

УДК 534.26

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО-ЖИДКОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

П. С. Углич

Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону

E-mail: puglich@inbox.ru

Рассмотрена плоская задача о вынужденных колебаниях идеальной сжимаемой жидкости, ограниченной сверху упругим слоем с неровной нижней поверхностью, а также обратная геометрическая задача определения формы неровной нижней поверхности упругого слоя по волновым характеристикам на верхней поверхности. Для решения прямой задачи использованы три метода: метод малого параметра, метод граничных элементов, а также приближение Борна. Решение обратной задачи сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: теория упругости, акустика, метод граничных элементов, обратные задачи, некорректные задачи.

Введение. Задачи о колебаниях слоистых сред с дефектами (такими, как полость, трещина, включение) рассматриваются достаточно часто. Для решения задач подобного типа используется метод граничных интегральных уравнений, основанный на сведении исходной задачи к системе интегральных уравнений. Полученная система, в свою очередь, сводится к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть легко решена. Метод построения таких уравнений подробно описан, например, в работе [1].

Также представляют интерес обратные задачи определения характера и формы дефекта по характеру волнового поля на поверхности слоистой среды. В частности, в работах [2, 3] подобные задачи решены методом линеаризации в предположении, что амплитуда неровности невелика. В [4, 5] рассмотрены прямая и обратная задачи о рассеянии волн на малых компактных неоднородностях в морском волноводе, причем амплитуда неровности считалась малой по сравнению с длиной волны, а сама неровность задавалась на ограниченном множестве. Для решения прямой задачи использовано приближение Борна [6].

В настоящей работе исследуются колебания идеальной сжимаемой жидкости, ограниченной сверху упругим слоем с неровной нижней поверхностью. На верхней поверхности слоя действует нормальная нагрузка, на нижней выполняется условие непротекания жидкости, касательное напряжение отсутствует, а нормальное равно давлению жидкости.

Для решения поставленной задачи используются три способа. Первый способ основан на методе граничных интегральных уравнений и позволяет свести исходную задачу к системе сингулярных интегральных уравнений, которая решается численно на основе метода граничных элементов. Второй способ основан на приближении Борна и позволяет приближенно найти поле перемещений на верхней поверхности слоя, не решая систему граничных интегральных уравнений. Третий способ основан на методе возмущений и позволяет свести исходную краевую задачу к последовательности неоднородных краевых задач для ровного слоя. Такой подход применим в случае малой амплитуды неровности.

В данной работе сформулирована обратная задача о нахождении формы неровного участка нижней поверхности по известному полю перемещений на верхней поверхности слоя. В предположении малой глубины неровности задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Решение такого уравнения является некорректной задачей и строится с помощью метода регуляризации Тихонова [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим в плоской постановке задачу об установившихся колебаниях полубесконечной слоистой среды $|x_1| < \infty$, $x_2 \leq 1$, состоящей из упругого слоя $|x_1| < \infty$, $0 \leq \varepsilon f(x_1) \leq x_2 \leq 1$ с неровной нижней границей, контактирующего с идеальной сжимаемой жидкостью, занимающей область $|x_1| < \infty$, $x_2 < \varepsilon f(x_1)$, где ε — малый параметр; $f(x_1)$ — достаточно гладкая функция, описывающая форму неровности ($f(x_1) \neq 0$ при $x_1 \in [a, b]$ и $f(a) = f(b) = 0$).

Уравнения установившихся колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)^{-1} u_{j,ji} + \Delta u_i + \varkappa_2^2 u_i &= 0, \\ \Delta \varphi + \varkappa_0^2 \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ — потенциал скоростей в жидкости; $\varkappa_2 = \omega/c_2$; $\varkappa_0 = \omega/c_0$; ω — частота колебаний; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ — скорость поперечных волн в упругом слое; c_0 — скорость звука в жидкости; G , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона для слоя соответственно.

