УДК 532.542

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ КЭССОНА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ, ВЫЗВАННОЕ НЕКОАКСИАЛЬНЫМ ВРАЩЕНИЕМ ПОРИСТОГО ДИСКА И ОКРУЖАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Ш. Рафик*, М. Наваз**, М. Мустахсан*

* Исламский университет Бахавалпура, Бахавалпур, Пакистан
** Институт космических технологий, Исламабад, Пакистан
E-mails: sheenshahid@gmail.com, nawaz_d2006@yahoo.com, muhammad.mustahsan@iub.edu.pk

Исследуется течение жидкости Кэссона, вызванное некоаксиальным вращением диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости. Уравнение в частных производных приводится к безразмерной форме. С использованием преобразования Лапласа получено точное решение нелинейной краевой задачи. Вычислены сдвиговые напряжения на поверхности диска и определено установившееся распределение напряжений. Получены зависимости скоростей первичного и вторичного течений от безразмерных параметров задачи.

Ключевые слова: жидкость Кэссона, некоаксиальное вращение, пористая среда, напряжения сдвига.

DOI: 10.15372/PMTF20180405

Введение. Получение точных решений задач газогидродинамики очень важно, поскольку они используются для тестирования численных методов, а также широко используемых пакетов программ, таких как Mathematica, Maple, Matlab и др. После опубликования работы [1], в которой исследовалась задача о влиянии вращения Земли на океанические течения, были предложены различные методы построения точных решений таких задач. Обзор работ, в которых получены точные решения двумерных уравнений Навье — Стокса, приведен в [2]. Некоторые новые подходы к построению точных решений трехмерных уравнений переноса предложены в работе [3]. В работе [4] получен новый класс точных решений уравнений Эйлера. В [5] предложен новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Эйлера и Навье — Стокса. В работе [6] найдено аналитическое решение задачи Бенарда — Марангони об установившейся осесимметричной конвекции в вязкой несжимаемой жидкости. В ряде работ построены аналитические точные или приближенные решения задач о течении вязкой жидкости, вызванном вращением диска или цилиндра. Решения таких задач имеют большое прикладное значение. Имеется также небольшое количество исследований течения, вызванного некоаксиальным вращением диска и окружающей жидкости. В работе [7] с учетом теплового излучения решена задача о течении жидкости Кэссона и теплопереносе вблизи растягивающейся по экспоненциальному закону пористой поверхности. В [8] исследовалось течение, вызванное некоаксиальным вращением диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости при условии, что скорости их вращения различны. В [9] изучено течение вязкой жидкости, вызванное некоаксиальным вращением диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости, а также получено аналитическое решение в безразмерных переменных.

В [10] найдено точное решение задачи о течении жидкости, вызванном некоаксиальным вращением пористого диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости. В работе [11] рассмотрена задача о неустановившемся течении жидкости, обусловленном некоаксиальным вращением пористого диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости. В [12] решена задача о течении, вызванном эксцентрическим вращением двух дисков, и исследовано влияние пористости среды на течение. В [13] изучалось влияние магнитного поля на течение жидкости Олдройда между двумя эксцентрически вращающимися дисками. В [14] исследовалось течение вязкой жидкости, вызванное вращением диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости, погруженной в пористую среду. В [15] изучалось течение магнитогидродинамической неньютоновской жидкости, обусловленное некоаксиальным вращением диска и вращением на бесконечности окружающей жидкости. В [16] исследовалось влияние эффекта Холла на неустановившееся течение, вызванное некоаксиальным вращением жидкости на бесконечности. Теплоперенос в магнитогидродинамическом неустановившемся потоке, обусловленном эксцентрическим вращением диска и жидкости на бесконечности, изучался в работе [17]. В [18] получено точное решение задачи о неустановившемся течении, вызванном некоаксиальным вращением диска и вращением жидкости на бесконечности. Аналогичная задача для случая пористого диска решалась в работе [19].

В данной работе проводится исследование течения жидкости Кэссона, вызванного некоаксиальным вращением диска и вращением жидкости на бесконечности, обобщающее результаты [19].

