

УДК 532.5.031-533.692-533.694.2

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДВУХЭЛЕМЕНТНОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

Д. Ф. Абзалилов, Р. Ф. Марданов

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева  
Казанского (Приволжского) федерального университета, 420008 Казань  
E-mail: damir.abzalilov@ksu.ru

Предложен приближенный метод проектирования двухэлементного крылового профиля, основанный на сведении обратной краевой задачи в двусвязной области к задаче в односвязной области, расположенной на многолистной римановой поверхности. Суть метода заключается в замене каналов между элементами профилей на каналы отбора и выдува потока, форма которых асимптотически стремится к кольцевой форме каналов, уходящих на бесконечность на втором листе римановой поверхности. Предлагаемый метод можно обобщить на случай проектирования многоэлементных крыловых профилей.

Ключевые слова: обратная краевая задача аэрогидродинамики, двухэлементный крыловой профиль.

Эффективные методы решения задач проектирования крыловых профилей основаны на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА) [1]. Для односвязной области течения помимо основной ОКЗА решены задачи проектирования крыловых профилей с устройствами отбора [2], выдува потока [3] и др. Также решен ряд ОКЗА в случае двусвязной области течения [4–6]. При проектировании профиля крыла экраноплана [4] двусвязная область течения сведена к односвязной за счет введения фиктивного потока идеальной несжимаемой жидкости под экраном. В работе [5] закрылок моделировался линией с распределенными вдоль нее особенностями. В [6] с использованием аппарата эллиптических функций получено полное решение ОКЗА для двухэлементного крылового профиля. Однако применение метода [6] при проектировании многоэлементных крыловых профилей существенно затруднено вследствие громоздкости математического аппарата решения краевых задач для аналитических функций в многосвязных областях.

В настоящей работе используется подход, позволяющий свести краевую задачу в многосвязной области к задаче в односвязной области, расположенной на многолистной римановой поверхности. Суть метода заключается в замене каналов между элементами профилей на каналы отбора и выдува потока, асимптотически стремящиеся к кольцевым. Эффективность этого метода показана в работах [7–9]. В [7] разработан метод проектирования профиля крыла экраноплана по заданному на его поверхности распределению скорости. Решение смешанной ОКЗА для экраноплана в случае, когда нижняя поверхность крылового профиля прямолинейна и расположена под заданным углом к экрану, приведено в работе [8]. Общий подход к проектированию многоэлементного крылового профиля рассмотрен в [9]. В [7–9] распределение скорости по поверхности крылового профиля задавалось как функция параметра в канонической плоскости.

---

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № П1124).

В настоящей работе предложен приближенный метод проектирования двухэлементного крылового профиля по распределению на его поверхности скорости, заданной как функция дуговой абсциссы. Такой способ задания скорости представляет интерес с практической точки зрения, поскольку позволяет приближенно вычислить коэффициент подъемной силы и, рассчитав характеристики пограничного слоя, определить коэффициент сопротивления до построения крылового профиля. Условия разрешимости ОКЗА удовлетворяются подбором свободных параметров распределения скорости.

**1. Постановка задачи.** В физической плоскости  $z = x + iy$  искомый двухэлементный крыловой профиль  $L_z = L_1 \cup L_2$  обтекается установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной на бесконечности скоростью  $v_\infty$  (рис. 1, *a*). Контуры элементов профиля полагаются гладкими. Исключение составляют задние кромки  $B_k$  ( $k = 1, 2$  — номер элемента профиля) с внутренними по отношению к области течения  $G_z$  углами, равными  $2\pi$ . В силу постулата Жуковского — Чаплыгина точки схода потока совпадают с точками  $B_k$ . Точки разветвления потока обозначены через  $A_k$ . Начало координат выбрано на задней кромке  $B_1$  первого элемента профиля, ось абсцисс  $x$  параллельна направлению вектора скорости  $v_\infty$  набегающего потока. На контуре каждого элемента крылового профиля задано распределение скорости  $v_k(s)$  ( $s \in [0, l_k]$  — дуговая абсцисса;  $l_k$  — периметр элемента профиля). Кроме того, заданы расход  $Q$  между элементами крылового профиля и разность  $\Delta\varphi = \varphi_{a2} - \varphi_{a1}$  потенциалов скорости в критических точках  $A_2$  и  $A_1$ .

Требуется определить форму  $L_z$  контура двухэлементного крылового профиля.