Будем считать, что на верхней поверхности слоя действует нормальная нагрузка и касательные напряжения отсутствуют:

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = q(x_1). \quad (2)$$

В дальнейшем, не нарушая общности, толщину слоя h будем считать равной единице.

На нижней поверхности слоя касательные компоненты вектора напряжений равны нулю, а нормальная компонента равна давлению жидкости. Кроме того, при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$ на границе слоя и жидкости выполняются условия сопряжения

$$\sigma_{n\tau} = 0, \quad \sigma_{nn} = -i\omega\rho_*\varphi, \quad -i\omega u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — соответственно нормальный и касательный векторы к кривой $x_2 = \varepsilon f(x_1)$; ρ_* — плотность жидкости. Замыкают постановку условия излучения на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [8].

2. Вывод системы граничных интегральных уравнений. Пусть $U_i^{(m)}$ — фундаментальное решение для системы слоев — жидкость (1) с прямолинейными границами, которое удовлетворяет следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)^{-1} U_{k,ki}^{(m)} + \Delta U_i^{(m)} + \varkappa_2^2 U_i^{(m)} + \frac{\delta_{im}}{G} \delta(x - \xi) &= 0; \\ \Delta \Phi^{(m)} + \varkappa_0^2 \Phi^{(m)} &= 0; \\ G(U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)})|_{x_2=0,1} &= 0, \\ \frac{2G}{1 - 2\nu} [\nu U_{1,1}^{(m)} + (1 - \nu)U_{2,2}^{(m)}]|_{x_2=1} &= 0, \\ \frac{2G}{1 - 2\nu} [\nu U_{1,1}^{(m)} + (1 - \nu)U_{2,2}^{(m)} + \frac{i\rho_*\omega}{G} \Phi^{(m)}]|_{x_2=0} &= 0, \\ -i\omega U_2^{(m)}|_{x_2=0} &= \Phi_{,2}^{(m)}|_{x_2=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$(5)$$

Обозначим через $U_i^-(x, \xi)$ фундаментальное решение для системы слой — жидкость в случае, когда источник возмущений находится в жидкости:

$$(1 - 2\nu)^{-1}U_{k,ki}^- + \Delta U_i^- + \varkappa_2^2 U_i^- = 0,$$

$$\Delta \Phi^- + \varkappa_0^2 \Phi^- = -\delta(x - \xi).$$

Краевые условия для функций U_i^- , Φ^- имеют вид (5). Обозначим область, занятую слоем, через S_+ , верхнюю поверхность слоя — L_+ , нижнюю — L_- , неровный участок границы — Γ_f .

Рассмотрим область $S_R^+ = S_+ \cap \{|x_1| < R\}$. С использованием формул Сомильяны получаем

$$u_m(\xi) = \int_{\partial S_R^+} [\sigma_{kl}(x)n_l U_k^{(m)}(x, \xi) - u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi)n_l] dl_x, \quad \sigma_{nn} = \sigma_{ij}n_i n_j.$$

Устремляя R к бесконечности, с учетом краевых условий получаем

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(\xi) + \int_{L_-} [\sigma_{nn}(x)U_n^{(m)}(x, \xi) - u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi)n_l] dl_x, \quad (6)$$

где $u_k^{et}(\xi)$ — поле смещений в слое с прямолинейными границами под действием нагрузки $q(x_1)$.

Рассмотрим область S_R^- , ограниченную сверху кривой L_- , а снизу полуокружностью радиусом R с центром в начале координат. Второе уравнение системы (1) умножим на функцию $\Phi^{(m)}$, уравнение (4) — на функцию φ , вычтем полученные уравнения одно из другого и проинтегрируем по области S_R^- :

$$\int_{S_R^-} [\Delta_x \Phi^{(m)}(x, \xi)\varphi(x) - \Delta_x \varphi(x)\Phi^{(m)}(x, \xi)] dS_x =$$

$$= \int_{\partial S_R^-} \left(\frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial n} \varphi(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} \Phi^{(m)}(x, \xi) \right) dl_x.$$

