рейнольдса; ρ — плотность жидкости; $\langle v \rangle$ — характерная скорость; \mathbf{V} — скорость жидкости; \mathbf{M} — момент; нижним индексом отмечены соответствующие производные.

Кроме осевого и поперечного движения стержня в жидкости [2] будем учитывать вращение его поверхности вокруг упругой оси с окружной скоростью $v_\theta = 0,5d\chi_s \mathbf{r}_t \mathbf{l}$. Стержень диаметром d вращается в квазитрубке (стенки которой образованы соседними волокнами) радиусом $\langle r \rangle = d/(2,1\sqrt{c})$, заполненной вязкой жидкостью [2]. При этом на его поверхность действует касательное напряжение $\tau_{\tau\theta} = 12\mu v_\theta \langle r \rangle / (d^2 - 4\langle r \rangle^2)$. Следовательно, момент внешней нагрузки определяется выражением $\mathbf{m} = 0,5\pi d^2 \tau_{\tau\theta} \mathbf{l}$, где $\tau_{\tau\theta} = -25,2\mu\sqrt{c}v_\theta/[d(4 - 4,41c)]$; $v_\theta = 0,5d\chi(\alpha x_t + \beta y_t + \gamma z_t)$. Поперечные составляющие момента внешней нагрузки являются величинами высших порядков малости, поэтому полагаем $\mathbf{m}\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{m}\mathbf{b} = 0$.

С учетом соотношений $\mathbf{F} = (\mathbf{F}\mathbf{l})\mathbf{l} + (\mathbf{F}\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{F}\mathbf{b})\mathbf{b} = N\mathbf{l} + Q\mathbf{n} + P\mathbf{b}$, $\mathbf{l}_s = k\mathbf{n}$, $\mathbf{M} = EJ(\mathbf{l} \times \mathbf{l}_s - \mathbf{l}_0 \times \mathbf{l}_{0s}) + GJ_p(\chi - \chi_0)\mathbf{l}$ [3], $\mathbf{n}_s = -k\mathbf{l} + \chi\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_s = -\chi\mathbf{n}$, $\mathbf{l} \times \mathbf{l} = 0$, $\mathbf{n} \times \mathbf{l} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{l}_s \times \mathbf{l}_s = 0$, $\mathbf{l} \times \mathbf{l}_{ss} = k_s\mathbf{b} - k\chi\mathbf{n}$ уравнения (1.1) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(N_s - kQ) + \mathbf{n}(Q_s + Nk + P\chi) + \mathbf{b}(P_s + \chi Q) = \\ = -A\mathbf{l}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{l}) - B\mathbf{n}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{n}) - B\mathbf{b}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{b}); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$EJ[(k_0\chi_0 - k\chi)\mathbf{n} + (k_s - k_{0s})\mathbf{b}] + GJ_p[k(\chi - \chi_0)\mathbf{n} + (\chi_s - \chi_{0s})\mathbf{l}] + 0,5\pi d^2 \tau_{\tau\theta} \mathbf{l} = -Q\mathbf{b} + P\mathbf{n}, \quad (1.3)$$

где χ — кручение; N — продольная сила; Q, P — компоненты перерезывающей силы; G — модуль сдвига; $J_p = \pi d^4/32$ — полярный момент инерции поперечного сечения; E — модуль упругости; $J = \pi d^4/64$ — момент инерции сечения; \mathbf{l}_0 — вектор касательной, соответствующий начальной (естественной) конфигурации стержня; k_0, χ_0 — начальные кривизна и кручение; $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t = (v_x - x_t)\mathbf{i} + (v_y - y_t)\mathbf{j} + (v_z - z_t)\mathbf{k}$; v_x, v_y, v_z — компоненты скорости; $\mathbf{l} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$; $\mathbf{n} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}$; $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ — направляющие косинусы девяти углов, образуемых осями “сопровождающего” трехгранника с осями координат x, y, z .

Косинусы углов, образуемых касательной с осями координат x, y, z , соответственно равны $\alpha = x_s, \beta = y_s, \gamma = z_s$.

Уравнения (1.2), (1.3) необходимо дополнить условиями ортогональности

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ \alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \quad \alpha \lambda + \beta \mu + \nu \gamma = 0, \quad l \lambda + m \mu + n \nu = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если в начальный момент напряжения в стержне отсутствуют, то краевые условия для стержня со свободными концами имеют вид

$$t = 0, \mathbf{r} = \mathbf{r}_0: \mathbf{M} = \mathbf{F} = 0, \quad t > 0, s = \pm l: \mathbf{M} = \mathbf{F} = 0, \quad (1.5)$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор начальной (естественной) конфигурации стержня.