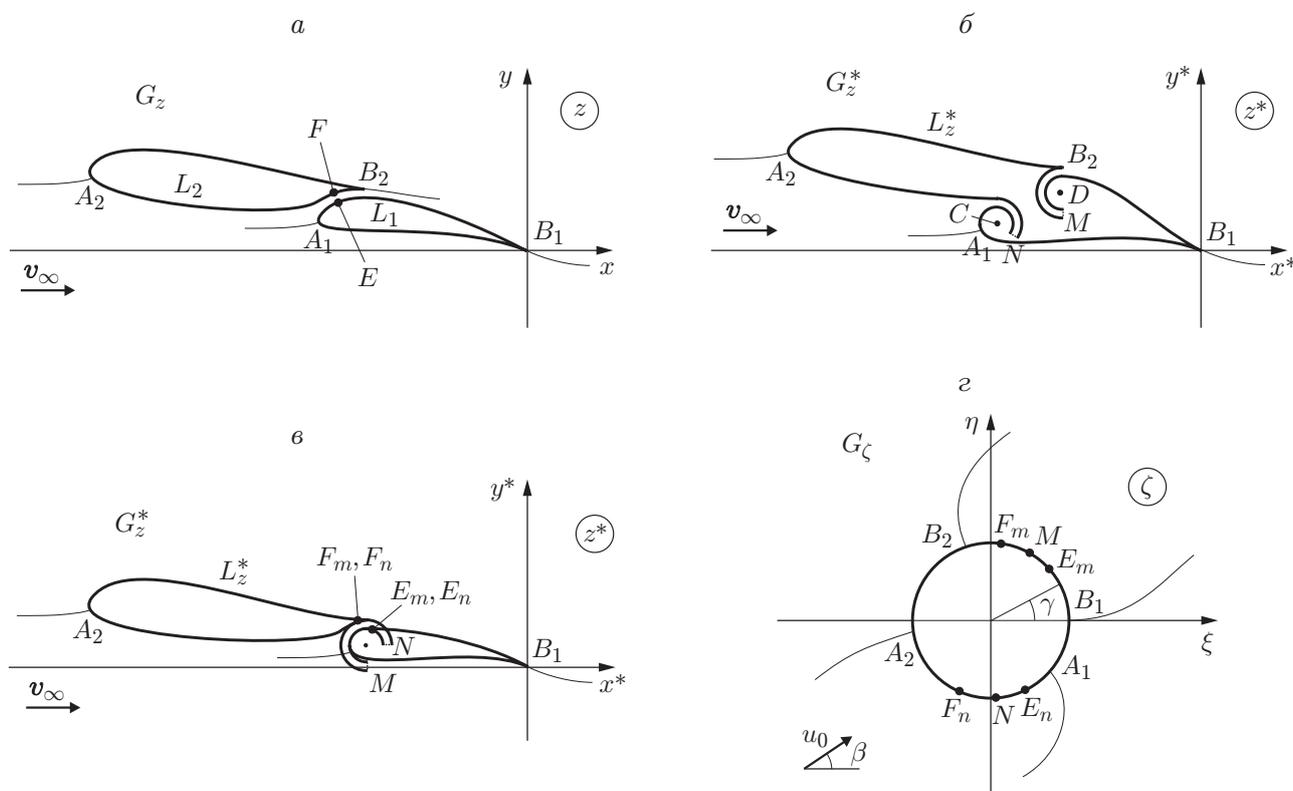


Рис. 1. Области течения:  
*a* — физическая плоскость; *б*, *в* — физическая плоскость для вспомогательной задачи (*б* — центры асимптотических окружностей не совпадают, *в* — центры асимптотических окружностей совпадают); *г* — каноническая плоскость

**2. Сведение исходной задачи к вспомогательной задаче.** При сделанных предположениях в области  $G_z$  существует комплексный потенциал потока  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ . Так как комплексный потенциал определяется с точностью до константы, положим  $w = 0$  в точке  $A_1$ . Найдем функции потенциала скорости на каждом элементе профиля:

$$\varphi_1(s) = \int_{s_{a1}}^s v_1(s) ds, \quad s \in [0, l_1], \quad \varphi_2(s) = \int_{s_{a2}}^s v_2(s) ds + \Delta\varphi, \quad s \in [0, l_2]$$

( $s_{ak}$  — дуговые абсциссы точек  $A_k$ ). Тогда циркуляции  $\Gamma_k$  скорости по каждому элементу профиля определяются по формуле  $\Gamma_k = \varphi_k(l_k) - \varphi_k(0)$ , а циркуляция на бесконечности — по формуле  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ .

Предлагаемый метод решения основан на преобразовании, позволяющем свести краевую задачу в двусвязной области к задаче в односвязной области, расположенной на многолистной римановой поверхности. Преобразование заключается в том, что вместо двухэлементного крылового профиля в плоскости  $z$  вводится в рассмотрение в плоскости  $z^*$  крыловой профиль  $L_z^*$  с устройствами отбора и выдува потока (см. рис. 1, б), которые моделируются кольцевыми каналами с постоянными скоростями на стенках [10]. Соответствующие точки в плоскостях  $z$  и  $z^*$  обозначены одинаковыми буквами, бесконечно удаленные точки каналов отбора и выдува обозначим  $N$  и  $M$  соответственно. При условии равенства расходов и скоростей на внешней и внутренней стенках каналов радиусы окружностей, к которым асимптотически стремится форма стенок, равны. Потребовав совпадения центров  $C$  и  $D$  асимптотических окружностей для каналов отбора и выдува соответственно, получаем контур  $L_z^*$ , совпадающий по форме с контуром  $L_z$  всюду, за исключением каналов отбора и выдува (см. рис. 1, в). В работах [7–9] показано, что распределения скорости в соответствующих точках контуров  $L_z$  и  $L_z^*$  хорошо согласуются.

На контуре  $L_z$  в канале между элементами профиля выберем точку  $E$  с дуговой абсциссой  $s_e$  на верхней поверхности контура  $L_1$  и точку  $F$  с дуговой абсциссой  $s_f$  на нижней поверхности контура  $L_2$ , при этом  $\varphi_1(s_e) = \varphi_2(s_f)$ . Точность приближения метода будет наибольшей, если точки  $E$  и  $F$  расположены посередине канала. Однако, так как расположение элементов профиля изначально неизвестно, оптимальное положение точек  $E$  и  $F$  определяется путем подбора. Точке  $E$  соответствуют две точки на контуре  $L_z^*$ : точка  $E_n$  на стенке  $NA_1$  канала отбора и точка  $E_m$  на стенке  $MB_1$  канала выдува. Аналогично точке  $F$  соответствуют точка  $F_n$  на стенке  $NA_2$  канала отбора и точка  $F_m$  на стенке  $MB_2$  канала выдува (см. рис. 1, в).

