

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ ДЕТОНАЦИИ

С. С. Рыбанин
(Москва)

**УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН.
МИНИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ДЕТОНАЦИИ**

Осредненные уравнения сохранения массы, импульса и энергии получены в [1] при предположении, что турбулентность однородна и изотропна, что пульсации скорости больше пульсаций всех остальных величин и что можно пренебречь теплопроводностью и трением.

$$j = \bar{\rho} \cdot \bar{U} = \rho_0 U_0; \quad (1)$$

$$\bar{p} + j^2 \bar{v} + \frac{\bar{u}^2}{v} = p_0 + j^2 v_0; \quad (2)$$

$$\frac{\gamma \bar{p} \bar{v}}{\gamma - 1} + \frac{j^2 \bar{v}^2}{2} + \frac{5}{2} \bar{u}^2 = \frac{\gamma p_0 v_0}{\gamma - 1} + \frac{j^2 v_0^2}{2} + (1 - \beta) Q, \quad (3)$$

здесь j — плотность потока массы; ρ — плотность; p — давление; v — удельный объем; U — скорость; Q — тепловой эффект реакции; β — доля непрореагировавших молекул; $\bar{u}^2 = \bar{u}_x^2 = \bar{u}_y^2 = \bar{u}_z^2$ — интенсивность турбулентности. Индекс «0» относится к состоянию газа перед волной; величины без индекса относятся к состоянию газа за волной. Ниже знак осреднения будет опускаться.

Из уравнений (1) — (3) получим уравнение «турбулентной» адиабаты Гюгонио в безразмерных координатах $\pi = \frac{p}{p_0}$, $\sigma = \frac{v}{v_0}$;

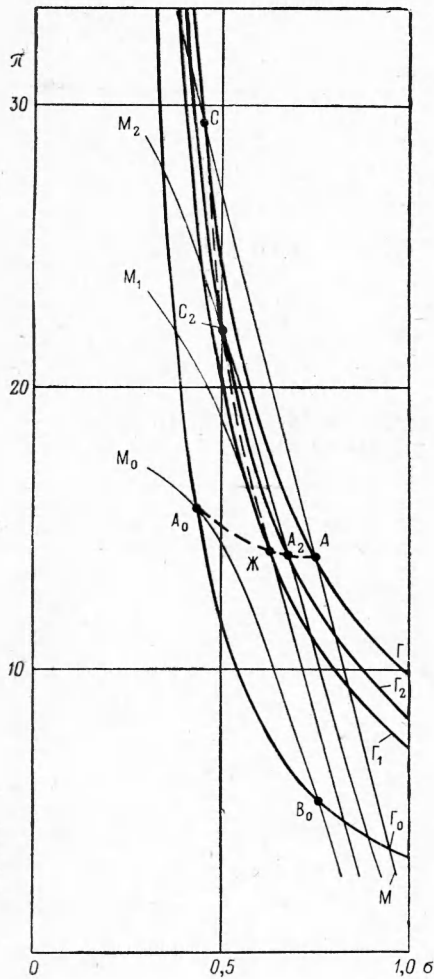
$$\pi = \frac{z - \sigma + \frac{2\gamma(1-\beta)Q}{c_0^2} - \frac{4\sigma - 1}{\sigma} \cdot \frac{\gamma u^2}{c_0^2}}{z\sigma - 1}, \quad (4)$$

где

$$z = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad c_0^2 = \gamma p_0 v_0.$$

Уравнение (2) является аналогом уравнения прямой Михельсона при обычной детонации, перепишем это уравнение в новых обозначениях:

$$\pi + \gamma M^2 \sigma + \frac{\gamma u^2}{\sigma c_0^2} = 1 + \gamma M^2, \quad (5)$$



здесь

$$M^2 = \frac{U_0^2}{\gamma p_0 v_0}$$

Величина u^2 зависит от скорости детонации, начального состояния, химической кинетики и расстояния от фронта. Но поскольку $u^2 \ll U^2$, то скорость детонации мало отлична от скорости, вычисленной без учета турбулентности, поэтому в первом приближении можно считать, что u^2 зависит только от химических свойств смеси, начального состояния и расстояния.

