

УДК 51.72, 539.3

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА
ВОКРУГ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ**

С. В. Клишин, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Выполнено численное исследование напряженно-деформированного состояния сыпучего материала в окрестности жесткого цилиндрического включения. Рассматривается случай сложного нагружения с непрерывным поворотом направления сдвига. Учитывались дилатансия, сухое трение, вязкость. Показано, что при определенных условиях на жесткое включение действует момент, который стремится повернуть его в направлении, противоположном направлению сдвига. Дано сопоставление с экспериментом.

Напряженное состояние, гранулированный материал, численный анализ, метод дискретных элементов, жесткое включение, вязкость

Горные породы и сыпучие материалы обладают целым рядом общих свойств. Прежде всего, это внутреннее трение и дилатансия — способность среды менять свой объем при сдвиге. Внутренние механизмы их деформирования также во многом схожи. Более того, если горную породу лишить сцепления, то она превратится в сыпучий материал. Аналогия в поведении сыпучих сред и горных пород широко используется как в экспериментальных исследованиях, так и при построении математических моделей их деформирования.

В математических моделях принято разделять процессы нагружения на простые и сложные. Например, строго осесимметричное смещение пород к центру круглой выработки дает пример простого нагружения. Если же на данный процесс наложить переменные сдвиги, то нагружение будет сложным.

В [1] экспериментально в лабораторных условиях изучался чистый сдвиг с непрерывным поворотом направления сдвига. Схема нагружения показана на рис. 1. Деформируемая область представляла собой прямой эллиптический цилиндр, ограниченный снаружи гибкой оболочкой L (рис. 1а), выполненной из бериллиевой бронзы. С внутренней стороны область ограничивалась жестким включением (ядром) L^* . Ядро представляло собой цилиндрический стержень радиусом R , который подвешивался вертикально в центре оболочки на длинной нити так, что допускалось его свободное вращение вокруг своей оси. Пространство между эллиптическим цилиндром и включением заполнялось сыпучим материалом. Нагружение осуществлялось путем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00432).

вращения гибкой внешней оболочки таким образом, что форма и положение осей эллипса оставались неизменными. Иными словами, на оболочке задавались две компоненты скорости, причем вектор скорости был горизонтален, направлен по касательной к границе и постоянен по величине (рис. 1б). На внутренней границе (контакт с ядром) выполнялось условие непроникания, сухого трения и отсутствия результирующего момента. Последнее приводило к тому, что жесткое ядро вовлекалось во вращательное движение, причем в зависимости от крупности частиц материала вращение ядра могло быть как медленнее средней скорости вращения внешней оболочки, так и быстрее ее. Оказалось, что процесс зависит от крупности частиц (масштабный эффект). В [1] сделан вывод, что для исследования данной задачи континуальных моделей может быть недостаточно.

Экспериментальному моделированию спиральных линий скольжения, возникающих вокруг цилиндрического жесткого включения, посвящено исследование [2]. Показано, что с возрастанием радиуса включения скорость его вращения увеличивается. В работе [3] исследован предложенный способ нагружения сыпучего материала без жесткого включения на основе континуальной гипопластической модели.

Далее для численного решения предлагается использовать метод дискретных элементов [4–7]. В основе его лежит представление образца материала как конечной области трехмерного пространства, заполненной отдельными сферическими частицами — дискретными элементами с заданным распределением радиусов r_i ($i=1, \dots, N$) и набором физических свойств (плотность ρ_i , упругие и вязкие модули, трение, сцепление и т. д.).