Сформулируем вспомогательную задачу. В физической плоскости  $z^* = x^* + iy^*$  искомый крыловой профиль  $B_1A_1NA_2B_2MB_1$  обтекается установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности  $v_\infty$ . В качестве начала координат выберем точку  $B_1$ , ось абсцисс  $x^*$  проведем параллельно вектору скорости набегающего потока. На профиле имеются устройства отбора и выдува потока, моделируемые кольцевыми каналами с бесконечно удаленными точками  $N$  и  $M$  соответственно. Жидкость, выдуваемая из канала, которому соответствует точка  $M$ , имеет те же параметры, что и внешний поток. Заданы циркуляция  $\Gamma$  на бесконечности, расход  $Q$  в каналах отбора и выдува, величина  $\Delta\varphi$ . На искомом контуре задано распределение скорости  $v(s)$ . Так как на контуре  $L_z^*$  имеется четыре участка (стенки  $NE_n, NF_n, ME_m, MF_m$  кольцевых каналов), на которых дуговая абсцисса стремится к бесконечности, то функция  $v(s)$  будет многозначной. Зададим ее таким образом, чтобы дуговые абсциссы соответствующих

точек контуров  $L_z$  и  $L_z^*$  вне стенок каналов совпадали:

$$v(s) = \begin{cases} v_1(s), & s \in [0, s_e] \text{ на } B_1A_1E_n, & s \in [s_e, l_1] \text{ на } E_mB_1, \\ -v_{c2}, & s \in (-\infty, s_f] \text{ на } NF_n, & s \in [s_f, \infty) \text{ на } F_mM, \\ v_2(s), & s \in [0, s_f] \text{ на } B_2F_m, & s \in [s_f, l_2] \text{ на } F_nA_2B_2, \\ v_{c1}, & s \in (-\infty, s_e] \text{ на } ME_m, & s \in [s_e, \infty) \text{ на } E_nN. \end{cases}$$

Модуль скорости  $v_{c1}$  на стенках каналов  $NE_n$  и  $ME_m$  примем равным  $v_{c1} = v_1(s_e)$ , модуль скорости  $v_{c2}$  на стенках каналов  $NF_n$  и  $MF_m$  —  $v_{c2} = -v_2(s_f)$ .

Требуется определить форму контура  $L_z^*$ .

**3. Схема решения.** Введем в рассмотрение область  $G_\zeta$  — внешность круга  $|\zeta| \geq 1$  в канонической плоскости  $\zeta = \rho e^{i\gamma}$  (см. рис. 1,2). Соответствующие точки в плоскостях  $z^*$  и  $\zeta$  обозначены одинаковыми буквами. При задании взаимно однозначного конформного отображения областей  $G_z^*$  и  $G_\zeta$  предполагаются соответствие бесконечно удаленных точек и переход точки  $z^* = 0$  в точку  $\zeta = 1$ .

В плоскости  $\zeta$  имеет место обтекание окружности единичного радиуса с расположенными на ней в точках  $N$  и  $M$  стоком и источником расхода  $Q$  соответственно. Комплексный потенциал  $w(\zeta)$  потока нетрудно построить методом суперпозиции:

$$w(\zeta) = u_0 \left( \zeta e^{-i\beta} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + \frac{Q}{\pi} \ln (\zeta - \zeta_m) - \frac{Q}{\pi} \ln (\zeta - \zeta_n) + C_0. \quad (1)$$

Здесь  $u_0, \beta$  — модуль и аргумент вектора скорости набегающего потока в плоскости  $\zeta$ ;  $\zeta_n = e^{i\gamma_n}, \zeta_m = e^{i\gamma_m}$  — координаты точек  $N$  и  $M$  соответственно;  $C_0 = C_1 + iC_2$  — комплексная постоянная. Обозначим через  $\zeta_{a1} = e^{i\gamma_{a1}}, \zeta_{a2} = e^{i\gamma_{a2}}, \zeta_{b2} = e^{i\gamma_{b2}}$  координаты точек  $A_1, A_2, B_2$  соответственно. Продифференцировав потенциал  $w(\zeta)$ , получаем выражение для комплексно-сопряженной скорости потока в канонической плоскости

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 \left( e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta} + \frac{Q}{\pi(\zeta - \zeta_m)} - \frac{Q}{\pi(\zeta - \zeta_n)}. \quad (2)$$

Выделив в (1) вещественную часть, определим значение потенциала скорости на границе  $\zeta = e^{i\gamma}$ :

$$\varphi(\gamma) = 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} + \frac{Q}{\pi} \left( \ln \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_m}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \right| \right) + C_1.$$

На рис. 2,а,б показаны области  $G_w$  и  $G_w^*$  в плоскости комплексного потенциала, соответствующие областям обтекания двухэлементного крылового профиля и профиля с каналами отбора и выдува потока. Видно, что в соответствующих точках контуров  $L_z$  и  $L_z^*$  значения комплексного потенциала могут не совпадать. Следует отметить, что в случае обтекания двухэлементного крылового профиля сверху и снизу разности значений комплексного потенциала в точках  $B_1$  и  $B_2$  равны  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а в случае обтекания профиля с каналами отбора и выдува эти разности равны  $\Gamma$  и  $0$  соответственно. Таким образом, использовать метод сопоставления плоскостей, т. е. сравнивать функции  $\varphi_k(s)$  и  $\varphi(\gamma)$  в ходе решения задачи (как это сделано при решении основной ОКЗА для нахождения зависимости  $s(\gamma)$  [1]), нельзя.

Преобразование, позволяющее перейти от обтекания профиля с каналами отбора и выдува к обтеканию двухэлементного крылового профиля, включает несколько этапов.

1. В области  $G_w^*$  (см. рис. 2,а) проведем разрез от точки  $B_2$  до бесконечности по горизонтали, а также разрезы  $F_nE_n$  и  $F_mE_m$  в каналах  $N$  и  $M$  по вертикальным линиям  $\varphi = \varphi_1(s_e)$  и  $\varphi = \varphi_1(s_e) + \Gamma_2$  соответственно (см. рис. 2,в).

