

УДК 539.3:534.26

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ТЕРМОУПРУГОМ ШАРЕ С ДИСКРЕТНО-НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Н. В. Ларин

Тульский государственный университет, 300012 Тула, Россия  
E-mail: Larinaelen@mail.ru

С использованием уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости однородного изотропного тела получено аналитическое решение задачи о дифракции плоской монохроматической звуковой волны на шаре с покрытием из нескольких сферических слоев. Приведены результаты расчетов частотной и угловой характеристик амплитуды рассеянного акустического поля для шара с многослойным покрытием и покрытием с непрерывной по толщине неоднородностью. Показано, что непрерывно-неоднородное термоупругое покрытие можно моделировать системой однородных термоупругих слоев. Исследовано влияние термоупругости материалов, из которых изготовлены шар и его дискретно-неоднородное покрытие, на рассеяние звука.

**Ключевые слова:** дифракция звука, термоупругий шар, неоднородный термоупругий слой.

DOI: 10.15372/PMTF20180607

**Введение.** Задачи о дифракции звуковых волн на неоднородных упругих телах сферической формы рассматривались в ряде работ. В [1] решена задача о дифракции плоской звуковой волны на системе однородных трансверсально-изотропных упругих сферических слоев. В [2] получено решение задачи о рассеянии звука неоднородной изотропной упругой сферой. В [3] исследовано рассеяние плоской звуковой волны непрерывно-неоднородным по толщине трансверсально-изотропным упругим сферическим слоем. В работах [4, 5] показана возможность изменения характеристик рассеянного упругим шаром акустического поля с помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного упругого сферического слоя. В [6] решена обратная задача о неоднородном покрытии упругого шара, обеспечивающем наименьшее звукоотражение. В указанных работах тепловые процессы в телах не учитывались. В [7] показано, что термоупругость материала сферического слоя может оказывать существенное влияние на рассеянное акустическое поле. В [8] решены прямая и обратная задачи о дифракции звука на термоупругом шаре с непрерывно-неоднородным термоупругим покрытием.

В настоящей работе решается задача о дифракции плоской звуковой волны на однородном термоупругом шаре с многослойным термоупругим покрытием, который граничит с невязкой теплопроводной жидкостью.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Тульского государственного университета (код проекта 2017-54ПУБЛ).

© Ларин Н. В., 2018

**Постановка задачи.** Рассмотрим однородный изотропный термоупругий шар радиусом  $r^{(0)}$ . Шар имеет покрытие из  $N$  концентрических однородных изотропных термоупругих сферических слоев с внешними радиусами  $r^{(1)} < r^{(2)} < \dots < r^{(N)}$ . Материал шара ( $m = 0$ ) и материал  $m$ -го слоя ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) имеют следующие характеристики: плотность  $\rho^{(m)}$ , упругие постоянные Ламе  $\lambda^{(m)}$ ,  $\mu^{(m)}$ , температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha_T^{(m)}$ , теплопроводность  $\lambda_T^{(m)}$ , объемную теплоемкость  $c_\varepsilon^{(m)}$ . Источники тепла в термоупругом теле отсутствуют.

Жидкость, окружающая тело, является невязкой теплопроводной и имеет равновесную плотность  $\rho_f$ , скорость звука  $c$ , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме  $\gamma$ , теплопроводность  $\lambda^T$ , температуропроводность  $\chi^T$ , коэффициент температурного расширения  $\alpha^T$ . Будем полагать, что в невозмущенном состоянии тело и жидкость имеют одинаковую постоянную температуру  $T_0$ .

Пусть из жидкости на шар с покрытием падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi = A \exp [i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)]$$

( $A$  — амплитуда волны;  $\mathbf{k}_1$  — волновой вектор;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор;  $\omega$  — круговая частота). Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  далее опускается. Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре шара. Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении  $\theta = 0$ . Тогда в сферической системе координат потенциал скоростей падающей волны можно представить в виде [9]

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), \quad \alpha_n = A i^n (2n + 1),$$

где  $k_1$  — волновое число звуковых волн в жидкости;  $j_n(x)$  — сферическая функция Бесселя порядка  $n$ ;  $P_n(x)$  — многочлен Лежандра степени  $n$ .

Определим рассеянные термоупругим телом и возбужденные в нем волновые поля.

**Решение задачи.** Вследствие осевой симметрии задачи и свойств материалов шара и покрытия искомые волновые поля не зависят от координаты  $\varphi$ .