Разрешив уравнение (1.2) относительно $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t$ и продифференцировав обе части полученного выражения по s , получим уравнение в более удобной для анализа форме (исключены функции x, y, z)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s - \mathbf{r}_{ts} = & [-B^{-1}(Q_{ss} + N_s k + N k_s + P_s \chi + P \chi_s) - A^{-1}k(N_s - kQ) + B^{-1}\chi(P_s + Q\chi)]\mathbf{n} + \\ & + [kB^{-1}(Q_s + Nk + P\chi) - A^{-1}(N_{ss} - k_s Q - kQ_s)]\mathbf{l} + \\ & + [-B^{-1}\chi(Q_s + Nk + P\chi) - B^{-1}(P_{ss} + \chi_s Q + \chi Q_s)]\mathbf{b}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{r}_{ts} = \mathbf{l}_t = \alpha_t \mathbf{i} + \beta_t \mathbf{j} + \gamma_t \mathbf{k} = (\alpha_t l + \beta_t m + \gamma_t n)\mathbf{n}$; $\mathbf{V}_s = (\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V} = [((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n}]\mathbf{n} + [((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l}]\mathbf{l} + [((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{b}]\mathbf{b}$; $\nabla = \mathbf{i} \partial/\partial x + \mathbf{j} \partial/\partial y + \mathbf{k} \partial/\partial z$.

Таким образом, для 12 величин (функций s и t) $P, Q, N, \alpha, \beta, \gamma, l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ имеем 12 уравнений: (1.3), (1.4), (1.6).

Согласно (1.6) изменение ориентации или формы стержня обусловлено градиентом скорости, поскольку постоянная составляющая скорости ($v_x = \text{const}, v_y = \text{const}, v_z = \text{const}$) вызывает конвективный снос стержня вдоль соответствующей оси координат без изменения его конфигурации. Это позволяет при изучении конформационных превращений поместить начало декартовой системы координат в любую точку стержня, например в середину упругой оси ($x = 0, y = 0, z = 0, s = 0$).

Если изгибная жесткость стержня мала, так что его можно рассматривать как нить (подробнее см. п. 5 и [3]), то уравнения движения можно существенно упростить, положив $\mathbf{M} = 0, \mathbf{F} = N\mathbf{l}$.

2. Движение стержня в простом сдвиговом течении. Пусть ось x лежит в горизонтальной плоскости и соответствует направлению течения. Компоненты скорости: $v_x = \gamma_- y, v_y = 0, v_z = 0$ ($\gamma_- = \partial v_x / \partial y$ — скорость деформации). Рассматривается произвольно ориентированный прямолинейный стержень длиной $2l$, середина которого совпадает с началом координат. Ориентацию характеризуют функции $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$. Справедливы равенства $k = 0, \chi = 0$, откуда следует $Q = 0, P = 0$.

Используя уравнения (1.3)–(1.6), получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} l\beta\gamma_- - \alpha_t l - \beta_t m - \gamma_t n &= 0, & \alpha\beta\gamma_- &= -A^{-1}N_{ss}, & \lambda\beta &= 0, \\ t = 0: \alpha &= \alpha_0, & \beta &= \beta_0, & \gamma &= \gamma_0, & t > 0, s = \pm l: N &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и в задачах, рассматриваемых в пп. 3, 4, условия ортогональности (1.4) не приводятся.

Из второго уравнения в (2.1) следует

$$N = 0,5A\alpha\beta\gamma_-(l^2 - s^2). \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) усилие в стержне отсутствует, если выполняется равенство $\alpha\beta = 0$, что имеет место при расположении стержня либо в горизонтальной плоскости ($\beta = 0$), либо в вертикальной ($\alpha = 0$). Максимальное усилие в стержне соответствует условию $\alpha^2 = \beta^2$, когда упругая ось лежит в плоскости, которая проходит через ось z и наклонена к оси x под углом $\pm\pi/4$, что согласуется с результатами [2].