На рисунке показан вид кривых (4) и (5) в координатах π, σ . Линии $A_0 B_0 \Gamma_0$ и $M_0 A_0 B_0$ — «турбулентная» адиабата и кривая (5) при $M = \text{const}$ соответственно. Вдоль обеих кривых $\beta = \beta_0 = \text{const}$ и $u^2 = u_0^2 = \text{const}$. Линии $C_2 A_2 \Gamma_2$ и $M_2 C_2 A_2$ — «турбулентная» адиабата и кривая (5) при $\beta < \beta_0$, $u^2 < u_0^2$.

$M_0 A_0 B_0, M_1 \text{Ж}, M_2 C_2 A_2, \text{САМ}$ — кривые, соответствующие уравнению (5) при $M_* = 5,46$ и при $\frac{u^2}{U_{0*}^2}$, равном соответственно 0,15; 0,1; 0,05; 0,0. $A_0 B_0 \Gamma_0, \text{Ж}\Gamma_1, C_2 A_2 \Gamma_2, \text{САГ}$ — «турбулентные» адиабаты Гюгонно при тех же значениях $\frac{u^2}{U_{0*}^2}$ и значениях β , соответственно равных 0,7; 0,99; 0,0.

Исключив π из (4) и (5), получим:

$$(\gamma + 1) M^2 \sigma^2 - 2(1 + \gamma M^2) \sigma + (\gamma - 1) M^2 + 2 + \frac{2(\gamma - 1)(1 - \beta) Q}{c_0^2} + \frac{(5 - 3\gamma) u^2}{c_0^2} = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\sigma_{1,2} = \frac{1 + \gamma M^2 + \sqrt{D}}{(\gamma + 1) M^2}, \quad (7)$$

где

$$D = (M^2 - 1)^2 - \frac{M^2}{c_0^2} [2(\gamma^2 - 1)(1 - \beta) Q + (\gamma + 1)(5 - 3\gamma) u^2]. \quad (8)$$

Величина

$$y = \frac{M^2}{c_0^2} [2(\gamma^2 - 1)(1 - \beta) Q + (\gamma + 1)(5 - 3\gamma) u^2]$$

изменяется в зависимости от расстояния x от фронта волны и может иметь максимум. Действительно, обычно $(1 - \beta)$ растет значительно быстрее, чем падает u^2 , это означает, что при некотором x реакция почти закончится, турбулентность еще не затухнет, поэтому: $\frac{dy}{dx} < 0$, так как $\frac{d(u^2)}{dx} < 0$ (потому что турбулентность затухает) и

$$\left| \frac{d[2(\gamma^2 - 1)\beta Q]}{dx} \right| < \left| \frac{d[(\gamma + 1)(5 - 3\gamma)u^2]}{dx} \right|.$$

При $x = 0$ $\frac{dy}{dx} > 0$, поэтому при некотором x_* $\frac{dy}{dx} = 0$.

Минимальное значение M находится из условия $D \geq 0$ для всех β и u^2 , которое выполняется, если $D = 0$ при $\beta = \beta(x_*) = \beta_*$, $u^2 = u^2(x_*) = u_*^2$;

$$M_*^2 = 1 + \frac{(\gamma^2 - 1)(1 - \beta_*)Q}{c_0^2} + \frac{(\gamma + 1)(5 - 3\gamma)u_*^2}{2 \cdot c_0^2} + \sqrt{\left[\frac{(\gamma^2 - 1)(1 - \beta_*)Q}{c_0^2} + \frac{(\gamma + 1)(5 - 3\gamma)u_*^2}{2 \cdot c_0^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{(\gamma^2 - 1)(1 - \beta_*)Q}{c_0^2} + \frac{(\gamma + 1)(5 - 3\gamma)u_*^2}{2 \cdot c_0^2} \right]}. \quad (9)$$

Детонация может распространяться с любой скоростью, для которой $M > M_*$; скорость же стационарной волны должна быть такой, чтобы скорость продуктов горения относительно волны равнялась или была бы больше скорости нестационарной волны разряжения. Скорость волны разряжения в турбулентном потоке зависит не только от средней температуры, но и от интенсивности турбулентности.