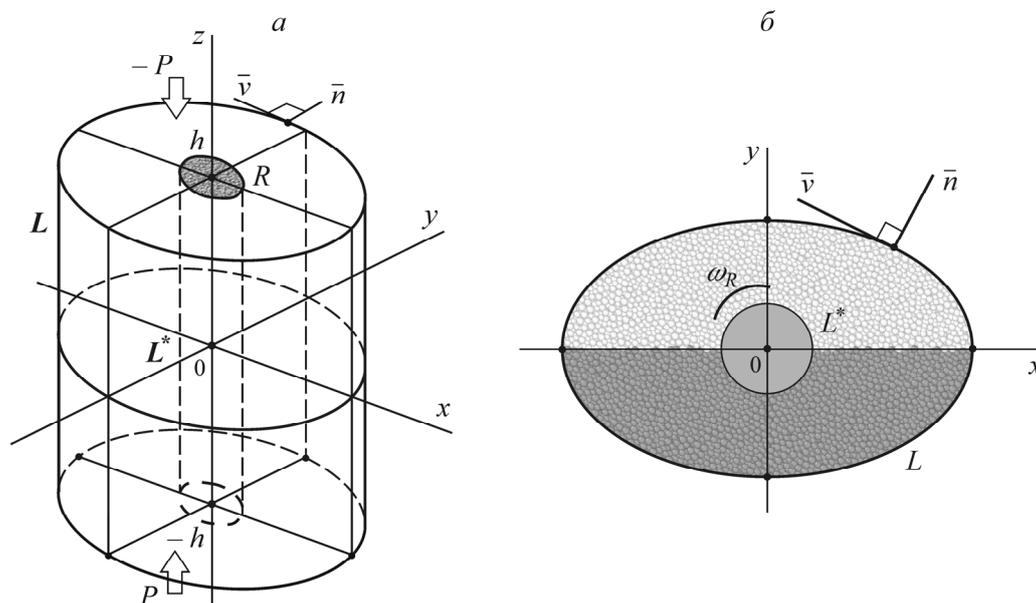


Рис. 1. Схема численного эксперимента: *a* — трехмерная постановка; *б* — сечение плоскостью Oxy

В реальной ситуации взаимодействие между упругими частицами приводит к их деформации и искажению формы. В модели дискретных элементов форма частиц на протяжении всего времени контакта остается неизменной, а степень их деформации описывается величиной перекрытия между контактирующими элементами. При этом предполагается, что размер такого перекрытия намного меньше размеров самих частиц.

Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой системы в каждый момент времени зависит от положения каждой частицы, от сил, возникающих на контактах между частицами, а также от приложенных к системе внешних сил. Функция, описывающая силовое взаимодействие на контакте между частицами с номерами i и j , представляет собой скалярную функцию расстояния и в общем виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{n,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} + F_{t,ij} \cdot \mathbf{t}_{ij} = (k_{n,ij} \delta_{n,ij} - \gamma_{n,ij} v_{n,ij}) \mathbf{n}_{ij} + (k_{t,ij} \delta_{t,ij} - \gamma_{t,ij} v_{t,ij}) \mathbf{t}_{ij}, \quad (1)$$

где \mathbf{n}_{ij} — единичный вектор, определяющий плоскость контакта между двумя сферами; \mathbf{t}_{ij} — единичный вектор, принадлежащий плоскости контакта; $k_{n,ij}$ и $k_{t,ij}$ — упругие, а $\gamma_{n,ij}$ и $\gamma_{t,ij}$ — вязкие модули модели (коэффициент вязкости для касательных напряжений $\gamma_{t,ij}$ в формуле (1) в дальнейшем полагаем равным нулю); $v_{n,ij}$ и $v_{t,ij}$ — проекции относительной скорости точки соударения на оси \mathbf{n}_{ij} и \mathbf{t}_{ij} ; $\delta_{n,ij}$ и $\delta_{t,ij}$ — перекрытия в нормальном и касательном направлении соответственно. Перекрытие по нормали $\delta_{n,ij} = (r_i + r_j) - d_{ij} > 0$, где d_{ij} — расстояние между центрами частиц (рис. 2а).

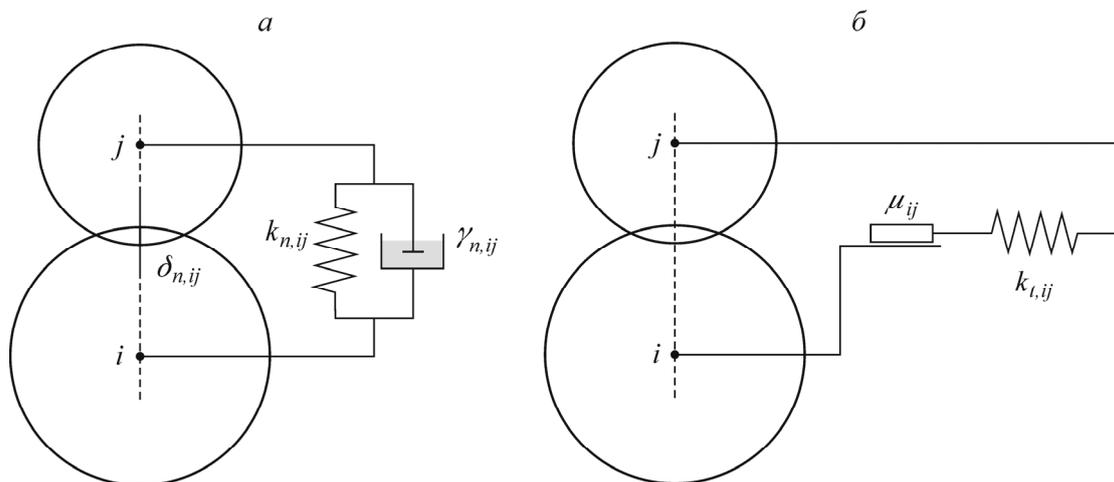


Рис. 2. Реологическая модель контакта между частицами: а — нормальная составляющая контактной силы — модель Кельвина–Фойгта; б — касательная составляющая — упругопластическая модель