В соответствии с (2.2) в общем случае $\beta \neq 0$, поэтому в третьем уравнении в (2.1) следует положить $\lambda = 0$. Для решения задачи удобно перейти к углам Эйлера θ, φ, ψ . Для первых трех направляющих косинусов имеем [5]

$$\alpha = \cos\psi \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi \sin\psi, \quad \beta = \cos\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi \sin\psi, \quad \gamma = \sin\psi \sin\theta. \quad (2.3)$$

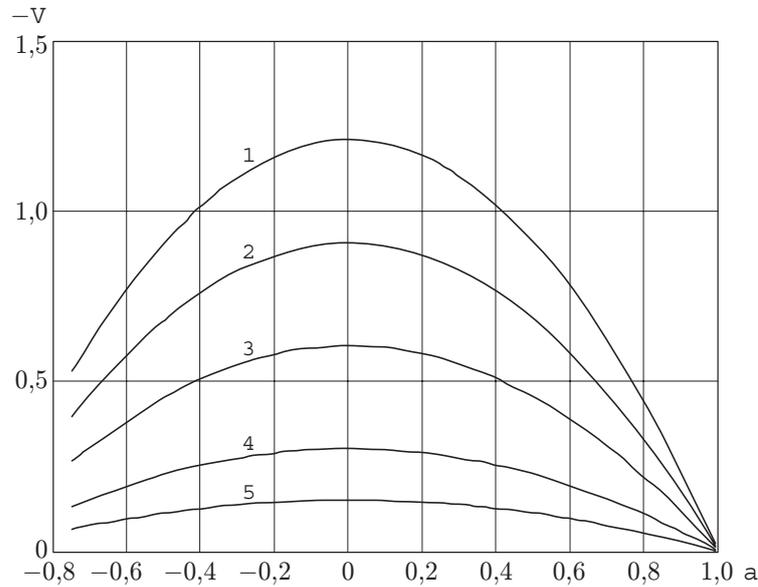


Рис. 1. Зависимость скорости конца стержня от параметра α при $\alpha_0 = -0,75$:
 1 — $\beta_0 = 0,8$; 2 — $\beta_0 = 0,6$; 3 — $\beta_0 = 0,4$; 4 — $\beta_0 = 0,2$; 5 — $\beta_0 = 0,1$

При этом первое уравнение в (2.1) и уравнение $\lambda = 0$ примут вид

$$-\gamma_- \cos \theta \sin^2 \psi + \psi_t = 0, \quad \sin \varphi \sin \theta = 0. \tag{2.4}$$

Для выполнения второго уравнения в (2.4) достаточно положить $\sin \varphi = 0$. Кроме того, примем $\cos \theta = C$, где C — постоянная. Интегрируя первое уравнение в (2.4), с учетом условия $t = 0, \psi = \psi_0$ получим

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi_0 (1 + (\operatorname{tg} \psi_0) C \gamma_- t)^{-1}. \tag{2.5}$$

С учетом равенств $\sin \varphi = 0, \cos \varphi = 1, \cos \theta = C$, используя формулы (2.3), получим

$$\alpha = (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{-0,5}, \quad \beta = C \operatorname{tg} \psi (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{-0,5}, \quad \gamma = \operatorname{tg} \psi (1 - C^2)^{0,5} (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{-0,5}. \tag{2.6}$$

Из начальных условий (2.1) находим

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \alpha_0^{-1} (\beta_0^2 + \gamma_0^2)^{0,5}, \quad C = \beta_0 (\beta_0^2 + \gamma_0^2)^{-0,5}. \tag{2.7}$$

Абсолютная величина скорости стержня определяется по формуле $v = |\mathbf{r}_t| = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}$. С учетом соотношений $x = \alpha s, y = \beta s, z = \gamma s$ формула для определения абсолютной величины скорости конца стержня принимает вид

$$V = \sqrt{\alpha_\tau^2 + \beta_\tau^2 + \gamma_\tau^2}, \tag{2.8}$$

где $V = v|_{s=l} / (l \gamma_-)$ — безразмерная скорость.

На рис. 1 представлена зависимость скорости конца стержня от параметра α . Максимум скорости наблюдается в точке $\alpha = 0$, что соответствует моменту пересечения стержнем плоскости yz . Чем ближе стержень расположен к плоскости xz , тем ниже его скорость. При приближении к точке статического равновесия ($\alpha = 1$) скорость конца стержня уменьшается до нуля.