1. Постановка задачи. Тензор напряжений для несжимаемой жидкости Кэссона (неньютоновской жидкости) определяется следующим образом [7]:

$$\tau = -pI + (1 + \beta^{-1})A_1.$$

Здесь p — давление; I — единичный тензор; A_1 — первый тензор Ривлина — Эриксона; β — параметр жидкости Кэссона. Рассматривается жидкость Кэссона, заполняющая полупространство $z > 0$ и ограниченная бесконечным пористым диском, расположенным в плоскости $z = 0$. Оси вращения диска и жидкости расположены в плоскости $x = 0$. Расстояние между осями вращения равно l. Первоначально (при $t = 0$) диск и жидкость на бесконечности вращаются вокруг оси z с одной и той же постоянной скоростью. При $t > 0$ диск внезапно начинает вращаться вокруг оси, расположенной на расстоянии l от оси z, с постоянной скоростью Ω, а жидкость на бесконечности продолжает вращаться вокруг оси z с той же угловой скоростью, что и диск.

2. Математическая формулировка задачи. Поле скоростей задается формулой

$$\boldsymbol{V} = [-\Omega y + f(z,t),\ \Omega x + g(z,t),\ -w_0]. \qquad (1)$$

Такое поле скоростей в случае некоаксиального вращения диска рассматривалось в работах [11, 14, 16, 18, 19].

Исследуемое течение жидкости Кэссона описывается уравнениями

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0,$$
$$\rho\Big(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\Big) = -\nabla p + \mu\Big(1 + \frac{1}{\beta}\Big)\nabla^2\boldsymbol{V} - \frac{\mu}{K}\,\boldsymbol{V}. \qquad (2)$$

Подставляя выражение для скорости (1) в уравнения (2), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} - w_0\,\frac{\partial f}{\partial z} - \Omega g = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \Omega^2 x + \frac{\mu\Omega}{\rho K}\,y + \nu\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\rho K}\,f,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} - w_0\,\frac{\partial g}{\partial z} + \Omega f = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \Omega^2 y - \frac{\mu\Omega}{\rho K}\,x + \nu\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\rho K}\,g.$$

Начальные и граничные условия записываются в виде

$$u = -\Omega(y-l), \quad v = \Omega x, \quad w = -w_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad z > 0,$$
$$u = -\Omega y, \quad v = \Omega x, \quad w = -w_0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad t > 0,$$
$$u = -\Omega(y-l), \quad v = \Omega x, \quad w = -w_0 \quad \text{при} \quad z \to \infty \quad \forall t.$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости в направлениях осей x, y, z соответственно; значения $w_0 > 0$ соответствуют отсосу, $w_0 < 0$ — вдуву; ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость жидкости; ν — кинематическая вязкость; p — давление; K — проницаемость среды.

Исключая давление из второго уравнения (2) [11, 14, 16, 18, 19], получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial t} - w_0\,\frac{\partial f}{\partial z} - \Omega g = \nu\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\rho K}\,f(\Omega l - f),\\
\frac{\partial g}{\partial t} - w_0\,\frac{\partial g}{\partial z} - \Omega(\Omega l - f) = \nu\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\rho K}\,g;\\
f(z,0) = \Omega l, \quad g(z,0) = 0 \quad \text{при} \quad z \geqslant 0,\\
f(0,t) = 0, \quad g(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,\\
f(\infty,t) = \Omega l, \quad g(\infty,t) = 0 \quad \forall t.
\end{gathered} \tag{3}$$

Вводя безразмерные переменные

$$\eta = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\,z, \quad \tau = \Omega t, \quad S = \frac{w_0}{2\sqrt{\Omega\nu}}, \quad \sigma = \frac{K\Omega}{\nu},$$

уравнения (3) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial \tau} - \sqrt{2}\,S\,\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \Big(\frac{1}{\sigma} + i\Big)F = 0,\\
F(\eta,0) = 0, \quad F(0,\tau) = -1, \quad F(\infty,\tau) = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$F = (f + ig)/(\Omega l) - 1.$$

Применяя преобразование Лапласа к краевой задаче (4), получаем

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{d^2\bar F}{d\eta^2} + \sqrt{2}\,S\,\frac{d\bar F}{d\eta} - \Big(\frac{1}{\sigma} + i + p\Big)\bar F = 0,\\
\bar F(0,p) = -1/p, \qquad \bar F(\infty,p) = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где p — параметр преобразования Лапласа. Решение краевой задачи (5) записывается в виде

$$\bar F(\eta,p) = -\frac{1}{p}\exp\Big[-\Big(\frac{\sqrt{2}\,S}{1+1/\beta} + \sqrt{ap+b}\,\eta\Big)\Big], \tag{6}$$