Устремляя R к бесконечности, с учетом краевых условий на границе слоя и жидкости находим

$$-i \int_{\Gamma_f} \left[\frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial n} \left(\frac{\sigma_{nn}(x)}{\rho_* \omega} \right) - \omega u_n(x)\Phi^{(m)}(x, \xi) \right] dl_x +$$

$$+ \frac{1}{\rho_*} \int_{L_- \setminus \Gamma_f} [\sigma_{22}(x)U_2^{(m)}(x, \xi) - u_2(x)\sigma_{22}^{(m)}(x, \xi)] dl_x = 0. \quad (7)$$

Умножим выражение (7) на ρ_* и вычтем из (6). В результате получаем

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(y) + \int_{\Gamma_f} \left[\sigma_{nn}(x) \left(U_n^{(m)}(x, \xi) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \Phi^{(m)}(x, y)}{\partial n} \right) - \right.$$

$$\left. - u_n(x) [\sigma_{nn}^{(m)}(x, \xi) + i\omega \rho_* \Phi^{(m)}(x, \xi)] - u_\tau(x)\sigma_{n\tau}^{(m)}(x, \xi) \right] dl_x. \quad (8)$$

При известных функциях u_n, u_τ, σ_{nn} соотношение (8) позволяет определить поле перемещений в слое в любой точке ξ , для которой выполняется условие $\xi > \varepsilon \max f(x_1)$. Рассмотрим полуплоскость $x_2 < 0$, для которой можно получить соотношение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial n} \varphi(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} \Phi^{(m)}(x, \xi) \right) dl_x = 0. \quad (9)$$

Умножим выражение (9) на ρ_* и вычтем из (6). С учетом краевых условий на границе раздела имеем

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(\xi) - \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^{(m)}(x, \xi) + u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi)] dl_x + \\ + \rho_* \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^{(m)}(x_1, 0; \xi) - \chi(x_1)\Phi^{(m)}(x_1, 0; \xi)] dx_1. \quad (10)$$

При $\xi \rightarrow y \in \Gamma_f$ получаем

$$\frac{1}{2} u_m(y) = u_m^{et}(y) - \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^{(m)}(x, y) + u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, y)] dl_x + \\ + \rho_* \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^{(m)}(x_1, 0; y) - \chi(x_1)\Phi^{(m)}(x_1, 0; y)] dx_1. \quad (11)$$

В равенствах (10), (11) введены следующие обозначения:

$$\psi(x_1) = \varphi(x)|_{x_2=0}, \quad \chi(x_1) = \varphi_{,2}(x)|_{x_2=0}.$$

Рассмотрим область $\{a \leq x_1 \leq b, 0 \leq x_2 \leq \varepsilon f(x_1)\}$. С использованием формулы Грина для уравнения Гельмгольца при $\xi \rightarrow y \in \Gamma_f$ имеем

$$\frac{1}{2} \varphi(y) = - \int_{\Gamma_f} \left(i\omega\rho_*u_n(x)\Phi^0(x, y) + \varphi(x) \frac{\partial \Phi^0}{\partial n}(x, y) \right) dl_x - \\ - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^0(x_1, 0; y) - \chi(x_1)\Phi^0(x_1, 0; y)] dx_1. \quad (12)$$

Устремляя точку ξ к прямой $x_2 = 0$, получаем уравнение на отрезке $[a, b]$ вида

$$\frac{1}{2} \psi(y) = - \int_{\Gamma_f} \left(i\omega\rho_*u_n(x)\Phi^0(x; y_1, 0) + \varphi(x) \frac{\partial \Phi^0}{\partial n}(x; y_1, 0) \right) dl_x - \\ - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^0(x_1, 0; y_1, 0) - \chi(x_1)\Phi^0(x_1, 0; y_1, 0)] dx_1. \quad (13)$$

В области $x_2 \leq 0$ справедливо уравнение

$$-\frac{1}{2} \psi(y_1, 0) = Q(y_1) - \frac{1}{\rho_*} \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^-(x; y_1, 0) + u_k(x)\sigma_{kl}^-(x; y_1, 0)] dl_x - \\ - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^-(x_1, 0; y_1, 0) - \chi(x_1)\Phi^-(x_1, 0; y_1, 0)] dx_1, \quad (14)$$

$$Q(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x_1)U_2^-(x_1, 1; y_1, 0) dx_1.$$

Таким образом, получена система пяти интегральных уравнений (11)–(14) относительно пяти неизвестных функций.