Скорость волны разряжения в турбулентном потоке при $u^2 = \text{const}$

Если время изменения средних величин t намного больше временного масштаба турбулентности τ , то, выбирая время осреднения $\tau_0 \ll \tau_0 \ll t$, получим уравнения сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho U_k}{\partial x_k}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) = - \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k); \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho U_i^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{3}{2} \rho u^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho U_k \left[\frac{\gamma p v}{\gamma - 1} + \frac{U_i^2}{2} + \frac{5}{2} u^2 \right] \right\} + \rho T \frac{dS}{dt}, \quad (12)$$

здесь ε — внутренняя энергия; S — энтропия.

Относительно турбулентности делаем те же самые предположения, что и раньше, только считаем $u^2 = \text{const}$.

Из уравнений (10)—(12) получаем:

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + (p + \rho u^2) \frac{dv}{dt}. \quad (13)$$

Появление в уравнении сохранения энергии (13) члена $\rho u^2 \frac{dv}{dt}$ связано с работой, которая совершается турбулентными напряжениями Рейнольдса.

Если с момента образования нестационарной волны разряжения прошло время $t \gg \tau$, то для описания такой волны применимы уравнения (10)—(12). Сделав выкладки совершенно такие же, как при рассмотрении волны разряжения без учета турбулентности [2], получим скорость распространения границ волны:

$$U_p = \sqrt{\left[\frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial \rho} \right]_{S, u^2}} = \sqrt{\gamma p v + \gamma u^2}. \quad (14)$$

Правило отбора скорости детонации при учете турбулентности

Условие $D=0$ означает, что кривая (5) при $M=\text{const}$ и адиабата (4) касаются. Покажем, что в точке касания скорость газа равна скорости волны разряжения. Для этого продифференцируем уравнения (2) и (3) при постоянных u^2 и β вдоль кривой (4):

$$dp + v d(j^2) - \frac{u^2 dv}{v} = v_0 d(j^2); \quad (15)$$

$$d\left(\frac{\gamma p v}{\gamma - 1}\right) + v j^2 dv = \frac{v_0^2 - v^2}{2} d(j^2). \quad (16)$$

Так как $u^2 = \text{const}$, то из равенств (13), (15), (16) получим:

$$T dS = \frac{(v_0 - v)^2}{2} d(j^2). \quad (17)$$

Из уравнений (13), (15)—(17), учитывая, что

$$dv = \left(\frac{dv}{dp}\right)_{S, u^2} \cdot dp + \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_{p, u^2} \cdot dS,$$

следует:

$$\begin{aligned} (v_0 - v) \left\{ 1 - \left(j^2 - \frac{u^2}{v}\right) \frac{v_0 - v}{2T} \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_{p, u^2} \right\} \frac{d(j^2)}{dp} = \\ = 1 + \left(j^2 - \frac{u^2}{v^2}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{S, u^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Откуда при

$$\begin{aligned} \frac{d(j^2)}{dp} &= 0 \\ 1 + \left(j^2 - \frac{u^2}{v^2}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{S, u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения (13) и (14), получим

$$U^2 = \gamma p v + \gamma u^2 = U_p^2.$$

Условие же $\frac{d(j^2)}{dp}$ есть условие касания кривой (5) при $M = \text{const}$ и «турбулентной» адиабаты Гюгонио.

Можно показать, пользуясь равенствами (13) и (18), что, если $\frac{d(j^2)}{dp} > 0$, то $U < U_p$; если $\frac{d(j^2)}{dp} < 0$, то $U > U_p$. Условию $\frac{d(j^2)}{dp} > 0$ удовлетворяют точки адиабаты (4), лежащие выше точки, в которой $\frac{d(j^2)}{dp} = 0$ (точки Жуге), т. е. на сильном участке; условию $\frac{d(j^2)}{dp} < 0$ — точки, лежащие ниже, на слабом участке.