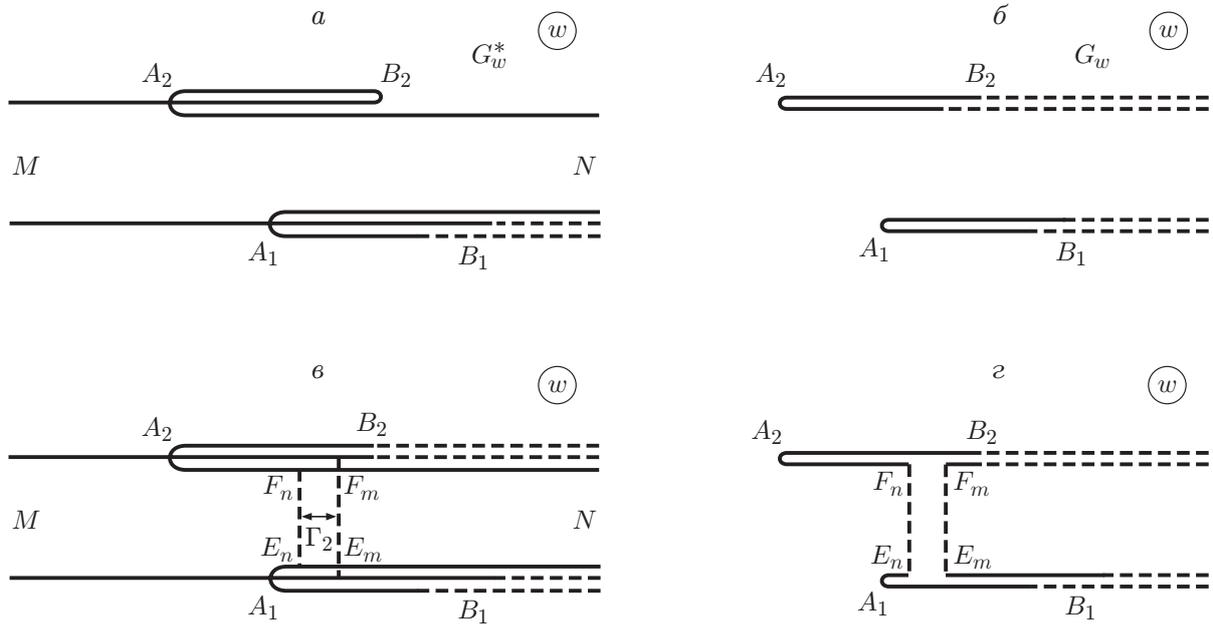


Рис. 2. Сведение исходной задачи к вспомогательной задаче на плоскости комплексного потенциала  $w$

2. Отбросим “отрезанные” бесконечные участки каналов  $MF_mE_mM$  и  $NF_nE_nN$  (см. рис. 2,  $z$ ).

3. Переместим горизонтальную полуполосу, расположенную справа от  $F_mE_m$ , так чтобы разрез  $F_mE_m$  совпал с разрезом  $F_nE_n$ , и “сошьем” берега получившегося вертикального разреза.

В результате получаем исходную область  $G_w$  (см. рис. 2,  $b$ ). Переход от области  $G_w$  к области  $G_w^*$  можно осуществить, выполнив указанные преобразования в обратном порядке.

Проведенное преобразование лежит в основе предложенного подхода, позволяющего свести краевую задачу в двусвязной области к задаче в односвязной области, расположенной на многолистной римановой поверхности. Преобразование области  $G_z$  в область  $G_z^*$  осуществляется аналогично.

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\varphi}(\gamma) = \begin{cases} \varphi(\gamma) - \Gamma_2, & 0 \leq \gamma < \gamma_{b2}, \\ \varphi(\gamma), & \gamma_{b2} < \gamma \leq 2\pi. \end{cases}$$

Значения функций  $\varphi_k(s)$  и  $\tilde{\varphi}(\gamma)$  в соответствующих точках будут равны, поэтому для нахождения зависимости  $s(\gamma)$  можно использовать метод сопоставления плоскостей.

Формулы для расчета обтекания кругового контура в канонической плоскости содержат девять неизвестных величин  $u_0, \beta, C_1, C_2, \gamma_{a1}, \gamma_{a2}, \gamma_{b2}, \gamma_n, \gamma_m$ , для нахождения которых используем заданные значения потенциала скорости в точках  $A_k$  и  $B_k$  и функции тока в точке  $A_1$ :

$$\begin{aligned} \psi(\gamma_{a1}) = 0, \quad \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) = 0, \quad \tilde{\varphi}(\gamma_{a2}) = \Delta\varphi, \\ \tilde{\varphi}(0) = \varphi_1(l_1), \quad \tilde{\varphi}(\gamma_b + 0) = \varphi_2(l_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений (3) замыкается условиями обращения в нуль скорости потока в критических точках

$$\frac{dw}{d\zeta}(\zeta) = 0, \quad \zeta = 1, \zeta_{a1}, \zeta_{a2}, \zeta_{b2}.$$

Решение полученной системы девяти нелинейных уравнений является достаточно сложным, поэтому разобьем ее на две более простые системы.