3. Метод возмущений. Считая заглубление малым, для компонент тензора напряжений на неровной границе имеем

$$\sigma_{nm} = \sigma_{22} - 2\varepsilon f'(x_1)\sigma_{12} + O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{n\tau} = -\sigma_{12} - \varepsilon f'(x_1)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

Аналогично введем возмущения для u_n и $\partial\varphi/\partial n$:

$$u_n = -u_2 + \varepsilon f'(x_1)u_1 + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\varphi_{,2} + \varepsilon f'(x_1)\varphi_{,1} + O(\varepsilon^2). \quad (16)$$

При $x_2 = \varepsilon f(x_1)$ граничные значения функций $u_i(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2)$ разложим в ряд Тейлора по x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$:

$$u_i(x_1, \varepsilon f(x_1)) = u_i(x_1, 0) + \varepsilon f(x_1)u_{2,i}(x_1, 0) + O(\varepsilon^2),$$

$$\varphi(x_1, \varepsilon f(x_1)) = \varphi(x_1, 0) + \varepsilon f(x_1)\varphi_{,2}(x_1, 0) + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя эти выражения (с учетом (15), (16)) в (3) и отбрасывая малые величины высоких порядков, при $x_2 = 0$ получаем следующие линеаризованные краевые условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} + \varepsilon f(x_1)\sigma_{12,2} + \varepsilon f'(x_1)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) &= 0, \\ \sigma_{22} + \varepsilon f(x_1)\sigma_{22,2} - 2\varepsilon f'(x_1)\sigma_{12} &= -i\omega\rho_*(\varphi + \varepsilon f(x_1)\varphi_{,2}), \\ \varphi_{,2} + \varepsilon f(x_1)\varphi_{,22} - \varepsilon f'(x_1)\varphi_{,1} &= -i\omega[u_2 + \varepsilon f(x_1)u_{2,2} - \varepsilon f'(x_1)u_1]. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение задачи будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$u_i = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \dots, \quad \varphi = \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1 + \dots \quad (18)$$

Подставим разложения (17), (18) в исходные уравнения (1) и краевые условия (2), (3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Для u_j^i , φ^i получаем однородные уравнения Ламе и уравнение Гельмгольца:

$$(1 - 2\nu)^{-1}u_{j,jk}^i + \Delta u_k^i + \varkappa_2^2 u_k^i = 0, \quad \Delta\varphi^i + \varkappa_0^2\varphi^i = 0.$$

При этом выполняются следующие краевые условия:

— для u_i^0 , φ^0 (нулевое приближение)

$$\begin{aligned} x_2 = 1: \quad \sigma_{12}^0 &= 0, \quad \sigma_{22}^0 = q(x_1), \\ x_2 = 0: \quad \sigma_{12}^0 &= 0, \quad \sigma_{22}^0 = -i\omega\rho_*\varphi^0, \quad \varphi_{,2}^0 = -i\omega u_2^0; \end{aligned}$$

— для u_i^1 , φ^1 (первое приближение)

$$\begin{aligned} x_2 = 1: \quad \sigma_{12}^1 &= 0, \quad \sigma_{22}^1 = 0, \\ x_2 = 0: \quad \sigma_{12}^1 &= -f(x_1)\sigma_{12,2}^0 - f'(x_1)(\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0), \\ \sigma_{22}^1 + i\omega\rho_*\varphi^1 &= -f(x_1)(\sigma_{22,2}^0 + i\omega\rho_*\varphi_{,2}^0), \\ \varphi_{,2}^1 + i\omega u_2^1 &= -f(x_1)(\varphi_{,22}^0 + i\omega u_{2,2}^0) + f'(x_1)(\varphi_{,1}^0 + i\omega u_1^0). \end{aligned}$$

Обе задачи решены с помощью преобразования Фурье. При этом решение, полученное в нулевом приближении, совпадает с “эталонным” решением u_i^{et} .