Состояние газа сначала находится на сильном участке адиабаты; по мере завершения реакции и затухания турбулентности состояние газа изменяется по кривой, соответствующей пересечением сильных участков кривых (4) и кривой (5) при каждом β и u^2 . На рисунке это кривая $A_0Ж$. Если $M > M_*$, то $D > 0$, $\frac{d(j^2)}{dp} > 0$ и $U < U_p$, потому что состояния газа при $M > M_*$ всегда находятся на сильных участках адиабат (4). Следовательно, волна разряжения будет догонять детонационную. Если $M = M_*$, то при $\beta = \beta_*$ и $u^2 = u_*^2$, $\frac{d(j^2)}{dp} = 0$, $U = U_p$, поэтому волна разряжения не сможет догнать детонационную, следовательно, детонационная волна будет распространяться с постоянной скоростью, если будет выполняться условие Чепмена — Жуге: скорость детонации — минимальная. Только при такой скорости волна разряжения не сможет догнать детонационную волну.

Состояние газа за волной при затухании турбулентности

Рассмотрим, как изменяется состояние газа за волной, распространяющейся с минимальной скоростью. При $x < x_*$ состояния газа находятся на сильных участках адиабат (4). Этим состояниям соответствуют значения σ , получаемые из уравнения (7) при выборе знака минус перед корнем. В точке $x = x_*$ $D = 0$ и при $x > x_*$ состояние газа может изменяться по кривой, соответствующей выбору знака плюс перед корнем (см. рисунок, кривая $ЖA_2A$), или по кривой, соответствующей знаку минус (кривая $ЖC_2C$). Из уравнений (7), (8), учитывая, что при $x = x_*$ $D = 0$ $\frac{dD}{dx} = 0$, получаем:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \begin{cases} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \frac{d^2D}{dx^2}} \cdot \frac{1}{(\gamma + 1)j^2\sigma_0} & \text{при } x = x_* - 0 \\ \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{d^2D}{dx^2}} \cdot \frac{1}{(\gamma + 1)j^2\sigma_0} & \text{при } x = x_* + 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что только в случае, если σ изменяется по ветви кривой (7), соответствующей знаку плюс перед корнем при $x > x_*$, $\frac{d\sigma}{dx}$ — непрерывна. Изменение σ по ветви кривой (7), соответствующей знаку

минус, маловероятно, потому что разрыв производной (слабый разрыв) не может появиться сам по себе, его появление всегда связано с какими-либо особенностями в граничных или начальных условиях (скачок кривизны поверхности обтекаемого тела, нестационарная волна разряжения [2]). Появлению слабого разрыва может способствовать волна разряжения, примкнувшая к детонационной волне в плоскости Жуге ($U = U_p$). Однако стоит только в результате флуктуации возникнуть течению $U > U_p$, которому соответствует непрерывная $\frac{d\tau}{dx}$, как волна разряжения отойдет от плоскости Жуге и источника инициирования, слабого разрыва больше не будет. Таким образом, изменение состояния газа будет происходить по кривой, все точки которой при $x_* > x > 0$ — точки пересечения сильных ветвей адиабаты (4) и кривой (5) и при $x > x_*$ — точки пересечения слабых ветвей и кривой (5). На рисунке это кривая $A_0ЖА_2A$. Точка Ж — точка касания адиабаты (4) $ЖГ_1$ и кривой (5) — $M_1Ж$ при $\beta = \beta_*$ и $u^2 = u_*^2$. Точка А лежит на слабой ветви адиабаты САГ, соответствующей затухшей турбулентности и закончившейся реакции ($u^2 = 0$, $\beta = 0$). В работе [3] высказано предположение, что состояние газа, соответствующее затухшей турбулентности, лежит на адиабате, которая отлична от обычной адиабаты Гюгонио, что связывалось с изменением энтропии при затухании турбулентности. На самом же деле, как следует из уравнений (1) и (3), это неверно, обычная детонационная адиабата Гюгонио и адиабата, соответствующая затухшей турбулентности, совпадают.

Влияние турбулентности на детонацию

Покажем теперь справедливость приближений, сделанных при выводе уравнений, и оценим влияние турбулентности на скорость детонации и состояние продуктов горения.