3. Движение стержня в условиях чистого сдвига жидкости. При чистом сдвиге компоненты скорости определяются соотношениями $v_x = \gamma_+ x, v_y = -\gamma_+ y, v_z = 0$

($\gamma_+ = \partial v_x / \partial x$ — скорость деформации). С учетом уравнений (1.3)–(1.6) и допущений п. 2 движение прямолинейного стержня описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} l\alpha\gamma_+ - m\beta\gamma_+ - \alpha_t l - \beta_t m - \gamma_t n &= 0, & \alpha^2\gamma_+ - \beta^2\gamma_+ &= -A^{-1}N_{ss}, & \lambda\alpha - \mu\beta &= 0, \\ t = 0: \quad \alpha &= \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \gamma_0, & t > 0, \quad s = \pm l: \quad N &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из второго уравнения в (3.1) находим осевое усилие

$$N = 0,5A\gamma_+(\alpha^2 - \beta^2)(l^2 - s^2). \quad (3.2)$$

Из выражения (3.2) следует, что при $\beta^2 > \alpha^2$ усилия в стержне сжимающие ($N < 0$), при $\alpha^2 > \beta^2$ — растягивающие ($N > 0$). Если упругая ось стержня лежит в плоскости, которая проходит через ось z и наклонена к оси x под углом $\pi/4$, т. е. выполняется равенство $\beta^2 = \alpha^2$, то усилие в стержне отсутствует ($N = 0$). Максимальное растягивающее усилие в стержне имеет место при $\beta = 0$, сжимающее — при $\alpha = 0$.

С учетом соотношений (2.3) получим задачу

$$\begin{aligned} 0,5 \sin 2\psi \sin^{-1} 2\varphi + \cos \theta \varphi_\tau + \psi_\tau &= 0, & \cos \theta + \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{ctg} \psi &= 0, \\ \tau = 0, & \quad \varphi = \varphi_0, & \quad \psi = \psi_0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\tau = \gamma_+ t$. Для трех неизвестных функций θ , φ , ψ имеем только два уравнения, поэтому зафиксируем угол нутации $\cos \theta = C$, где C — постоянная. При этом решение задачи (3.3) имеет вид

$$(1 - 0,5C^2) \ln |\operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \varphi_0| - 0,5(1 - C^2)(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0) = -\tau. \quad (3.4)$$

Вернемся к функциям α , β , γ , используя формулы (2.3), второе уравнение в (3.3) и известные тригонометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{C\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{C^2(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + 4\operatorname{tg}^2 \varphi}}, \\ \beta &= \frac{C \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{C^2(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + 4\operatorname{tg}^2 \varphi}}, & \gamma &= \frac{2\sqrt{1 - C^2} \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{C^2(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + 4\operatorname{tg}^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из начальных условий находим постоянные

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = (\beta_0/\alpha_0)^2, \quad C^2 = 4\alpha_0^2\beta_0^2/[\alpha_0^2 + \beta_0^2 - (\alpha_0^2 - \beta_0^2)^2]. \quad (3.6)$$

В двумерном случае ($\gamma = 0$, $C = 1$, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$) из (3.4)–(3.6) получим $\alpha^2 = \alpha_0^2/[\alpha_0^2 + \beta_0^2 \exp(-4\tau)]$, что согласуется с результатами работы [3].

На рис. 2 представлена зависимость скорости конца стержня (см. (2.8)) от параметра α при различных начальных положениях стержня. Зависимости на рис. 2 существенно отличаются от аналогичных зависимостей в случае простого сдвига. При $\alpha \approx 0,7$ наблюдается экстремум. Наличие второго экстремума в области $\alpha < 0,7$ зависит от начального положения стержня. Даже в том случае, когда стержень близко расположен к плоскости xz (кривая 5), скорость его поворота по направлению течения достаточно высока, при этом на кривой $V(\alpha)$ имеется один экстремум.

4. Движение стержня при одноосном растяжении жидкости. В случае движения стержня при одноосном растяжении жидкости компоненты скорости имеют вид [6] $v_x = \gamma_* x$, $v_y = -0,5\gamma_* y$, $v_z = -0,5\gamma_* z$ ($\gamma_* = \partial v_x / \partial x$ — скорость деформации).