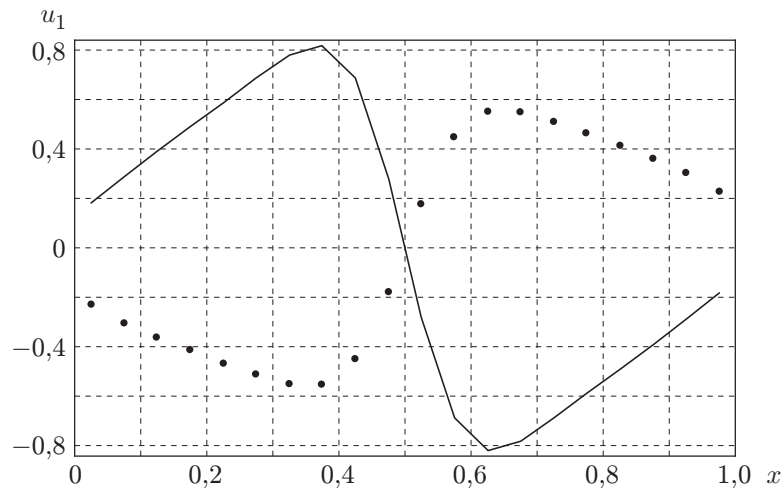


Рис. 1. Результаты численного решения системы интегральных уравнений (11)–(14) при $\varkappa_2 = 2$, $\varepsilon = 0,2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$: сплошная линия — вещественная часть горизонтального перемещения, точки — мнимая часть горизонтального перемещения

4. Численное решение граничных уравнений. Система (11)–(14) может быть исследована лишь численно на основе метода граничных элементов [1]. Разобьем отрезок $[a, b]$ на N отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, $x_i = a + hi$, $h = (b-a)/N$. Кривая Γ_f аппроксимируется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (элементов) l_i с концами в точках $l_{i+N} = [(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))]$. Предположим, что на отрезках l_i функции u_i постоянны. В качестве узлов, в которых выполнены интегральные уравнения (11)–(14), выберем точки ξ_i , расположенные в серединах отрезков l_i . Для узловых неизвестных u_i получаем систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты этой системы представляют собой двойные интегралы, однако в результате явного интегрирования по элементу удалось выразить их через однократные интегралы.

Расчеты проводились для слоистой среды вода — сталь. На рис. 1 представлены результаты численного решения системы интегральных уравнений (11)–(14) при $\varkappa_2 = 2$, $\varepsilon = 0,2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$. Найдя неизвестные в узлах, согласно представлению (8) можно рассчитать волновые поля на верхней границе слоя. Также расчет можно выполнить, используя метод линеаризации. Кроме того, при отыскании волнового поля на поверхности при малой амплитуде неровности можно непосредственно подставить “эталонное” решение u_i^0 в представление (8) (такой подход называется приближением Борна). На рис. 2 представлена зависимость $\text{Re}(u_2 - u_2^0)$ от x при $\varkappa_2 = 2$, $\varepsilon = 0,1$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$.

Обозначим через g_i^I волновое поле, найденное по формуле (8), через g_i^{II} — поле, найденное с помощью метода линеаризации. Введем величины

$$\delta_i^I = \frac{\|g_i^I - g_i^{II}\|}{\|g_i^I\|} \cdot 100 \%$$

и рассмотрим их зависимость от амплитуды неровности. В таблице приведены значения параметра δ_1^I при различных значениях амплитуды неровности и волнового числа.