где

$$a = 2/(1+1/\beta), \qquad b = 2(S^2 + 1/\sigma + i)/(1+1/\beta)^2.$$

Применяя обратное преобразование к уравнению (6), получаем

$$\frac{f+ig}{\Omega l} = 1 - \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{\sqrt{2}\,S}{1+1/\beta}\,\eta\Big)\times$$
$$\times\Big[\mathrm{e}^{(\alpha_1+i\beta_1)\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{(1+1/\beta)\tau}} + (\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\tau}{2}}\Big) +$$
$$+\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+i\beta_1)\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{(1+1/\beta)\tau}} - (\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\tau}{2}}\Big)\Big], \qquad (7)$$

где

$$\alpha_1 = \Big(\frac{(S^2+1/\sigma)(1+1/\beta)^2 + \sqrt{(S^2+1/\sigma)^2(1+1/\beta)^4+1}}{(1+1/\beta)^4}\Big)^{1/2},$$
$$\beta_1 = \Big(-\frac{(S^2+1/\sigma)(1+1/\beta)^2 + \sqrt{(S^2+1/\sigma)^2(1+1/\beta)^4+1}}{(1+1/\beta)^4}\Big)^{1/2}. \qquad (8)$$

При $\beta \to \infty$ краевая задача (4) сводится к задаче, рассмотренной в [19]. Следует отметить также, что при $\beta \to \infty$ формулы (7), (8) переходят в формулы, представляющие собой решение задачи в случае ньютоновской жидкости:

$$\frac{f+ig}{\Omega l} = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,S\eta}\Big[\mathrm{e}^{(\alpha_1+i\beta_1)\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{\tau}} + (\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\Big) +$$
$$+\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+i\beta_1)\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{\tau}} - (\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\Big)\Big], \qquad (9)$$

$$\alpha_1 = \Big(\Big(S^2+\frac{1}{\sigma}\Big) + \sqrt{\Big(S^2+\frac{1}{\sigma}\Big)^2+1}\Big)^{1/2}, \quad \beta_1 = \Big(-\Big(S^2+\frac{1}{\sigma}\Big) - \sqrt{\Big(S^2+\frac{1}{\sigma}\Big)^2+1}\Big)^{1/2}.$$

Таким образом, решение, полученное в работе [19], является частным случаем решения, полученного в данной работе. Следует отметить, что параметр $S = w_0/(2\sqrt{\Omega\nu})$ описывает как случай отсоса, так и случай вдува. Из неравенства $S > 0$ следует, что $w_0 > 0$. Этот случай соответствует отсосу жидкости. Неравенство $S < 0$ выполняется только при $w_0 < 0$. Этот случай соответствует вдуву жидкости в поток. Если поры в диске отсутствуют, то $w_0 = 0$ и, следовательно, $S = 0$. При $S = 0$ формулы (9) переходят в формулы, описывающие решение для случая непроницаемого диска:

$$\frac{f+ig}{\Omega l} = 1 - \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{(\alpha_1+i\beta_1)\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{\tau}} + (\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\Big) +$$
$$+\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+i\beta_1)\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{2}{\tau}} - (\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\Big)\Big]. \qquad (10)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \Big(\frac{1}{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}+1}\Big)^{1/2}, \qquad \beta_1 = \Big(-\frac{1}{\sigma} - \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}+1}\Big)^{1/2},$$

$\sigma = K\Omega/\nu$ — параметр пористости среды. Значения $K \to \infty$ соответствуют случаю отсутствия пористой среды. При $K \to \infty$ $\sigma \to \infty$. При $\sigma \to \infty$ и $\beta \to \infty$ решение (7), (8) сводится к решению, полученному в работе [10]. Полагая в формуле (10) $\tau \to \infty$, получаем решение для случая установившегося течения

$$\frac{f+ig}{\Omega l} = 1 - \exp\Big[-\Big(\frac{\sqrt{2}\,S}{1+1/\beta} + \alpha_1 + i\beta_1\Big)\eta\Big].$$