**СИСТЕМА 1.** Будем считать, что величины  $u_0, \gamma_n, \gamma_m$  известны. Тогда из уравнения  $(dw/d\zeta)|_{\zeta=1} = 0$  с учетом (2) определим

$$\beta = \arcsin \frac{\Gamma - Q(\operatorname{ctg}(\gamma_n/2) - \operatorname{ctg}(\gamma_m/2))}{4\pi u_0}. \quad (4)$$

Приведя (2) к общему знаменателю и приравняв к нулю, получаем алгебраическое уравнение

$$a_2\zeta^4 - (a_2a_3 + \Gamma)\zeta^3 + (a_2a_5 - a_1 + \Gamma a_3 + 2iQa_4)\zeta^2 + (a_1a_3 - \Gamma a_5)\zeta - a_1a_5 = 0,$$

где  $a_1 = 2\pi i u_0 e^{i\beta}$ ;  $a_2 = 2\pi i u_0 e^{-i\beta}$ ;  $a_3 = \zeta_m + \zeta_n$ ;  $a_4 = \zeta_m - \zeta_n$ ;  $a_5 = \zeta_m \zeta_n$ . Решив это уравнение, найдем  $\zeta_{a1}, \zeta_{a2}, \zeta_{b2}$ , т. е. неизвестные  $\gamma_{a1}, \gamma_{a2}, \gamma_{b2}$ . В силу (4) четвертым корнем будет  $\zeta = 1$ , т. е. степень полинома можно понизить.

**СИСТЕМА 2.** Исключим константу  $C_1$  из системы (3), так как она входит в каждое уравнение этой системы, кроме первого. Вычитая второе уравнение системы (3) из трех следующих уравнений и перенося правые части уравнений в левые части, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\gamma_{a2}) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \Delta\varphi &= f_1(u_0, \gamma_n, \gamma_m) = 0, \\ \tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \varphi_1(l_1) &= f_2(u_0, \gamma_n, \gamma_m) = 0, \\ \tilde{\varphi}(\gamma_b + 0) - \tilde{\varphi}(\gamma_{a1}) - \varphi_2(l_2) &= f_3(u_0, \gamma_n, \gamma_m) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) является системой трех нелинейных уравнений относительно неизвестных  $u_0, \gamma_n, \gamma_m$ . При каждом вычислении функций  $f_i(u_0, \gamma_n, \gamma_m)$  решается система 1. Для численного решения системы (5) может быть использован любой численный метод, например метод Ньютона. Константа  $C_0$  легко находится из первых двух уравнений системы (3).

Зависимость  $s(\gamma)$  дуговой абсциссы контура  $L_z^*$  от угловой координаты в плоскости  $\zeta$  определим следующим образом. На участке профиля вне каналов  $E_m M F_m$  и  $F_n N F_m$  найдем  $s(\gamma)$ , сопоставляя функции  $\varphi_k(s)$  и  $\tilde{\varphi}(\gamma)$ , причем при  $k = 1$   $\gamma \in [0, \gamma_{em}] \cup [\gamma_{en}, 2\pi]$ , при  $k = 2$   $\gamma \in [\gamma_{fm}, \gamma_{fn}]$ , где  $\gamma_{en}, \gamma_{em}, \gamma_{fn}, \gamma_{fm}$  — угловые координаты точек  $E_n, E_m, F_n, F_m$  в плоскости  $\zeta$  соответственно. В окрестности каналов  $E_m M F_m$  и  $F_n N F_m$  функцию  $s(\gamma)$  определим, проинтегрировав дифференциальное уравнение  $ds/d\gamma = u(\gamma)/v_{ck}$ , причем при  $k = 1$   $\gamma \in [\gamma_{em}, \gamma_m) \cup (\gamma_n, \gamma_{en}]$ , при  $k = 2$   $\gamma \in (\gamma_m, \gamma_{fm}] \cup [\gamma_{fn}, \gamma_n)$ . Скорость  $u(\gamma)$  на границе круга вычислим, используя модуль выражения (2):

$$u(\gamma) = 4u_0 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_{b2}}{2} \left( \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_m}{2} \right)^{-1}.$$

В результате определяется зависимость  $v(\gamma) = v[s(\gamma)]$ .

Обозначим через  $\chi(\zeta) = \ln(dw/dz^*) = \ln|v| - i\theta$  функцию Жуковского — Мичела, где  $v, \theta$  — модуль и аргумент вектора скорости в плоскости  $z^*$ . Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi - \chi_0 = \tilde{S} + i\tilde{\theta}. \quad (6)$$

Здесь  $\chi_0(\zeta) = S_0 + i\theta_0$  — функция, содержащая особенности  $\chi(\zeta)$ :

$$\chi_0(\zeta) = \ln \left( 1 - \frac{\zeta_{a1}}{\zeta} \right) + \ln \left( 1 - \frac{\zeta_{a2}}{\zeta} \right) + \frac{ai}{\pi} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\zeta_n}{\zeta} \right) - \ln \left( 1 - \frac{\zeta_m}{\zeta} \right) \right], \quad (7)$$

$$a = \ln(v_{c2}/v_{c1}).$$

Выделив в (6) вещественную часть с учетом (7), запишем

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln |v| - \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2} \right| - \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2} \right| + \frac{a}{2\pi} [\gamma_n - \gamma_m + \pi(\operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_n) - \operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_m))],$$

где  $\operatorname{sgn}(x) = \{-1, x < 0; 0, x = 0; 1, x > 0\}$ . Решив задачу Шварца в области  $G_\zeta$ , восстановим  $\tilde{\chi}(\zeta)$ . Используя метод особенностей Чаплыгина, представим (2) в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \frac{(\zeta - \zeta_{a1})(\zeta - \zeta_{a2})(\zeta - \zeta_{b2})(\zeta - 1)}{(\zeta - \zeta_n)(\zeta - \zeta_m)\zeta^2}.$$

Разрешив уравнение (6) с учетом (7) относительно комплексно-сопряженной скорости:

$$\frac{dw}{dz^*} = \frac{(\zeta - \zeta_{a1})(\zeta - \zeta_{a2})}{\zeta^2} \left( \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_m} \right)^{ia/\pi} e^{\tilde{\chi}(\zeta)},$$

находим

$$\frac{dz^*}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta} / \frac{dw}{dz^*} = u_0 e^{-i\beta} \frac{(\zeta - \zeta_{b2})(\zeta - 1)}{(\zeta - \zeta_n)^{1+ia/\pi}(\zeta - \zeta_m)^{1-ia/\pi}} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)}.$$

Проинтегрировав это выражение по контуру  $\zeta = e^{i\gamma}$  с учетом условия  $z|_{\zeta=1} = 0$ , построим контур  $L_z^*$ .