Упругий коэффициент $k_{n,ij}$ в (1) равен

$$k_{n,ij} = E_{ij} r_{ij}, \quad (2)$$

где $E_{ij} = E_i E_j / (E_i + E_j)$, $r_{ij} = r_i r_j / (r_i + r_j)$. Здесь E_i и E_j — модули упругости i -й и j -й частиц соответственно. Вязкая компонента нормальной силы определяется заданием коэффициента восстановления скорости $e_{n,ij}$ ($0 \leq e_{n,ij} \leq 1$) и удовлетворяет соотношению

$$\gamma_{n,ij} = \sqrt{\frac{4m_{ij} k_{n,ij}}{1 + (\pi / \ln e_{n,ij})^2}} \geq 0, \quad (3)$$

где $m_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ — приведенная масса контактирующих частиц. В случае, когда $e_{n,ij} = 1$, соударение является абсолютно упругим и диссипации энергии при столкновении частиц не происходит.

Коэффициент $k_{t,ij}$ в описании касательной составляющей силы в формуле (1) задается в виде

$$k_{t,ij} = k^* k_{n,ij}, \quad (4)$$

где $k^* = \text{const}$, а касательное перекрытие $\delta_{t,ij}$ определяется в терминах приращений. Когда на определенном шаге интегрирования между частицами с номерами i и j сформировался контакт, $\delta_{t,ij}$ устанавливается равным нулю. Каждое последующее приращение сдвига в плоскости контакта вычисляется как $\Delta\delta_{t,ij} = (\Delta\mathbf{u}_i - \Delta\mathbf{u}_j)\mathbf{t}_{ij}$, причем вектор \mathbf{t}_{ij} направлен вдоль вектора относительного смещения частиц в плоскости контакта; $\Delta\mathbf{u}_i$ и $\Delta\mathbf{u}_j$ — приращения смещений частиц. Полное значение касательного перекрытия в момент времени t находится из выражения

$$\delta_{t,ij} = \int_{t_0}^t v_{t,ij}(\tau) d\tau,$$

где t_0 — время установления контакта. На каждом шаге интегрирования уравнений движения частиц определяются значения $F_{n,ij}$ и проверяется выполнение неравенства

$$|F_{t,ij}| \geq \text{tg}\varphi_{ij} |F_{n,ij}|,$$

где φ_{ij} — заданный угол внешнего трения скольжения между частицами (коэффициент внешнего трения $\mu_{ij} = \text{tg}\varphi_{ij}$). Если это неравенство не выполняется, то значение $F_{t,ij}$ остается определенным в соответствии с (1) и (4). Если неравенство выполнено, то частицы начинают проскальзывать друг по другу и на текущем шаге нагружения касательная составляющая силы отталкивания вычисляется по закону

$$F_{t,ij} = \text{tg}\varphi_{ij} F_{n,ij} v_{t,ij}. \quad (5)$$

Реологическая модель такого касательного взаимодействия показана на рис. 2б.

Таким образом, по аналогии с классической теорией упругости, где существуют два независимых параметра — модуль упругости с размерностью давления и безразмерный коэффициент Пуассона, в представленной модели соударения в допредельной стадии деформирования контакта, заданной формулами (2) и (4), также присутствуют два параметра. Первый из них $k_{n,ij}$ имеет размерность ньютон на метр, а второй — безразмерный параметр k^* .

После определения значений нормальной и касательной компонент силы, действующих на каждом контакте, делается переход к следующему шагу нагружения, и данная схема повторяется для существующих и вновь образовавшихся контактов. Если в какой-то момент для нормальной составляющей перекрытия выполняется условие $\delta_{n,ij} \leq 0$, то такой контакт считается исчерпанным и в дальнейшем не рассматривается.