Потенциалы скоростей рассеянных телом звуковых  $\Psi_1$  и тепловых  $\Psi_2$  волн являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi_q + k_q^2 \Psi_q = 0, \quad q = 1, 2,$$

где  $k_2$  — волновое число тепловых волн в жидкости. При этом в предположении, что  $\omega \chi^T / c^2 \ll 1$ , справедливы соотношения

$$k_1 = \frac{\omega}{c}, \quad k_2 = \eta^T (1 + i), \quad \eta^T = \left( \frac{\omega \gamma}{2 \chi^T} \right)^{1/2}.$$

С учетом условий излучения на бесконечности функции  $\Psi_1, \Psi_2$  будем искать в виде

$$\Psi_q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{qn} h_n(k_q r) P_n(\cos \theta), \quad q = 1, 2, \quad (1)$$

где  $h_n(x)$  — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ .

Определим волновые поля в шаре с покрытием на основе линейной связанной динамической задачи термоупругости [10]. Смещение частиц в шаре ( $m = 0$ ) и в  $m$ -м слое покрытия ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) представим в виде

$$\mathbf{u}^{(m)} = \text{grad} (\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) + \text{rot} \Phi_3^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

где каждый потенциал  $\Phi_1^{(m)}$ ,  $\Phi_2^{(m)}$ ,  $\Phi_3^{(m)}$  является решением уравнения Гельмгольца [11] в сферических координатах. В силу осевой симметрии задачи единственной отличной от нуля составляющей векторного потенциала  $\Phi_3^{(m)}$  является азимутальная составляющая  $\Phi_3^{(m)}$ . Тогда векторное уравнение Гельмгольца сводится к одному скалярному уравнению [12].

Функции  $\Phi_1^{(m)}$ ,  $\Phi_2^{(m)}$ ,  $\Phi_3^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(m)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [B_{1n}^{(m)} j_n(\varkappa_1^{(m)} r) + B_{2n}^{(m)} h_n(\varkappa_1^{(m)} r)] P_n(\cos \theta), \\ \Phi_2^{(m)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_{1n}^{(m)} j_n(\varkappa_2^{(m)} r) + C_{2n}^{(m)} h_n(\varkappa_2^{(m)} r)] P_n(\cos \theta), \\ \Phi_3^{(m)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [D_{1n}^{(m)} j_n(\varkappa_3^{(m)} r) + D_{2n}^{(m)} h_n(\varkappa_3^{(m)} r)] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\varkappa_q^{(m)}$  ( $q = 1, 2$ ),  $\varkappa_3^{(m)}$  — волновые числа продольных термоупругих и поперечных упругих волн соответственно [11]. При этом с учетом условия ограниченности функций  $\Phi_1^{(0)}$ ,  $\Phi_2^{(0)}$ ,  $\Phi_3^{(0)}$  имеем

$$B_{2n}^{(0)} = C_{2n}^{(0)} = D_{2n}^{(0)} = 0.$$

Коэффициенты  $A_{qn}$ ,  $B_{qn}^{(m)}$ ,  $C_{qn}^{(m)}$ ,  $D_{qn}^{(m)}$  ( $q = 1, 2$ ) в разложениях (1), (2) определяются из граничных условий.

На соприкасающейся с жидкостью поверхности сферического тела граничные условия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие отсутствия касательного напряжения, условие непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$r = r^{(N)}: \quad -i\omega u_r^{(N)} = v_r, \quad \sigma_{rr}^{(N)} = -p, \quad \sigma_{r\theta}^{(N)} = 0, \quad T^{(N)} = \Theta, \quad \lambda_T^{(N)} \frac{\partial T^{(N)}}{\partial r} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \quad (3)$$

На поверхностях, разделяющих термоупругие среды, составляющие вектора смещения частиц этих сред, нормальные и тангенциальные напряжения, температура и тепловой поток должны быть непрерывны:

$$\begin{aligned}r = r^{(m-1)}: \quad u_r^{(m-1)} &= u_r^{(m)}, \quad u_\theta^{(m-1)} = u_\theta^{(m)}, \quad \sigma_{rr}^{(m-1)} = \sigma_{rr}^{(m)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(m-1)} = \sigma_{r\theta}^{(m)}, \\ T^{(m-1)} &= T^{(m)}, \quad \lambda_T^{(m-1)} \frac{\partial T^{(m-1)}}{\partial r} = \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial r}, \quad m = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (4)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости  $v_r$ , акустическое давление  $p$  и акустическая температура  $\Theta$  определяются из выражений

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad p = i\omega \rho_f \psi, \quad \Theta = \frac{i}{\alpha T} \left( \frac{\omega \gamma}{c^2} \psi + \frac{1}{\omega} \Delta \psi \right), \quad \psi = \Psi + \Psi_1 + \Psi_2,$$

компоненты вектора смещения  $u_r^{(m)}$ ,  $u_\theta^{(m)}$  и возмущение температуры  $T^{(m)}$  в  $m$ -й термоупругой среде ( $m = 0, 1, \dots, N$ ) записываются с использованием функций  $\Phi_1^{(m)}$ ,  $\Phi_2^{(m)}$ ,  $\Phi_3^{(m)}$ :

$$u_r^{(m)} = \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi_3^{(m)}),$$

$$u_{\theta}^{(m)} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) - \frac{\partial}{\partial r} (r\Phi_3^{(m)}) \right], \quad (5)$$

$$T^{(m)} = \frac{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}}{(3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})\alpha_T^{(m)}} [k_l^{(m)2}(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) + \Delta(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)})],$$

где  $k_l^{(m)}$  — волновое число продольных упругих волн [11].