**4. Условия разрешимости.** Так как ОКЗА являются некорректными (т. е. не каждому заданному распределению скорости соответствует физически реализуемый крыловой профиль, обтекаемый при заданной скорости набегающего потока), то необходимо потребовать выполнения условий разрешимости. С использованием формул из работы [9] для многоэлементного крылового профиля запишем условия разрешимости для частного случая двухэлементного крылового профиля. Условие совпадения скорости набегающего потока, определяемого в ходе решения, с ее заданным значением имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_\infty.$$

Условия замкнутости контура  $L_z^*$  записываются в виде

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\cos \gamma_n + \cos \gamma_m - \cos \gamma_{b2} - 1) + a(\sin \gamma_m - \sin \gamma_n),$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi(\sin \gamma_n + \sin \gamma_m - \sin \gamma_{b2}) + a(\cos \gamma_n - \cos \gamma_m).$$

К этим условиям необходимо добавить условия совпадения центров  $C$  и  $D$  окружностей, к которым асимптотически стремится форма стенок каналов отбора и выдува. Для того чтобы приведенные условия, представляющие собой систему пяти нелинейных уравнений, выполнялись, необходимо ввести в исходные распределения скорости пять свободных параметров.

**5. Определение формы двухэлементного крылового профиля.** Определив форму контура  $L_z^*$  профиля с каналами отбора и выдува, форму контура  $L_z$  двухэлементного крылового профиля определим следующим способом. В силу того что в общем случае предложенный подход является приближенным, точки  $E_n$  и  $F_n$  не совпадают с точками  $E_m$  и  $F_m$  соответственно. Выберем контур  $L_1$  первого элемента профиля, так чтобы он

совпадал с контуром  $L_z^*$  на участках  $B_1A_1E_n$  и  $E_mB_1$  всюду, кроме некоторой окрестности точек  $E_n$  и  $E_m$ . Замкнем контур  $L_1$ , построив его плавное сопряжение в окрестности точек  $E_n$  и  $E_m$ . Аналогично получим контур  $L_2$  второго элемента профиля, выбрав его таким образом, чтобы он совпадал с контуром  $L_z^*$  на участках  $B_2F_m$  и  $F_nA_2B_2$ , и построив сопряжение контура в окрестности точек  $F_n$  и  $F_m$ . Расчеты показывают, что точки  $E_n$ ,  $E_m$  и  $F_n$ ,  $F_m$  практически совпадают при достаточно небольшой ширине каналов и при выполнении условия постоянства скоростей вблизи этих точек.

Коэффициент подъемной силы вычисляется по формуле

$$c_y = \frac{4\Gamma}{(l_1 + l_2)v_\infty},$$

где в качестве характерного линейного размера выбрана половина суммы периметров элементов профиля. Вклад каждого элемента в коэффициент подъемной силы можно вычислить, проинтегрировав коэффициент давления  $c_p = 1 - v^2/v_\infty^2$  по контуру  $L_k$ :

$$c_{yk} = -\frac{2}{l_1 + l_2} \oint_{L_k} c_p dx.$$

При этом должно выполняться равенство  $c_y = c_{y1} + c_{y2}$ , что может служить проверкой достоверности полученных результатов.

**6. Результаты расчетов.** В первой серии расчетов проведено тестирование предложенного приближенного метода. В качестве исходных данных выбирались распределения скорости, удовлетворяющие условиям разрешимости. Полученные в результате расчета контур двухэлементного крылового профиля и его коэффициент подъемной силы сравнивались с результатами расчета по методу, предложенному в [6]. Во всех расчетах полагалось  $v_\infty = 1$ .

В первом расчете выполнено проектирование профиля крыла с закрылком по заданному распределению скорости  $v(s)$  при следующих исходных параметрах:  $Q = 0,05$ ,  $\Delta\varphi = -0,6$ ,  $l_1 = 0,4$ ,  $l_2 = 1,6$ . Построенный в результате контур  $L_z^*$  показан на рис. 3,а сплошной линией. Видно, что стенки каналов отбора и выдува совпадают практически на всей длине канала между первым и вторым элементами крылового профиля. Пунктирной линией показан контур двухэлементного крылового профиля, построенного при тех же исходных параметрах методом [6]. Контур  $L_z$  двухэлементного крылового профиля, построенный по контуру  $L_z^*$  с помощью плавного сопряжения стенок каналов, практически совпадает с контуром, построенным с помощью точного метода. Коэффициенты подъемной силы, вычисленные с использованием приближенного и точного методов, совпадают (как и во всех последующих тестовых расчетах) и равны  $c_y = 1,149$ .

Во втором и третьем тестовых расчетах проведено проектирование по  $v(s)$  крылового профиля с предкрылком ( $Q = 0,03$ ,  $\Delta\varphi = -0,1$ ,  $l_1 = 1,6$ ,  $l_2 = 0,4$ ) и профиля разрезного крыла ( $Q = 0,15$ ,  $\Delta\varphi = -0,1$ ,  $l_1 = l_2 = 1$ ). Результаты расчетов представлены на рис. 3,б,в соответственно. Для профиля с предкрылком коэффициент подъемной силы равен  $c_y = 0,905$ , для профиля разрезного крыла —  $c_y = 1,171$ . На рис. 3 видно, что полученные контуры двухэлементного крылового профиля хорошо согласуются с контурами, построенными точным методом.