5. Решение обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу об определении формы границы по известной на отрезке $[c, d]$ одной из составляющих вектора перемещения (u_1 либо u_2) на верхней поверхности слоя. Допустим также, что известно “эталонное” поле перемещений \bar{u}^0 на поверхности слоя, которое соответствует решению задачи для слоя с

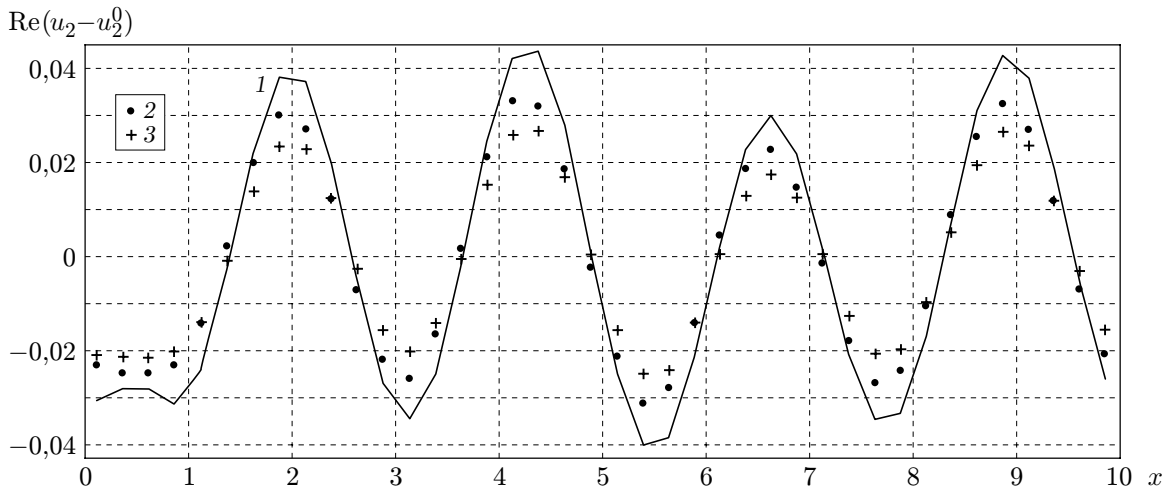


Рис. 2. Зависимость $\text{Re}(u_2 - u_2^0)$ от x при $\varkappa_2 = 2, \varepsilon = 0,1, f(x_1) = \sin(\pi x_1)$:
 1 — решение, полученное с использованием приближения метода граничных элементов;
 2 — решение, полученное методом линеаризации; 3 — решение, полученное с использованием приближения Борна

Значения параметра δ_1^I (в процентах)
 при различных значениях амплитуды неровности и волнового числа

ε	$\varkappa_2 = 1$		$\varkappa_2 = 2$	
	$N = 20$	$N = 40$	$N = 20$	$N = 40$
0,1	37,43	38,67	97,17	82,14
0,01	2,43	2,66	3,76	3,67
0,001	3,09	2,53	0,98	0,18
0,0001	3,53	2,60	1,12	0,37

ровной нижней поверхностью. Тогда

$$u_i(0, x_1) = u_i^0(0, x_1) + \varepsilon u_i^1(0, x_1) + \dots$$

и, следовательно,

$$\varepsilon u_i^1(0, x_1) = u_1(0, x_1) - u_i^0(0, x_1).$$

Предположим, что функция f отлична от нуля только на отрезке $[a, b]$, непрерывно дифференцируема на этом отрезке и $f(a) = f(b) = 0$. Тогда с использованием представления для решения в первом приближении, получаем

$$u_i^1|_{x_2=1} = \int_a^b f(x'_1) K_i^1(x_1, x'_1) dx'_1, \quad x \in [c, d], \tag{19}$$

где функция $K_i^1(x_1, x'_1)$ имеет достаточно сложный вид и не выражается в явном виде.

Равенство (19) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма с гладким ядром относительно функции $f(x_1)$. Как известно, процедура построения решения такого уравнения некорректна и требует регуляризации [3, 4]. В настоящей работе для построения регуляризованного решения использован метод регуляризации Тихонова.