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}^{(m)}$ ,  $\sigma_{r\theta}^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ) связаны с величинами  $u_r^{(m)}$ ,  $u_{\theta}^{(m)}$ ,  $T^{(m)}$  соотношениями Дюгамеля — Неймана [10].

Для решения рассматриваемой задачи используем матричный метод [13].

Функции

$$\left( u_r^{(m)}, u_{\theta}^{(m)}, \sigma_{rr}^{(m)}, \sigma_{r\theta}^{(m)}, T^{(m)}, \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial r} \right) (r, \theta), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

будем искать в виде разложений

$$u_r^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{1n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta), \quad u_{\theta}^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}^{(m)}(r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta),$$

$$\sigma_{rr}^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{3n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{4n}^{(m)}(r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

$$T^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{5n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta), \quad \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}(r, \theta)}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{6n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta).$$

Для шара ( $m = 0$ ) и  $m$ -го слоя в покрытии ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) введем вектор смещения, напряжения, температуры

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r) = (S_{1n}^{(m)}(r), S_{2n}^{(m)}(r), S_{3n}^{(m)}(r), S_{4n}^{(m)}(r), S_{5n}^{(m)}(r), S_{6n}^{(m)}(r))^T$$

и вектор коэффициентов

$$\mathbf{K}_n^{(m)} = (B_{1n}^{(m)}, B_{2n}^{(m)}, C_{1n}^{(m)}, C_{2n}^{(m)}, D_{1n}^{(m)}, D_{2n}^{(m)})^T.$$

Связь между этими векторами определяется формулой

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r) = M_n^{(m)}(r) \mathbf{K}_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

где  $M_n^{(m)}(r)$  — матрица шестого порядка с элементами  $M_{kl,n}^{(m)} = M_{kl,n}^{(m)}(r)$  ( $r^{(m-1)} \leq r \leq r^{(m)}$ ,  $r^{(-1)} = 0$ ), выражения для которых можно получить с использованием формул (2), (5), (6) и соотношений Дюгамеля — Неймана (в настоящей работе эти выражения не приводятся ввиду громоздкости).

Рассмотрим произвольный  $m$ -й слой в покрытии ( $m = 1, 2, \dots, N$ ). На его границах при  $r = r^{(m-1)}$  и  $r = r^{(m)}$  из равенств (7) получаем соотношения

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m-1)}) = M_n^{(m)}(r^{(m-1)}) \mathbf{K}_n^{(m)}, \quad \mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m)}) = M_n^{(m)}(r^{(m)}) \mathbf{K}_n^{(m)}.$$

Поскольку внутри  $m$ -го слоя вектор  $\mathbf{K}_n^{(m)}$  не меняется, имеем

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m)}) = M_n^{(m)}(r^{(m)}) [M_n^{(m)}(r^{(m-1)})]^{-1} \mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m-1)}), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Подставляя выражения (6) в граничные условия (4) и используя условие ортогональности многочленов Лежандра, находим

$$\mathbf{S}_n^{(m-1)}(r^{(m-1)}) = \mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m-1)}), \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда соотношение (8) принимает вид

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m)}) = Q_n^{(m)} \mathbf{S}_n^{(m-1)}(r^{(m-1)}), \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

где  $Q_n^{(m)} = M_n^{(m)}(r^{(m)})[M_n^{(m)}(r^{(m-1)})]^{-1}$ .

Используя формулы (9) для каждого слоя, получаем соотношение

$$\mathbf{S}_n^{(N)}(r^{(N)}) = Q_n \mathbf{S}_n^{(0)}(r^{(0)}), \quad Q_n = Q_n^{(N)} Q_n^{(N-1)} \dots Q_n^{(1)}, \quad (10)$$

из которого следует

$$S_{kn}^{(N)}(r^{(N)}) = \sum_{l=1}^6 Q_{kl,n} S_{ln}^{(0)}(r^{(0)}), \quad k = 1, 3, 4, 5, 6 \quad (11)$$

( $Q_{kl,n}$  — элементы матрицы  $Q_n$ ). Равенство вторых компонент векторов в левой и правой частях соотношения (10) не учитывается, так как на границе раздела термоупругой среды и жидкости условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора смещения не выполняется.