Погрешность приближенного метода решения проявляется лишь в случае, когда расстояние между элементами крылового профиля сопоставимо с длинами их хорд. В четвертом тестовом примере спроектирован профиль крыла биплана при  $Q = 0,4$ ,  $\Delta\varphi = 0,05$ ,  $l_1 = l_2 = 1$  (см. рис. 3,г). На рис. 3,г видно, что в зоне сопряжения каналов отбора и выдува контура  $L_z^*$ , т. е. на верхней поверхности нижнего элемента и нижней поверхности верхнего элемента крылового профиля, имеет место незначительная погрешность.

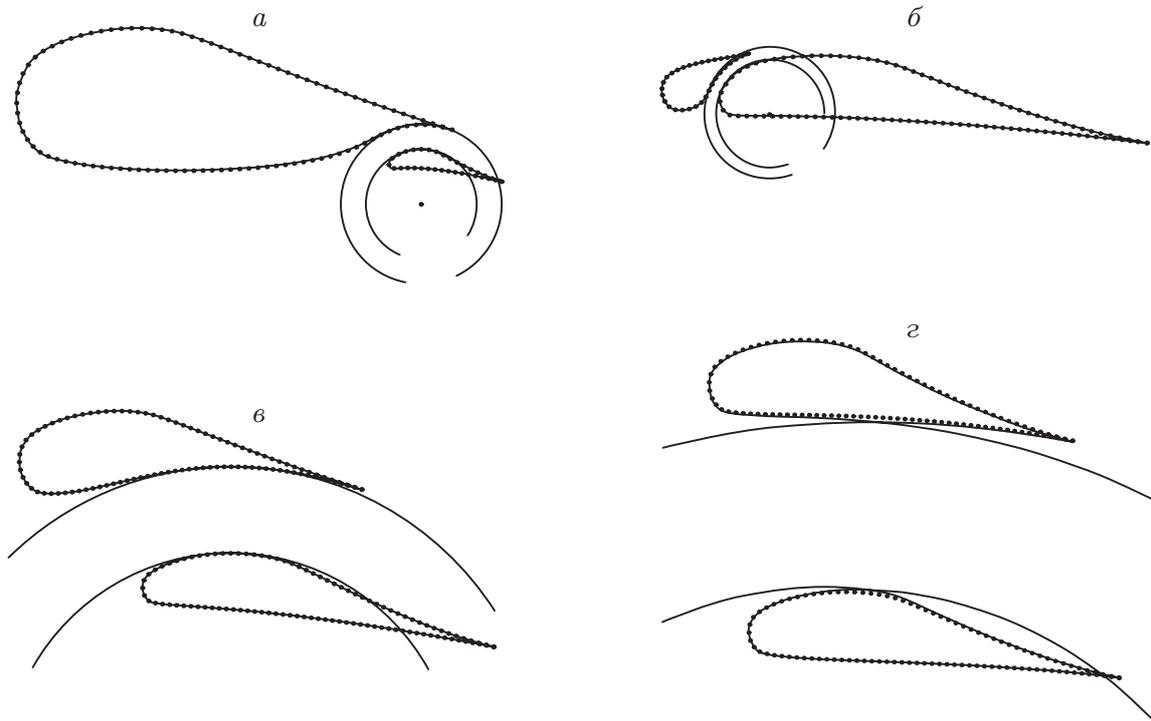


Рис. 3. Результаты тестовых расчетов:

*a* — профиль с закрылком, *б* — профиль с предкрылком, *в* — профиль разрезного крыла, *г* — профиль крыла биплана; сплошные линии — контур профиля, полученный с помощью приближенного метода, пунктирные — контур профиля, полученный с помощью точного метода [6]

Для проведения целевых численных расчетов выберем распределения скорости  $v_k(s)$  из класса гидродинамически целесообразных распределений скорости [1]. Представим  $v_k(s)$  в виде

$$v_k(s) = v_0 \tilde{v}_k(s). \quad (8)$$

На кривых функций  $\tilde{v}_k(s)$  имеются полки (рис. 4), т. е.  $\tilde{v}_k(s) \equiv -v_{1k}$  при  $s \in (0, s_{1k})$  на нижней поверхности и  $\tilde{v}_k(s) \equiv v_{2k}$  при  $s \in (s_{2k}, s_{3k})$  на верхней поверхности каждого элемента профиля. Для однозначности представления (8) примем  $v_{11} = 1$ . В данном случае  $v_{c1} = v_0 v_{21}$  и  $v_{c2} = v_0 v_{12}$ . Так как на кривой распределения скорости имеются полки, т. е. в окрестности канала между профилями  $v_k(s) \equiv \text{const}$ , то положение точек  $E$  и  $F$  не оказывает влияния на решение задачи.

Для того чтобы выполнялись условия разрешимости задачи, в качестве переменных выберем следующие пять параметров распределения скорости:  $v_0, s_{11}, s_{21}, s_{12}, s_{22}$ . Решение системы пяти нелинейных уравнений, к которым сводятся условия разрешимости, находится численным методом Ньютона.

На рис. 5, *a* приведены результаты целевого расчета по проектированию профиля двухэлементного крыла с каналом малой ширины между элементами крылового профиля при исходных параметрах  $Q = 0,03, \Delta\varphi = -0,3, l_1 = l_2 = 1$ . Коэффициент подъемной силы построенного крылового профиля  $c_y = 0,629$ . Распределение скорости по каждому элементу профиля представлено на рис. 5, *б*.