3. Результаты исследования и их обсуждение. Исследуем зависимость полученного решения задачи от различных безразмерных параметров. Напряжения сдвига на поверхности диска ($\eta = 0$) и напряжения в установившемся течении ($\tau \to \infty$) определяются по формуле

$$\tau_{Sx} + i\tau_{Sy} = \frac{S}{\sqrt{2}\,(1+1/\beta)}\Big[\operatorname{erfc}\Big(-\frac{(\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{(1+1/\beta)\tau}}{\sqrt{2}}\Big) + \\ + \operatorname{erfc}\Big(\frac{(\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{(1+1/\beta)\tau}}{\sqrt{2}}\Big)\Big] + \\ + \frac{1}{2}\Big[2\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+i\beta_1)^2/2}\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)^2\sqrt{\frac{2}{\pi\tau(1+1/\beta)}} - \\ - (-\alpha_1 - i\beta_1)\operatorname{erfc}\Big(-\frac{(\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{(1+1/\beta)\tau}}{\sqrt{2}}\Big) - \\ - (\alpha_1+i\beta_1)\operatorname{erfc}\Big(\frac{(\alpha_1+i\beta_1)\sqrt{(1+1/\beta)\tau}}{\sqrt{2}}\Big)\Big].$$

На рис. 1 приведена зависимость безразмерной скорости первичного течения $f/(\Omega l)$ от параметра η при различных значениях параметра S. При $S > 0$ (в случае отсоса) скорость первичного течения больше, чем в случае $S = 0$ (в случае непроницаемого диска), а при $S < 0$ (в случае вдува) — меньше. На рис. 2 представлена зависимость безразмерной скорости вторичного течения $g/(\Omega l)$ от параметра η при различных значениях параметра S. При $S > 0$ (в случае отсоса) скорость вторичного течения меньше, чем в случае $S = 0$ (в случае непроницаемого диска), а при $S < 0$ (в случае вдува) — больше. Такое соотношение скоростей первичного и вторичного течений следует из закона сохранения массы.

На рис. 3 приведена зависимость безразмерной скорости первичного течения от координаты η в различные моменты времени τ. С увеличением времени τ безразмерная скорость первичного течения уменьшается. Это означает, что в неустановившемся потоке скорость первичного течения больше, чем в установившемся. Безразмерная скорость вторичного течения увеличивается с увеличением времени τ (рис. 4). На рис. 5, 6 представлены зависимости скоростей первичного и вторичного течений от параметра η при различных значениях параметра β. Видно, что с увеличением параметра β скорости первичного и вторичного течений увеличиваются. На рис. 7, 8 приведены зависимости скоростей первичного и вторичного течений от параметра η при различных значениях параметра пористости σ.

Заключение. Аналитически исследовано течение жидкости Кэссона (неньютоновской жидкости), вызванное вращением пористого диска и окружающей жидкости. На основе полученного аналитического решения исследовано влияние на течение отсоса и вдува жидкости в поток, а также влияние параметра жидкости Кэссона на скорость течения. Показано, что скорость ньютоновской жидкости больше скорости жидкости Кэссона. Установлено, что полученные ранее решения являются частными случаями решения, найденного в данной работе. В результате исследования влияния на течение параметра пористости среды обнаружено, что с увеличением параметра пористости скорость вторичного

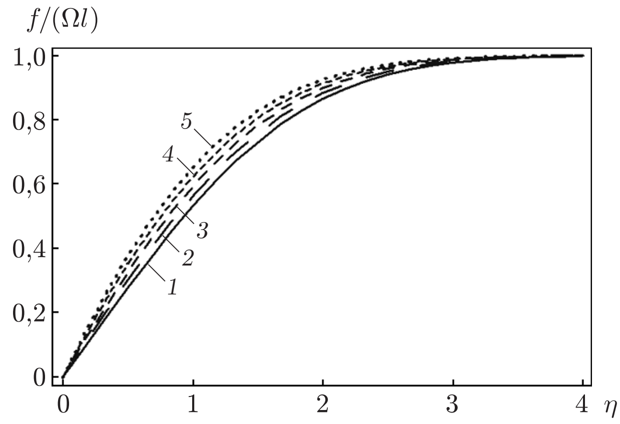

Рис. 1

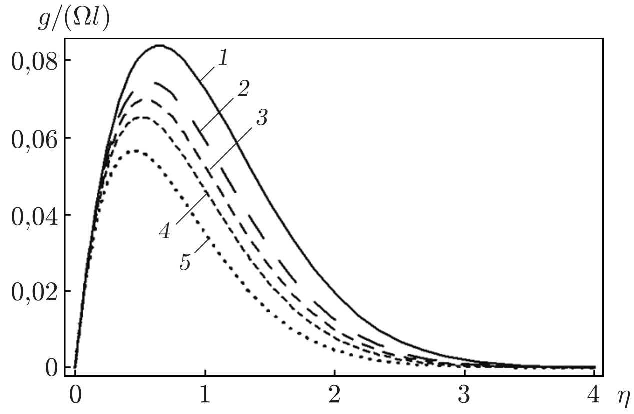

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость скорости первичного течения от параметра η при $\tau = 0{,}2$, $\beta = 0{,}4$, $\sigma = 0{,}2$ и различных значениях параметра S:
1 — $S = -0{,}8$, *2* — $S = -0{,}4$, *3* — $S = 0$, *4* — $S = 0{,}4$, *5* — $S = 0{,}8$