Подставляя разложения (6) в граничные условия (3), находим

$$\begin{aligned} S_{1n}^{(N)}(r^{(N)}) &= i\omega^{-1}(Y_1\alpha_n + Y_{11}A_{1n} + Y_{12}A_{2n}), \\ S_{3n}^{(N)}(r^{(N)}) &= -i\omega\rho_f(Y_0\alpha_n + Y_{01}A_{1n} + Y_{02}A_{2n}), \quad S_{4n}^{(N)}(r^{(N)}) = 0, \\ S_{5n}^{(N)}(r^{(N)}) &= \xi_1 Y_0\alpha_n + \xi_1 Y_{01}A_{1n} + \xi_2 Y_{02}A_{2n}, \\ S_{6n}^{(N)}(r^{(N)}) &= \lambda^T(\xi_1 Y_1\alpha_n + \xi_1 Y_{11}A_{1n} + \xi_2 Y_{12}A_{2n}). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Y_0 &= j_n(k_1 r^{(N)}), \quad Y_1 = k_1 j_n'(k_1 r^{(N)}), \quad Y_{0q} = h_n(k_q r^{(N)}), \quad Y_{1q} = k_q h_n'(k_q r^{(N)}), \\ \xi_q &= \frac{i}{\alpha^T} \left( \frac{\omega\gamma}{c^2} - \frac{k_q^2}{\omega} \right), \quad q = 1, 2, \end{aligned}$$

штрих означает дифференцирование по аргументу.

Из равенств (7) при  $m = 0$ ,  $r = r^{(0)}$  следует

$$S_{ln}^{(0)}(r^{(0)}) = M_{l1,n}^{(0)}(r^{(0)})B_{1n}^{(0)} + M_{l3,n}^{(0)}(r^{(0)})C_{1n}^{(0)} + M_{l5,n}^{(0)}(r^{(0)})D_{1n}^{(0)}, \quad l = 1, 2, \dots, 6. \quad (13)$$

Подставляя выражения (12), (13) в равенства (11), получаем систему пяти линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $A_{1n}$ ,  $A_{2n}$ ,  $B_{1n}^{(0)}$ ,  $C_{1n}^{(0)}$ ,  $D_{1n}^{(0)}$ . Определив эти коэффициенты, можно аналитически описать волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

**Результаты расчетов.** Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента, из равенства (1) при  $q = 1$  находим

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{r^{(N)}}{2r} \exp(ik_1 r) F(\bar{\omega}, \theta), \quad F(\bar{\omega}, \theta) = \frac{2}{k_1 r^{(N)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} A_{1n} P_n(\cos \theta), \quad (14)$$

где  $\bar{\omega} = k_1 r^{(0)}$  — волновой размер шара без покрытия.

С использованием результатов расчетов амплитуды рассеяния звука  $|F(\bar{\omega}, \theta)|$  проведен вычислительный эксперимент, в котором непрерывно-неоднородное термоупругое сферическое покрытие с внутренним радиусом  $r^{(0)}$  и внешним радиусом  $r^{(N)}$  моделировалось

системой однородных термоупругих сферических слоев с различными значениями материальных констант. Ранее возможность подобного моделирования обсуждалась для случая непрерывно-неоднородного термоупругого плоского слоя [11] и непрерывно-неоднородных упругих покрытий цилиндрической [14] и сферической [12] формы. С математической точки зрения замена непрерывно-неоднородного покрытия многослойной системой эквивалентна аппроксимации непрерывных функций, описывающих физико-механические характеристики материала покрытия, кусочно-постоянными функциями.

Амплитуда рассеяния звука рассчитывалась для шара радиусом  $r^{(0)} = 1$  м с покрытием толщиной 0,1 м, находящегося в воде ( $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с,  $\gamma = 1,006$ ,  $\chi^T = 1,43 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha^T = 2,1 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>,  $\lambda^T = 0,59$  Вт/(м·К),  $T_0 = 293$  К). Амплитуда падающей волны полагалась равной единице. Рассматривался алюминиевый шар с покрытием из материала на основе полимера (поливинилбутираль). Физико-механические характеристики алюминия (величины с индексом “(0)”) и поливинилбутирала (величины с индексом “(\*)”) имели следующие значения: плотность  $\rho^{(0)} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho^{(*)} = 1070$  кг/м<sup>3</sup>, упругие постоянные Ламе  $\lambda^{(0)} = 5,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\lambda^{(*)} = 3,9 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup> и  $\mu^{(0)} = 2,6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu^{(*)} = 9,8 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha_T^{(0)} = 25,5 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>,  $\alpha_T^{(*)} = 2,30 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>, теплопроводность  $\lambda_T^{(0)} = 236$  Вт/(м·К),  $\lambda_T^{(*)} = 0,2$  Вт/(м·К), объемную теплоемкость  $c_\varepsilon^{(0)} = 2,3 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $c_\varepsilon^{(*)} = 1,2 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К).