Таким образом, располагая данными о начальной упаковке частиц, законе контактного взаимодействия между ними и условиями нагружения, можно численно интегрировать систему уравнений, описывающую движение частиц с учетом сил инерции, начальных и краевых условий.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана область — цилиндр, ось которого ориентирована вдоль оси Oz и сечением которого в горизонтальной плоскости Oxy является эллипс с заданным соотношением полуосей (см. рис. 1а). Цилиндр заполнен сферическими частицами с заданными постоянными плотностью $\rho_i = 2500 \text{ кг/м}^3$, модулем упругости $E_i = 10 \text{ ГПа}$ и углом внешнего

трения скольжения $\varphi_{ij} = 15^\circ$. Численные эксперименты проведены для двух значений коэффициента восстановления скорости e_{ij} : 0.75 и 1. Значения упругих модулей, а также коэффициентов трения и восстановления скорости внешних границ совпадают с соответствующими значениями для дискретных элементов.

Создание первоначальной упаковки осуществлялось следующим образом. На первом этапе задавалось начальное распределение частиц по координатам и размерам без их пересечения, а на втором имитировался рост их диаметров с учетом контактного взаимодействия (алгоритм последовательного роста частиц) [8]. Таким образом, начальная упаковка “разбухла”, заполняя собой исследуемую область, причем конечная плотность упаковки (суммарная доля объемов частиц по отношению к объему всей области) составляла 0.65–0.80 в зависимости от распределения частиц по размерам [9, 10]. В настоящей работе радиусы частиц выбирались случайным образом на основе равномерного распределения: $r_{\max}/r_{\min} = 1.5$, где r_{\max} и r_{\min} — максимальный и минимальный радиусы частиц соответственно.

Жесткое ядро представляет собой вертикальный цилиндр, ограниченный контуром L^* с заданным радиусом R (см. рис. 1). Поступательное движение ядра отсутствует, возможно только его вращение относительно центральной оси Oz .

Рассмотрим граничные условия. На боковой поверхности (контуре) L задан вектор скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ с нулевой вертикальной компонентой, причем

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{v}| = \text{const}. \quad (6)$$

На верхнем и нижнем торцах $z = \pm h$ образца задана постоянная пригрузка $P = 10$ кН, действующая вдоль оси Oz (рис. 1а), трение между торцами и частицами материала отсутствует. Введение вертикального поджатия играет роль веса и необходимо для того, чтобы смещения боковой части границы вовлекали материал в процесс деформирования. Через малый промежуток времени после начала численного эксперимента за счет пригрузки материал переупаковывался, деформация становилась плоской и вертикальное поджатие начинало играть роль параметра. Как показали численные эксперименты, на начальном этапе деформирования изменение объема прекращалось и упаковка переходила в стационарное состояние. Такой подход позволил учесть дилатансию, которая оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние сыпучей среды.

Введем следующие обозначения. Пусть a и b — большая и малая полуоси эллипса соответственно соотношение полуосей $d = b/a$, зазор $\Delta = b - R$, где R — радиус включения.

Скорость вращения ядра определялась следующим образом. В начальный момент времени предполагаем, что ядро неподвижно. В процессе нагружения принудительно задаем вращение ядра с угловой скоростью ω_R относительно вертикальной оси (рис. 1б), при этом ω_R — линейная возрастающая функция от времени. На каждом шаге эксперимента вычисляется общий момент сил $\mathbf{M}_R = (M_x, M_y, M_z)$, действующих на контур L^* со стороны контактирующих с ним частиц. В некоторый момент времени вертикальная компонента вектора \mathbf{M}_R становится равной нулю. Текущее значение угловой скорости вращения внутреннего цилиндра фиксировалось. Найденное значение равно угловой скорости вращения ядра, как если бы оно свободно вращалось вокруг вертикальной оси под воздействием окружающего его сыпучего материала.

В качестве иллюстрации на рис. 3 приведена последовательность состояний сыпучего материала при значениях $d = 0.6$ и $\Delta/b = 2/3$ через равные промежутки времени. Точки 1–6 демонстрируют движение оболочки относительно сыпучего материала. Также здесь показано

вращение внутреннего цилиндра под действием окружающего его сыпучего материала. Видно, что реализуется так называемый западный дрейф — внутреннее ядро вращается медленнее внешней оболочки [11]. При определенном соотношении параметров (давления P , соотношения полуосей d , зазоре Δ и крупности частиц) в численных экспериментах реализуется восточный дрейф, т. е. скорость вращения внутреннего цилиндра превышает скорость вращения внешней оболочки.

Следует отметить, что в отличие от результатов [1, 2] на поверхности материала отсутствуют видимые линии скольжения, что объясняется наличием вертикальной пригрузки. Кроме того, при уменьшении значения отношения полуосей b/a движение материала приобретает особенность: область деформирования разбивается на две зоны течения — внешнюю и внутреннюю. Внешняя область примыкает к внешней границе, в целом повторяет ее и движется вдоль нее. Внутренняя область представляет собой два вихря, расположенные симметрично относительно центра.