Ниже представлены результаты численного эксперимента по восстановлению формы неровности. Численные эксперименты проводились следующим образом: сначала при известной форме неровности для отыскания неизвестных перемещений на неровном участке

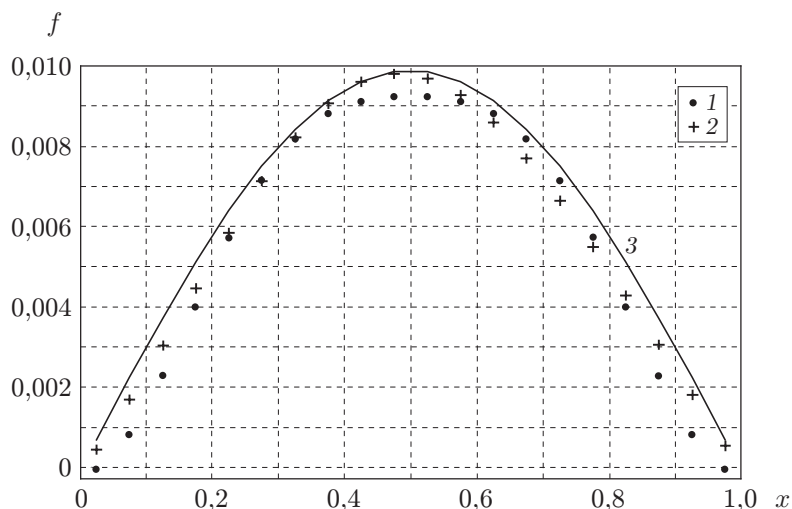


Рис. 3. Результаты расчета по формуле (19) при $\kappa_2 = 4$, $\varepsilon = 0,01$:

1 — исходная форма неровности; 2 — форма неровности, восстановленная по вещественной части горизонтального перемещения на отрезке $[2, 4]$; 3 — форма неровности, восстановленная по вещественной части горизонтального перемещения на отрезке $[0, 1]$

границы решалась система интегральных уравнений (11)–(14), затем для найденных перемещений с помощью соотношений Сомильяны (8) определялись поля перемещений на участке $[c, d]$ верхней поверхности полосы. Эти перемещения использованы в качестве исходных данных для решения обратной задачи (в линеаризованной постановке — для решения интегрального уравнения (19)). Для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался метод Воеводина с автоматическим подбором параметра регуляризации по критерию обобщенной невязки.

На рис. 3 приведены результаты расчета по формуле (19) при $\kappa_2 = 4$ ($\omega \approx 8$ кГц), $\varepsilon = 0,01$.

Заключение. С использованием метода линеаризации обратная геометрическая задача определения формы неровного участка границы раздела между упругим слоем и жидкостью сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Численные эксперименты показывают, что данный подход эффективен только при малой амплитуде неровности, не превышающей 0,1 ширины слоя. При большей амплитуде неровности следует применять итерационные схемы решения обратных задач [9]. Предложенная методика может быть использована для диагностики неровностей в трубопроводах и резервуарах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д. Интегральные уравнения в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. М.: Мир, 1987.
2. Ватульян А. О., Коренский С. А. Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 4. С. 639–646.
3. Ватульян А. О., Углич П. С. Определение формы неровной границы раздела между упругой и жидкой средами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. 2001. Спецвыпуск. Математическое моделирование. С. 44–46.
4. Захаренко А. Д. Рассеяние звука на малых компактных неоднородностях в морском волноводе // Акуст. журн. 2000. Т. 46, № 2. С. 200–204.

5. **Захаренко А. Д.** Рассеяние звука на малых компактных неоднородностях в морском волноводе: обратная задача // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 2. С. 200–204.
6. **Горюнов А. А.** Обратные задачи рассеяния в акустике / А. А. Горюнов, А. В. Сасковец. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
7. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.
8. **Ворович И. И.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.
9. **Алифанов О. М.** Экстремальные методы решения некорректных задач / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 6/X 2008 г.