Расчеты величины  $|F(\bar{\omega}, \theta)|$  проводились как для шара с покрытием из непрерывно-неоднородного материала, так и для шара с многослойным покрытием. В случае непрерывно-неоднородного покрытия расчеты выполнялись с использованием результатов, полученных в [8]. При этом рассматривалось покрытие, неоднородное по плотности:

$$\rho(r) = \rho^{(*)}(441,5 - 840r + 400r^2), \quad r^{(0)} \leq r \leq r^{(N)}.$$

В случае многослойного покрытия амплитуда рассеяния рассчитывалась для одинаковых по толщине однородных термоупругих слоев ( $N = 2, 4, 6$ ). Распределение плотности по толщине дискретно-слоистого материала покрытия определялось с помощью кусочно-постоянной аппроксимации функции  $\rho(r)$  на интервале  $[r^{(0)}, r^{(N)}]$ :

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \rho(r^{(0)} + r^{(1)})/2, & r^{(0)} \leq r \leq r^{(1)}, \\ \rho^{(m)} &= \rho(r^{(m-1)} + r^{(m)})/2, & r^{(m-1)} < r \leq r^{(m)}, \quad m = 2, 3, \dots, N, \end{aligned}$$

где  $r^{(m)} = r^{(0)} + mh_N$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ );  $h_N = (r^{(N)} - r^{(0)})/N$ . Остальные физико-механические характеристики этого материала при переходе от слоя к слою не менялись:

$$\lambda^{(m)} = \lambda^{(*)}, \quad \mu^{(m)} = \mu^{(*)}, \quad \alpha_T^{(m)} = \alpha_T^{(*)}, \quad \lambda_T^{(m)} = \lambda_T^{(*)}, \quad c_\varepsilon^{(m)} = c_\varepsilon^{(*)}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 1, где показаны зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$  при  $7 \leq \bar{\omega} \leq 12$  и полярная диаграмма направленности амплитуды  $|F(10, \theta)|$  в угловом секторе  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ .

При суммировании ряда (14) индекс  $n$  менялся до значения  $n = 2[\bar{\omega}] + 3$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа. Установлено, что для рассматриваемых значений частот и углов наблюдения увеличение  $n$  практически не влияет на результаты расчетов.

На рис. 1 видно, что с увеличением количества однородных слоев в многослойном покрытии зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового числа и от угла наблюдения для непрерывно-слоистого и дискретно-слоистого термоупругих материалов сближаются. Это свидетельствует о возможности моделирования непрерывно-неоднородного термоупругого сферического покрытия покрытием, состоящим из системы однородных термоупругих сферических слоев.