С учетом допущений, принятых в п. 2 для прямолинейного стержня, используя уравнения (1.3)–(1.6), получим следующую задачу:

$$l\alpha\gamma_* - 0,5m\beta\gamma_* - 0,5n\gamma_* - \alpha_t l - \beta_t m - \gamma_t n = 0,$$

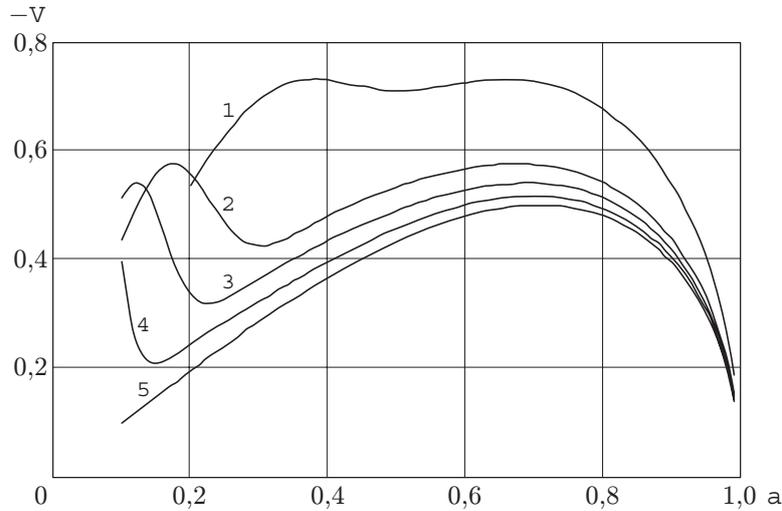


Рис. 2. Зависимость скорости конца стержня от параметра α при различных начальных положениях стержня:

1 — $\alpha_0 = 0,2, \beta_0 = 0,9$; 2 — $\alpha_0 = 0,1, \beta_0 = 0,9$; 3 — $\alpha_0 = 0,1, \beta_0 = 0,8$; 4 — $\alpha_0 = 0,1, \beta_0 = 0,4$; 5 — $\alpha_0 = \beta_0 = 0,001$

$$\alpha^2 \gamma_* - 0,5 \beta^2 \gamma_* - 0,5 \gamma^2 \gamma_* = -A^{-1} N_{ss}, \quad \lambda \alpha - 0,5 \mu \beta - 0,5 \nu \gamma = 0, \quad (4.1)$$

$$t = 0: \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad t > 0, \quad s = \pm l: \quad N = 0.$$

Решение второго уравнения в (4.1) имеет вид

$$N = 0,25 A \gamma_* (3\alpha^2 - 1)(l^2 - s^2). \quad (4.2)$$

Согласно (4.2) усилие в стержне отсутствует ($N = 0$), если его упругая ось лежит на поверхности круглого конуса с вершиной в начале координат и углом при вершине, косинус которого равен $\alpha = 1/\sqrt{3}$. Если ось стержня находится внутри указанного конуса ($\alpha > 1/\sqrt{3}$), то усилия в нем растягивающие, если вне конуса ($\alpha < 1/\sqrt{3}$), то усилия в нем сжимающие.

Первое и третье уравнения в (4.1) запишем с использованием углов ψ, θ, φ (см. (2.3)):

$$1,5 \sin \psi \cos \psi + \cos \theta \varphi_\tau + \psi_\tau = 0, \quad \sin \theta \sin \varphi = 0. \quad (4.3)$$

Здесь $\tau = \gamma_* t$. Во втором уравнении в (4.3) полагаем $\sin \varphi = 0, \theta = \theta_0 = \text{const}$. Решение первого уравнения с учетом начального условия $\tau = 0, \psi = \psi_0$ имеет вид

$$\text{tg } \psi = \text{tg } \psi_0 \exp(-1,5\tau). \quad (4.4)$$

Используя соотношения (2.3), вернемся к переменным α, β, γ :

$$\alpha = \cos \psi, \quad \beta = \cos \theta_0 \sin \psi, \quad \gamma = \sin \theta_0 \sin \psi. \quad (4.5)$$

Постоянные θ_0 и ψ_0 находятся из условий (4.1): $\text{tg } \theta_0 = \gamma_0/\beta_0, \cos \psi_0 = \alpha_0$.

Согласно (4.4), (4.5) при длительной деформации упругая ось стержня совпадает с осью x ($\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$) независимо от начальной ориентации. В процессе эволюции упругая ось перемещается в плоскости, проходящей через ось x и прямую, соответствующую начальному положению стержня.