Рис. 2. Зависимость скорости вторичного течения от параметра η при $\tau = 0{,}9$, $\beta = 0{,}6$, $\sigma = 0{,}8$ и различных значениях параметра S:
1 — $S = -0{,}3$, *2* — $S = -0{,}1$, *3* — $S = 0$, *4* — $S = 0{,}1$, *5* — $S = 0{,}3$

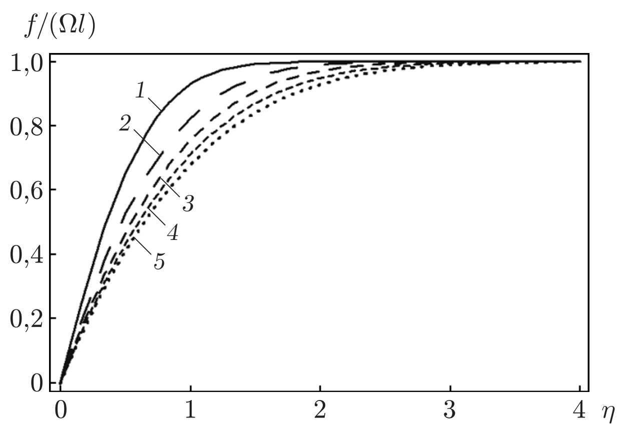

Рис. 3

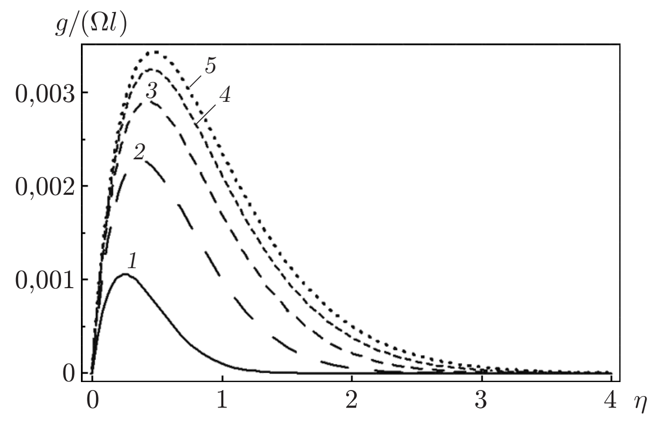

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость скорости первичного течения от параметра η при $S = 0{,}5$, $\beta = 0{,}4$, $\sigma = 0{,}5$ и различных значениях безразмерного времени τ:
1 — $\tau = 0{,}1$, *2* — $\tau = 0{,}2$, *3* — $\tau = 0{,}3$, *4* — $\tau = 0{,}4$, *5* — $\tau = 0{,}5$

Рис. 4. Зависимость скорости вторичного течения от параметра η при $S = 1{,}0$, $\beta = 0{,}7$, $\sigma = 0{,}2$ и различных значениях безразмерного времени τ:
1 — $\tau = 0{,}1$, *2* — $\tau = 0{,}3$, *3* — $\tau = 0{,}5$, *4* — $\tau = 0{,}7$, *5* — $\tau = 0{,}9$