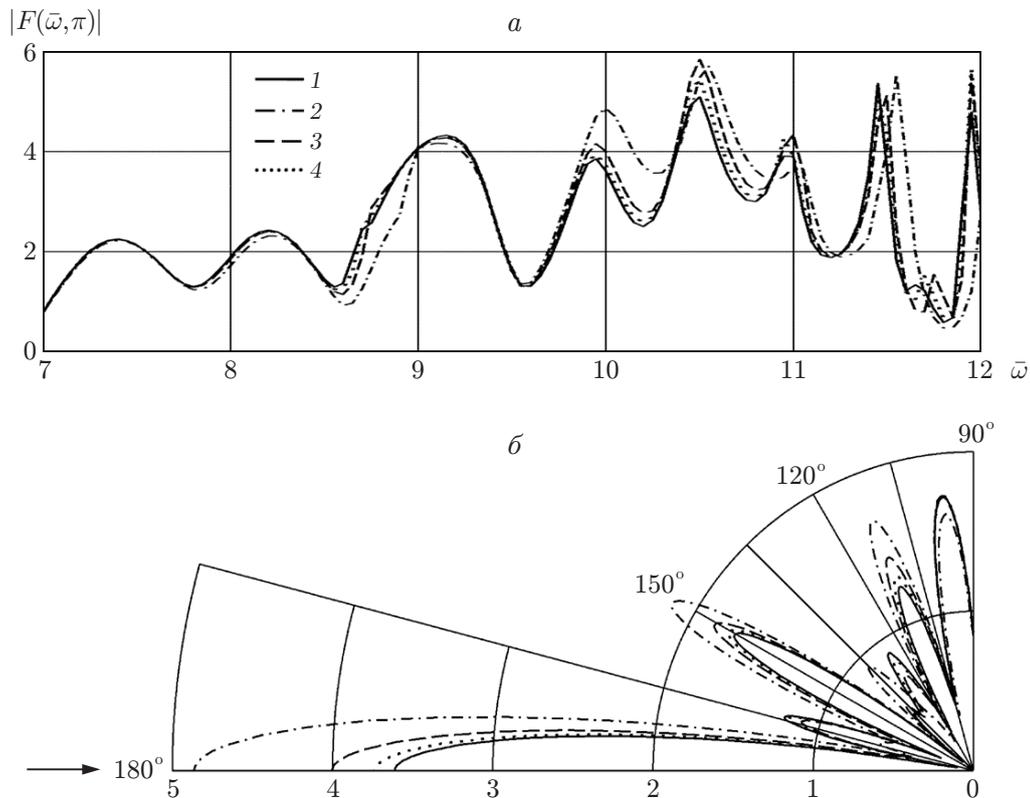


Рис. 1. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара (*а*) и полярная диаграмма направленности амплитуды рассеяния звука при  $\bar{\omega} = 10$  (*б*) для шара с покрытием из различных материалов:

1 — непрерывно-неоднородный термоупругий материал, 2–4 — дискретно-неоднородный материал с различным количеством однородных термоупругих слоев (2 —  $N = 2$ , 3 —  $N = 4$ , 4 —  $N = 6$ ); стрелка — направление распространения падающей плоской волны

Следует отметить, что в [12] предложен критерий подбора количества слоев в многослойном покрытии при моделировании с помощью него непрерывно-неоднородного покрытия с заданной точностью.

Представляет интерес оценить влияние термоупругости рассматриваемых материалов шара и его дискретно-неоднородного покрытия на рассеяние звука. Для этого следует провести сравнение характеристик рассеяния звука для термоупругого тела с соответствующими характеристиками, рассчитанными для такого же упругого тела при изотермическом процессе. В расчетах в качестве такого тела выбирался как шар без покрытия, так и шар с покрытием, состоящим из шести ( $N = 6$ ) слоев (рис. 2).

Заметим, что в случаях и упругого, и термоупругого тел наличие дискретно-слоистого полимерного покрытия у алюминиевого шара приводит как к увеличению количества экстремумов функции  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$  в исследуемом диапазоне волновых чисел  $7 \leq \bar{\omega} \leq 12$ , так и к увеличению ее значений в большинстве точек этого диапазона (см. рис. 2, *а*). Влияние покрытия проявляется также в изменении формы полярной диаграммы направленности  $|F(7.5, \theta)|$  при  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  (см. рис. 2, *б*). Например, при  $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi/3$  вместо одного “лепестка” образуются два, а при  $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$  вместо двух слабо выраженных “лепестков” появляются два отчетливо выраженных “лепестка”, причем в окрестности их максимумов значительно увеличивается амплитуда рассеяния.