Сравнение результатов расчетов, выполненных с использованием приближенного метода проектирования двухэлементного крылового профиля, с результатами, полученными с помощью эллиптических функций [6], показало высокую точность этого метода. Однако

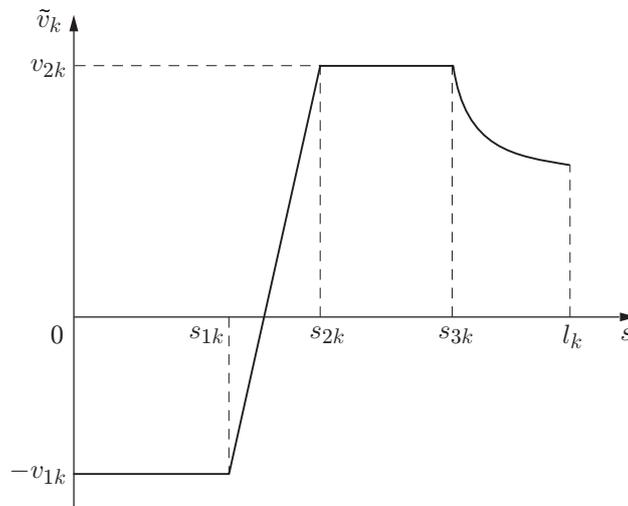


Рис. 4. Распределение скорости на элементе профиля  $\tilde{v}_k(s)$ , задаваемое для целевого расчета

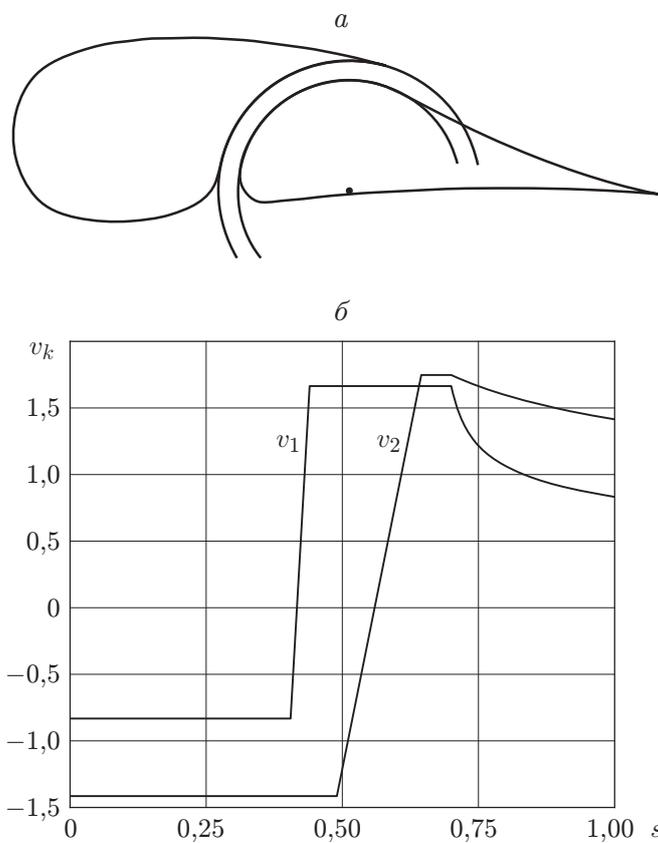


Рис. 5. Результаты целевого расчета:  
*a* — спроектированный профиль двухэлементного крыла, *б* — распределения скорости  $v_k(s)$

следует отметить, что область применимости предложенного приближенного метода ограничена. Достоверные результаты численных расчетов удается получить в случае, когда пространство между элементами профиля представляет собой канал постоянной ширины, форма которого близка к форме кольцевого сектора. В случае уменьшения ширины канала при использовании предложенного метода, в отличие от методов, основанных на эллиптических функциях (см., например, [6]), точность расчетов увеличивается. В других случаях, например когда профили располагаются один за другим в направлении скорости набегающего потока, данный метод неприменим.

Авторы выражают благодарность Н. Б. Ильинскому за ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Елизаров А. М.** Обратные краевые задачи аэрогидродинамики / А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев. М.: Наука, 1994.
2. **Абзалилов Д. Ф., Ильинский Н. Б., Степанов Г. Ю.** Построение крылового профиля с отбором внешнего потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 6. С. 23–28.
3. **Абзалилов Д. Ф., Ильинский Н. Б.** Построение крыловых профилей с выдувом реактивной струи // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 3. С. 134–143.
4. **Ильинский А. Н., Ильинский Н. Б., Маклаков Д. В., Поташев А. В.** Метод аэродинамического проектирования крылового профиля экраноплана // Изв. вузов. Авиаци. техника. 1995. № 2. С. 54–62.
5. **Поташев А. В.** Построение крылового профиля с закрылком конечных размеров // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 1. С. 173–180.
6. **Абзалилов Д. Ф., Волков П. А., Ильинский Н. Б.** Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики для двухэлементного крылового профиля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 3. С. 16–24.
7. **Марданов Р. Ф.** Об одном подходе к проектированию профиля крыла вблизи экрана // Изв. вузов. Авиаци. техника. 2003. № 2. С. 35–38.
8. **Марданов Р. Ф.** Решение одной обратной краевой задачи аэрогидродинамики // Изв. вузов. Математика. 2007. № 2. С. 27–34.
9. **Марданов Р. Ф.** Об одном подходе к проектированию многоэлементного крылового профиля // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 2. С. 31–36.
10. **Степанов Г. Ю.** Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 4. С. 30–42.

*Поступила в редакцию 2/VI 2010 г.,  
в окончательном варианте — 30/IX 2010 г.*