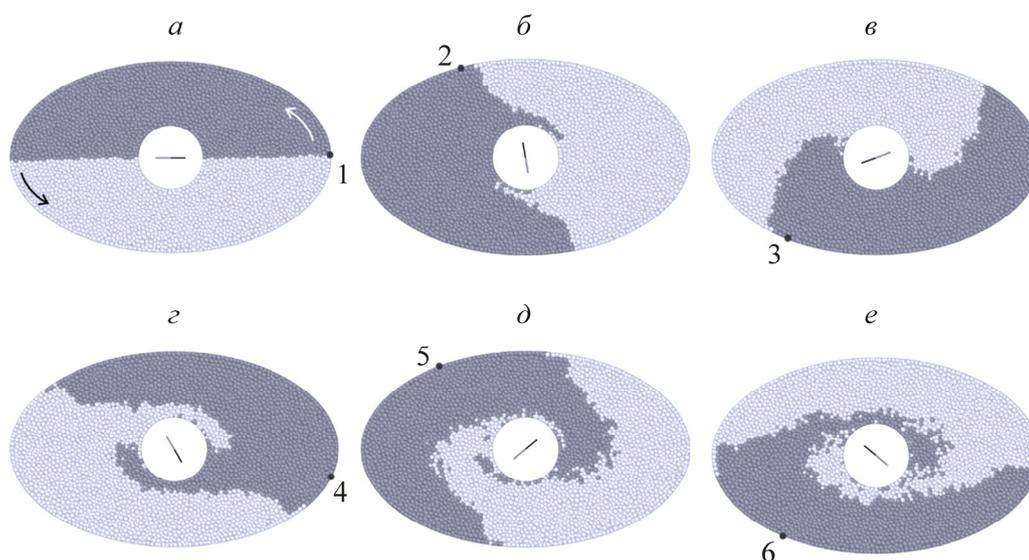


Рис. 3. Кинематика деформирования сыпучего материала: 1–6 — положение фиксированной точки оболочки относительно сыпучего материала

ВЫВОДЫ

Поворот направления сдвига сыпучей среды вызывает момент сил, действующих на жесткое цилиндрическое включение. В зависимости от параметров среды включение может вращаться как с опережением внешней оболочки, так и с ее отставанием.

Учет вязкости влияет на распределение напряжений, при этом кинематика качественно не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ревуженко А. Ф., Косых В. П., Бобряков А. П. О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения // ФТПРПИ. — 1998. — № 6.
2. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Экспериментальное моделирование спиральных линий скольжения в сыпучих материалах // ФТПРПИ. — 2009. — № 2.

3. Краус Е. И., Лавриков С. В., Медведев А. Е., Ревуженко А. Ф., Шабалин И. И. Моделирование эффекта дифференциального вращения при сложном нагружении сыпучих сред // ПМТФ. — 2009. — Т. 50. — № 4.
4. Bobet A., Fakhimi A., Johnson S., Morris J., Tonon F., Yeung M. Numerical Models in Discontinuous Media: Review of Advances for Rock Mechanics Applications, J. Geotech. Geoenviron. Eng., 2009, Vol. 135, Issue 11.
5. Игошкин А. М., Головнев И. Ф., Фомин В. М. Молекулярно-динамическое исследование влияния температуры подложки на термомеханические характеристики формируемых из газовой фазы нанопленок // Физ. мезомеханика. — 2013. — Т. 16. — № 1.
6. Годунов С.К., Киселев С.П., Куликов И.М., Мали В.И. Численное и экспериментальное моделирование образования волн при сварке взрывом // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2013. — Т. 281.
7. Williams J. R., O'Connor R. Discrete Element Simulation and the Contact Problem, Archives of Computational Methods in Engineering, 1999, Vol. 6, Issue 4.
8. Potyondy D. O., Cundall P. A. A bonded particle model for rock, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004, Vol. 41, Issue 8.
9. Kolonko M., Raschdorf S., Wäsch D. A hierarchical approach to simulate the packing density of particle mixtures on a computer, Granular Matter, 2010, Vol. 12, Issue 6.
10. Labra C., Oñate E. High-density sphere packing for discrete element method simulations // Communications in Numerical Methods in Engineering, 2009, Vol. 25, Issue 7.
11. Ревуженко А. Ф. Приливные волны и направленный перенос масс Земли. — Новосибирск: Наука, 2013.

Поступила в редакцию 21/II 2014