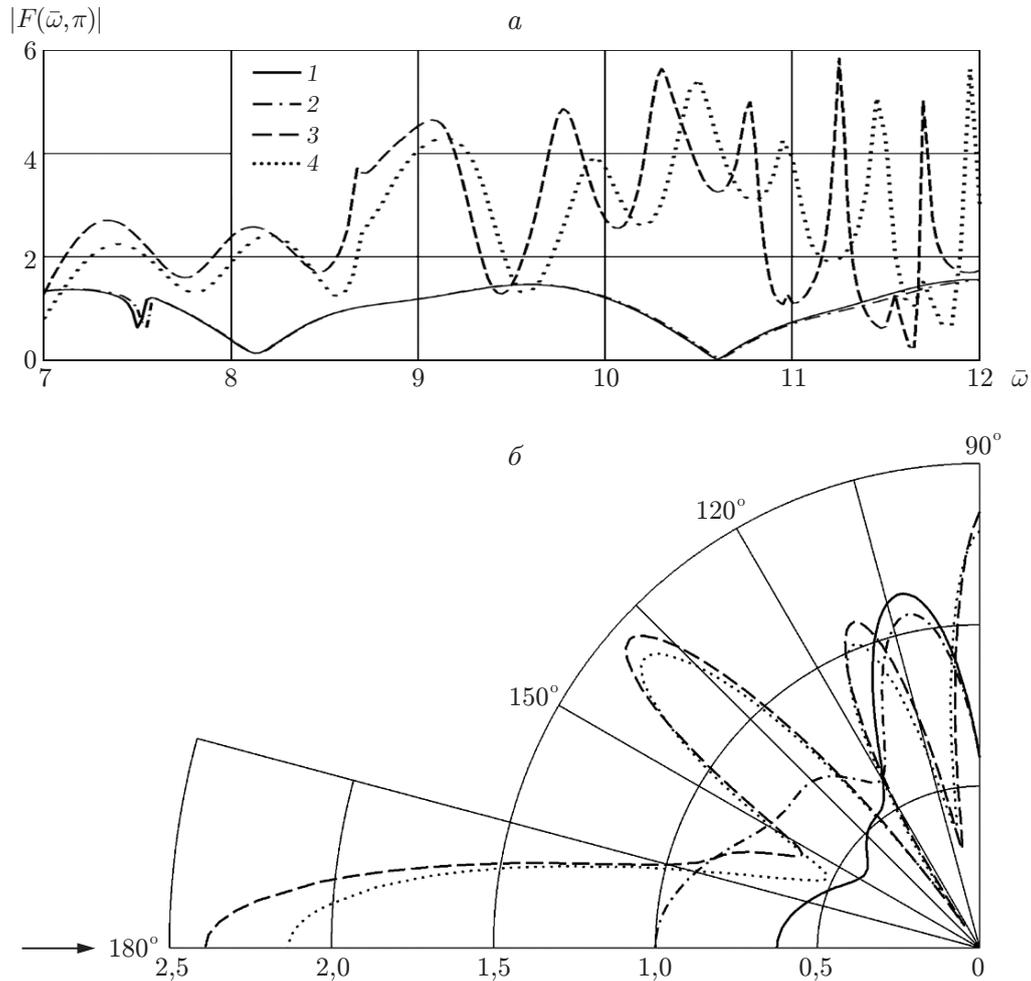


Рис. 2. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара (а) и полярная диаграмма направленности амплитуды рассеяния звука при  $\bar{\omega} = 7,5$  (б) для различных тел:

1, 2 — шар без покрытия (1 — упругий, 2 — термоупругий), 3 — упругий шар с дискретно-слоистым упругим покрытием, 4 — термоупругий шар с дискретно-слоистым термоупругим покрытием; стрелка — направление распространения падающей плоской волны

Сравнение зависимостей для шаров без покрытия (см. рис. 2, а) показывает, что для большинства исследуемых частот термоупругость алюминия оказывает незначительное влияние на обратное рассеяние звука. В то же время видно, что учет термоупругости в шаре из слоистого материала существенно влияет на величину  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$ . Следовательно, основной вклад в совместное влияние термоупругости материалов шара и его покрытия на рассеянное акустическое поле вносит термоупругость материала покрытия. Это можно объяснить тем, что в алюминии взаимовлияние полей деформации и температуры существенно слабее, чем в поливинилбутирале. Так, параметр связанности, определяемый выражением [10, 11]

$$\varepsilon^{(m)} = \frac{(3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})^2 \alpha_T^{(m)2} T_0}{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) c_\varepsilon^{(m)}}, \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

для алюминия ( $m = 0$ ) равен  $\varepsilon^{(0)} = 0,035$ , тогда как для поливинилбутирала его значение на порядок выше ( $\varepsilon^{(m)} = \varepsilon^{(*)} = 0,411$ ,  $m = 1, 2, \dots, 6$ ).

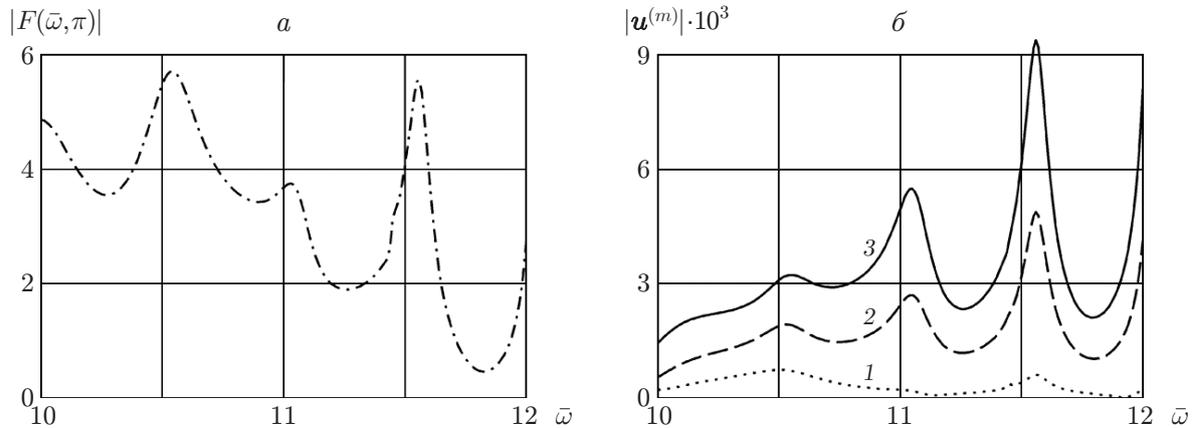


Рис. 3. Зависимости амплитуды обратного рассеяния звука (а) и амплитуды смещения на внешней поверхности  $m$ -го слоя при  $\theta = \pi$  (б) от волнового числа для термоупругого шара с двухслойным термоупругим покрытием:  
 1 —  $m = 0$ , 2 —  $m = 1$ , 3 —  $m = 2$