Абсолютная величина скорости конца стержня (2.8) описывается выражением $V = -1,5\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$, не зависит от функций β, γ и имеет один экстремум $V = -0,75$ при $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

5. Продольная устойчивость стержня. Согласно результатам пп. 2–4 распределение осевого усилия по длине стержня описывается параболой, а абсолютная величина усилия и его знак зависят от ориентации стержня, так что в общем случае можно записать

$$N = -D(\alpha, \beta)(l^2 - s^2), \quad (5.1)$$

где D — функция, зависящая от ориентации и типа течения (см. (2.2), (3.2), (4.2)).

В случае сжимающих усилий ($D > 0$) возможна потеря устойчивости за счет продольного изгиба стержня, что в случае высокомодульных волокон (стеклянных, углеродных) приводит к их разрушению. В работе [2] устойчивость исследовалась путем введения малых возмущений формы и использования линеаризованных уравнений. Исследуем плоскую (изгибающую) форму потери устойчивости [7].

Распределенная нагрузка от осевой силы трения симметрична, поэтому ограничимся участком $0 \leq s \leq l$, заменив половину стержня заделкой. При отклонении оси стержня на угол ξ перерезывающая сила Q с учетом (5.1) определяется интегралом

$$Q = -\sin \xi \int_s^l \frac{\partial N}{\partial s} ds = -0,5D(l^2 - s^2)\xi.$$

Здесь $\sin \xi \approx \xi$ при $|\xi| \ll 1$; величина $\partial N/\partial s$ характеризует интенсивность осевой распределенной нагрузки.

Изгибающий момент $M = EJ\xi_s$. Следовательно, перерезывающая сила $Q = M_s = EJ\xi_{ss}$. Отсюда получим дифференциальное уравнение для определения отклонения:

$$\xi_{ss} + D(l^2 - s^2)\xi/(2EJ) = 0. \quad (5.2)$$

Граничные условия (равенство нулю момента на свободном конце и отсутствие отклонения в месте заделки) записываются в виде

$$s = l, \quad \xi_s = 0; \quad s = 0, \quad \xi = 0. \quad (5.3)$$

Решение задачи (5.2), (5.3) не выражается через элементарные функции, поэтому собственные числа $\lambda = Dl^4/(2EJ)$ найдены численно: $\lambda_1 = 5,122$; $\lambda_2 = 39,66$; $\lambda_3 = 106,249$; $\lambda_4 = 204,86$; Обозначим $D_1 = 2\lambda_1 EJ/l^4$. Следовательно, при $D > D_1$ стержень теряет устойчивость, при $D < D_1$ устойчивость сохраняется. Если выполняется условие $D < D_1$ при $D = D_{\max}$ (величина D_{\max} соответствует максимальному сжимающему усилию), то стержень сохраняет устойчивость при любой пространственной ориентации. Например, в случае одноосного течения согласно (4.2) $D_{\max} = D|_{\alpha=0} = 0,25A\gamma_*$.

Экспериментально наблюдалось скручивание низко модульных волокон в клубок при перемешивании суспензии [8], что объясняется неустойчивостью положения нейтрального равновесия стержня в условиях простого сдвигового течения [2, 3]. Стержень, совершая вращательное движение, проходит положения, соответствующие $\alpha > 0$, $\beta < 0$, в которых действует осевое сжимающее усилие ($N < 0$). Выпучиванию середины стержня препятствуют силы вязкого трения, поэтому имеются все условия для получения высших форм продольного изгиба, соответствующих $\lambda_2, \lambda_3, \dots$. Действительно, численный анализ задач [2, 3] показал возможность пилообразной формы стержня при значительных сжимающих усилиях. Перемешивание полиуретановых волокон в полиакрилатовой матрице проводилось при следующих условиях [8]: $d = 30$ мкм; $c = 0,1$; $\mu = 0,1$ Па·с; $E = 0,5$ МПа; $\gamma = 200$ с⁻¹; $2l = 1$ мм. При этом $D_{\max} = 0,25A\gamma_- = 9,46$ Па; $D_1 = 3,31$ Па, следовательно, стержень (полиуретановое волокно) теряет устойчивость ($D_{\max} > D_1$).

6. Вязкость суспензии, наполненной жесткими стержнями. При течении системы, наполненной гибкими или жесткими стержнями, требуются дополнительные затраты энергии на преодоление сил вязкого трения при обтекании стержней. Вследствие этого эффективная вязкость системы больше вязкости чистой жидкости.