Покажем, что

$$\rho U \cdot u^2 \gg \eta \frac{\partial U_i}{\partial x} \cdot U_i \text{ и } \rho U \cdot u^2 \gg \lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

где η , λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности соответственно. Действительно:

$$\eta \frac{\partial U_i}{\partial x} \cdot U_i \sim \eta \frac{\partial (u^2)}{\partial x}; \quad u^2 \sim \frac{u_0^2 x_0^2}{x^2},$$

отсюда

$$\frac{d(u^2)}{dx} \sim \frac{u_0^2 x_0^2}{x^3} \text{ и } \frac{\eta \frac{\partial U_i}{\partial x} \cdot U_i}{\rho U \cdot u^2} \sim \frac{\eta}{\rho U x}.$$

При детонации

$$\eta \simeq 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{сек}; \quad \rho \simeq 10^{-2} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad V \simeq 10^5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad x > 10^{-2} \text{ см},$$

поэтому

$$\frac{\eta \frac{\partial U_i}{\partial x} \cdot U_i}{\rho U \cdot u^2} \simeq 10^{-4}.$$

Можно показать $\frac{dT}{dx} \simeq \frac{\sqrt{u^2} \cdot x_0 U}{R \cdot x^2}$, если считать тепловыделение химической реакции порядка тепловыделения от затухания турбулентно-

сти (это так при $x \gg x_*$). В турбулентном потоке $\lambda = c_p \rho l \sqrt{u^2}$. В этих формулах: R — газовая постоянная, c_p — теплоемкость, l — масштаб турбулентности. Оказывается, что

$$\frac{l \frac{\partial T}{\partial x}}{\rho U \cdot u^2} \sim \frac{l}{x} \ll 1.$$

Чтобы сделать оценки изменения величины скорости детонации и конечного состояния в результате учета турбулентности, нужно знать величины u_*^2 и β_* .

Будем считать $\beta_* = 0$, u_*^2 можно оценить по интенсивности тангенциальных разрывов в изломах ударной волны. Для этого воспользуемся результатами расчетов, сделанных в [4] для тройных конфигураций при детонации смеси $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ при давлении 760 мм. рт. ст., по которым $\frac{u^2}{U_0^2} = 0,04$. Будем считать, что $\frac{u_*^2}{U_0^2} = 0,01$. Разлагая подкоренное выражение равенства (9) в ряд, получим

$$\frac{U_{0*}}{U_{00}} \simeq 1 + \frac{(\gamma + 1)(5 - 3\gamma)}{2} \cdot \frac{u_*^2}{U_{00}^2}, \quad (19)$$

где U_{00} — скорость детонации без учета турбулентности.

Из (19) видно, что величина поправки лежит в пределах точности эксперимента. Изменения плотности и давления более значительны из-за касательной природы решения. Из равенств (5) и (7), пренебрегая членами порядка $\frac{u^2}{U_{00}^2}$, получаем

$$\sigma_A - \sigma_{00} \simeq \sqrt{\frac{(5 - 3\gamma) u_*^2}{(\gamma + 1) U_{00}^2}} = 6,2 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_{00}} \simeq 1,1; \quad \frac{\pi_{00} - \pi_A}{\pi_{00}} \simeq \frac{\sigma_A - \sigma_{00}}{1 - \sigma_{00}} = 0,15,$$

здесь А — относится к конечному состоянию, лежащему на адиабате, соответствующей затухшей турбулентности, 00 — к состоянию, соответствующему точке Жуге той же адиабаты.

Таким образом, при турбулентном течении за детонационной волной скорость детонации больше, чем при обычном течении. Плотность и давление в конечном состоянии (затухшая турбулентность и закончившаяся реакция) меньше плотности и давления, соответствующих точке Чепмена — Жуге для обычной детонационной адиабаты.

Поступила в редакцию
27/VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. D. R. White. Physics of Fluids, 1961, 4, 465.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
3. К. И. Шелкин, Я. К. Трошин. Combustion and Flame, 1963, 7, 143.
4. К. И. Шелкин, Я. К. Трошин. Газодинамика горения. М., Изд-во АН СССР, 1963.