При некоторых значениях частот термоупругость алюминиевого шара может оказывать существенное влияние на рассеянное акустическое поле (см. рис. 2, б). Результаты расчетов показывают, что на частоте, соответствующей волновому числу  $\bar{\omega} = 7,5$ , учет термоупругости в шаре без покрытия приводит к увеличению почти на 30 % среднего значения амплитуды рассеяния в освещенной зоне и, в частности, к увеличению на 60 % амплитуды обратного рассеяния. На рис. 2, а видно, что в окрестности значения  $\bar{\omega} = 7,5$  функция  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$  в случае упругого шара без покрытия имеет отчетливо выраженный резонансный минимум [15].

Численные исследования влияния термоупругости материалов шара и его дискретно-неоднородного покрытия на рассеяние звука проводились также в случае, когда все параметры связанности одновременно принимали нулевые значения ( $\varepsilon^{(m)} = 0$ ,  $m = 0, 1, \dots, 6$ ), что соответствует описанию волновых полей в телах с помощью уравнений несвязанной динамической задачи термоупругости [10]. Результаты расчетов показывают, что в случае отсутствия термоупругой связи кривые для термоупругих тел совпадают с соответствующими кривыми для упругих тел. Это свидетельствует о том, что показанные на рис. 2 различия характеристик рассеяния звука термоупругими и упругими сферическими телами обусловлены связанностью полей деформации и температуры в телах.

В формировании рассеянного акустического поля участвуют колебания термоупругого слоистого шара. На рис. 3, а для термоупругого шара с двухслойным ( $N = 2$ ) термоупругим покрытием приведена зависимость  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$  при  $10 \leq \bar{\omega} \leq 12$ . На рис. 3, б для внешней поверхности  $m$ -го слоя этого тела ( $m = 0, 1, 2$ ; значение  $m = 0$  соответствует шару радиусом  $r^{(0)}$ ) представлена амплитудно-частотная характеристика смещения  $\mathbf{u}^{(m)}$ , рассчитанная при  $\theta = \pi$  для дальней зоны акустического поля. На рис. 3 видно, что в рассматриваемом диапазоне значений волнового числа резонансные максимумы функции  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$  достигаются приблизительно при тех же значениях  $\bar{\omega}$ , что и резонансные максимумы величины  $|\mathbf{u}^{(2)}|$ . Подобие форм кривых для  $|\mathbf{u}^{(1)}|$  и  $|\mathbf{u}^{(2)}|$  на рис. 3, б обусловлено тем, что в расчетах значение толщины покрытия полагалось малым по сравнению со значением радиуса шара без покрытия.

Собственные колебания (волны) термоупругого слоистого шара оказывают значительное влияние на его звукоотражающие свойства. Частоты собственных волн каждой моды являются корнями дисперсионного уравнения, полученного при решении задачи о коле-

баниях термоупругого слоистого шара со свободной от напряжений теплоизолированной поверхностью. При  $10 \leq \bar{\omega} \leq 12$  найдены три значения волнового числа ( $\bar{\omega} = 10,507; 11,034; 11,562$ ), соответствующие частотам собственных волн в термоупругом шаре с двухслойным термоупругим покрытием. Установлено, что резонансные частоты величины  $|F(\bar{\omega}, \pi)|$  расположены в окрестности частот собственных волн слоистого шара.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
2. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. О собственных частотах и формах колебаний радиально-слоистых упругих тел // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 6. С. 9–14.
3. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акуст. журн. 1995. Т. 41, № 6. С. 917–923.
4. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 519–526.
5. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикл. математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 663–673.
6. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Мат. моделирование. 2017. Т. 29, № 11. С. 89–98.
7. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 4. С. 645–654.
8. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом шаре с неоднородным покрытием // Сб. тр. 2-й Всерос. акуст. конф., совмещенной с 30-й сессией Российского акустического общества, Нижний Новгород, 6–9 июня 2017 г. Н. Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 2017. С. 1706–1711.
9. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968.
10. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970.
11. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 1. С. 108–116.
12. Толоконников Л. А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 699–707.
13. Бреховских Л. М. Акустика слоистых сред / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. М.: Наука, 1989.
14. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикл. математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 2. С. 242–250.
15. Vogt R. H., Neubauer W. G. Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 60, N 1. P. 15–22.

*Поступила в редакцию 6/XII 2017 г.,  
в окончательном варианте — 20/II 2018 г.*