Для стержня длиной $2l$ энергия вязкого трения W определяется интегралом [3]

$$W = \int_{-l}^l (\mathbf{V} - \mathbf{r}_t) \mathbf{K} ds.$$

Учитывая первое уравнение в (1.1) и разрешив (1.2) относительно разности скоростей $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t = -B^{-1}(Q_s + Nk + P\chi)\mathbf{n} - A^{-1}(N_s - kQ)\mathbf{l} - B^{-1}(P_s + \chi Q)\mathbf{b}$, для искривленного стержня получим

$$W = \int_{-l}^l [B^{-1}(Q_s + Nk + P\chi)^2 + A^{-1}(N_s - kQ)^2 + B^{-1}(P_s + \chi Q)^2] ds.$$

В случае прямолинейного достаточно жесткого стержня ($k = 0$, $\chi = 0$, $P = 0$, $Q = 0$) имеем

$$W = A^{-1} \int_{-l}^l N_s^2 ds.$$

Суммарные затраты энергии W_Σ , связанные с обтеканием всех стержней, определяются соотношением [3]

$$W_\Sigma = \frac{2V_+c}{\pi d^2 l A} \int_{-l}^l N_s^2 ds, \quad (6.1)$$

где V_+ — объем суспензии.

В случае простого сдвига из уравнений (2.2), (2.5)–(2.7), (6.1) следует

$$W_\Sigma = 4V_+cAl^2\gamma_-^2\alpha^2\beta^2/(3\pi d^2), \quad (6.2)$$

где $\tau = \gamma_-t$; $\beta = \beta_0/\sqrt{(\alpha_0 + \beta_0\tau)^2 + 1 - \alpha_0^2}$; $\alpha = \beta(\alpha_0 + \beta_0\tau)/\beta_0$.

Выражение для эффективной вязкости в условиях простого сдвига с учетом дополнительных затрат энергии на обтекание стержней имеет вид

$$\mu_+ = (\tau_{xy}\gamma_-V_+ + W_\Sigma)/(\gamma_-^2V_+), \quad (6.3)$$

где $\tau_{xy} = \mu\gamma_-$ — касательное напряжение.

Для суспензии, наполненной стержнями одинаковой длины, диаметра и ориентации, из (6.2), (6.3) следует

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{8}{3} \frac{l^2c}{d^2 \ln(0,952/\sqrt{c})} \alpha^2\beta^2 \right). \quad (6.4)$$

Согласно (6.4), если стержни параллельны плоскости xz ($\beta = 0$), то вязкость системы минимальна. Вязкость системы максимальна при $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, $\beta = \pm 1/\sqrt{2}$, $\gamma = 0$.

В случае полидисперсного наполнителя вязкость определяется выражением

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{8c}{3 \ln(0,952/\sqrt{c})} \sum_{i=1}^m \frac{l_i^2}{d_i^2} \psi_i \alpha_i^2 \beta_i^2 \right), \quad (6.5)$$

где $i = 1, \dots, m$ — номер фракции; ψ_i — относительное количество стержней i -й фракции

$$\left(\sum_{i=1}^m \psi_i = 1 \right).$$

При простом сдвиге положение нейтрального равновесия неустойчиво, поэтому при длительном деформировании стержни будут вращаться с неравномерной скоростью [2, 3]. Ориентация приобретает изотропный характер. Найдем вязкость системы при хаотической ориентации. В силу четности функции (6.2) $W_\Sigma(\alpha) = W_\Sigma(-\alpha)$, $W_\Sigma(\beta) = W_\Sigma(-\beta)$ ограничимся первым октантом $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$ (θ, φ — сферические координаты). В направлениях θ_i, φ_i выделим двумерный сектор с углами $\Delta\theta = \pi/(2m)$, $\Delta\varphi = \pi/(2m)$ и будем рассматривать l и d как функции углов θ_i, φ_i . При равновероятной ориентации стержней функция ψ в (6.5) определяется как отношение объемов выделенного конуса и $1/8$ шара единичного радиуса:

$$\psi = \Delta\theta\Delta\varphi \sin\theta / \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \Delta\theta\Delta\varphi \sin\theta.$$

В этом случае

$$\lim_{\substack{\Delta\theta \rightarrow 0 \\ \Delta\varphi \rightarrow 0, m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^m \left(\frac{l(\varphi_i, \theta_i)}{d(\varphi_i, \theta_i)} \right)^2 \frac{2\Delta\theta\Delta\varphi \sin\theta_i}{\pi} \alpha^2 \beta^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \alpha^2 \beta^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Для монодисперсного наполнителя ($l = \text{const}$, $d = \text{const}$) интеграл с учетом соотношения $\alpha^2 \beta^2 = (\cos\theta)^2 (\sin\theta \sin\varphi)^2$ равен $l^2/(15d^2)$, а выражение (6.5) принимает вид

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{8}{45} \frac{l^2}{d^2} \frac{c}{\ln(0,952/\sqrt{c})} \right).$$

При чистом сдвиге с учетом выражений (3.2), (6.1) и результатов работы [3] имеем соотношения

$$W_\Sigma = \frac{4V_+ cl^2}{3\pi d^2} A\gamma_+^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2, \quad \mu_+ = \frac{\sigma_{xx}\gamma_+ V_+ + W_\Sigma}{4\gamma_+^2 V_+},$$

где $\sigma_{xx} = 4\mu\gamma_+$; функции $\alpha(t), \beta(t)$ определены в (3.4)–(3.6).

Для монодисперсной системы эффективная вязкость определяется выражением

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{2}{3} \frac{l^2 c}{d^2 \ln(0,952/\sqrt{c})} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \right). \quad (6.6)$$

В случае полидисперсного наполнителя

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{2c}{3 \ln(0,952/\sqrt{c})} \sum_{i=1}^m \frac{l_i^2}{d_i^2} \psi_i (\alpha_i^2 - \beta_i^2)^2 \right). \quad (6.7)$$

При одноосном растяжении с учетом выражений (4.2), (4.4), (4.5), (6.1) и результатов [3, 9] имеем соотношения

$$W_\Sigma = \frac{4V_+ cl^2}{3\pi d^2} A\gamma_*^2 (3\alpha^2 - 1)^2, \quad \mu_+ = \frac{\sigma_{xx}\gamma_* V_+ + W_\Sigma}{3\gamma_*^2 V_+}, \quad (6.8)$$

где $\alpha^2 = \alpha_0^2 / [\alpha_0^2 + (1 - \alpha_0^2) \exp(-3\tau)]$; $\tau = \gamma_* t$; $\sigma_{xx} = 3\mu\gamma_*$ — растягивающее напряжение.

Из соотношений (6.8) для монодисперсной системы получим

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{2}{9} \frac{l^2 c}{d^2 \ln(0,952/\sqrt{c})} (3\alpha^2 - 1)^2 \right). \quad (6.9)$$

Согласно (6.9) при $\alpha^2 = 1/3$ вязкость системы минимальна, а при $\alpha^2 = 1$ максимальна.

В случае полидисперсной системы

$$\mu_+ = \mu \left(1 + \frac{2c}{9 \ln(0,952/\sqrt{c})} \sum_{i=1}^m \frac{l_i^2}{d_i^2} \psi_i(3\alpha_i^2 - 1)^2 \right). \quad (6.10)$$

Здесь $\alpha_i^2 = \alpha_{i0}^2 / [\alpha_{i0}^2 + (1 - \alpha_{i0}^2) \exp(-3\tau)]$.

Независимо от начальной ориентации формулы (6.6), (6.7), (6.9), (6.10) предполагают асимптотическое увеличение вязкости во времени, поскольку $\alpha = 1$, $\beta = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Положение статического равновесия стержней в течениях при наличии растяжения устойчиво.

Сопоставление полученных результатов с результатами для плоского движения [3] показывает, что при прочих равных условиях учет пространственного положения стержней ($\gamma \neq 0$) приводит к уменьшению эффективной вязкости суспензии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Николаи Е. Л.** Труды по механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
2. **Шаповалов В. М.** Движение гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 144–153.
3. **Шаповалов В. М., Лапшина С. В.** Движение стержня в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 56–62.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1965.
5. **Ольховский И. И.** Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
6. **Трелоар Л.** Физика упругости каучука. М.: Химия, 1988.
7. **Карман Т., Био М.** Математические методы в инженерном деле. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
8. **Пучков А. Ф., Миликевич В. Ю., Салямков К. Ю., Чалдаева Е. В.** Использование коротких волокон для улучшения свойств адгезивов ортопедической стоматологии // Химия и технология элементоорганических мономеров и полимерных материалов: Сб. науч. тр. Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т, 1994. С. 122–126.
9. **Шаповалов В. М.** О нанесении высоковязкой жидкости на движущуюся подложку // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 170–175.

*Поступила в редакцию 4/III 2003 г.,
в окончательном варианте — 20/V 2003 г.*