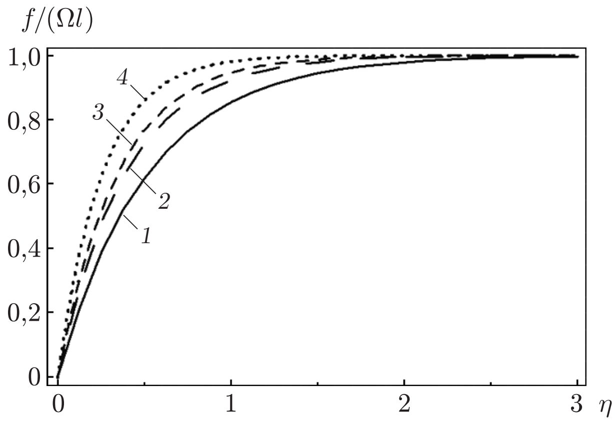

Рис. 5

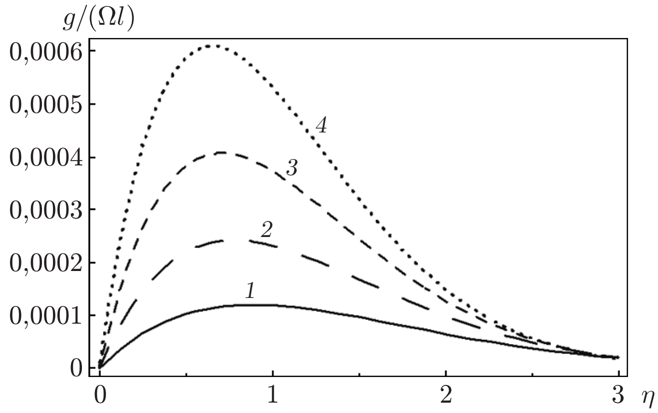

Рис. 6

Рис. 5. Зависимость скорости первичного течения от параметра η при $\tau = 5$, $S = 1$, $\sigma = 0{,}5$ и различных значениях параметра β:
1 — $\beta = 1$, *2* — $\beta = 2$, *3* — $\beta = 3$, *4* — $\beta = \infty$

Рис. 6. Зависимость скорости вторичного течения от параметра η при $\tau = 0{,}3$, $S = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$ и различных значениях параметра β:
1 — $\beta = 0{,}15$, *2* — $\beta = 0{,}20$, *3* — $\beta = 0{,}25$, *4* — $\beta = 0{,}30$

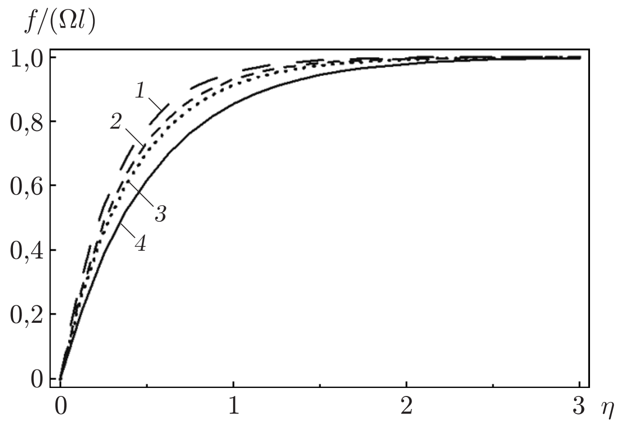

Рис. 7

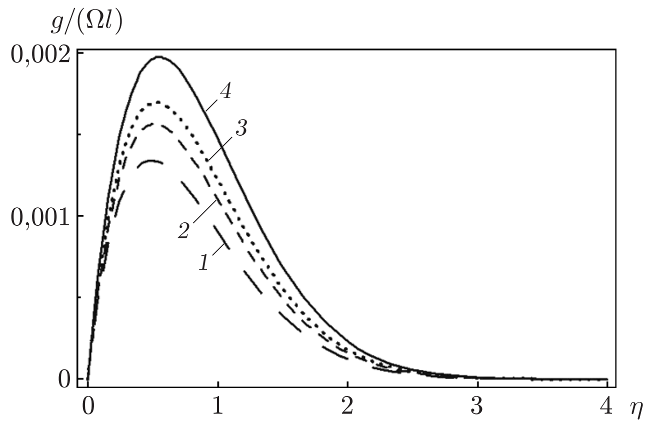

Рис. 8

Рис. 7. Зависимость скорости первичного течения от параметра η при $\tau = 5$, $S = 1$, $\beta = 0{,}5$ и различных значениях параметра σ:
1 — $\sigma = 0{,}10$, *2* — $\sigma = 0{,}15$, *3* — $\sigma = 0{,}20$, *4* — $\sigma = 0{,}50$

Рис. 8. Зависимость скорости вторичного течения от параметра η при $\tau = 0{,}3$, $S = 0{,}1$, $\beta = 0{,}2$ и различных значениях параметра σ:
1 — $\sigma = 0{,}10$, *2* — $\sigma = 0{,}15$, *3* — $\sigma = 0{,}20$, *4* — $\sigma = 0{,}50$

течения уменьшается, а скорость первичного течения увеличивается. Вдув и отсос оказывают противоположное влияние на течение. В случае вдува скорость вторичного течения для пористого диска больше скорости вторичного течения для непроницаемого диска.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ekman V. W.** On the influence of the earth's rotation on ocean-currents // Ark. Mat. Astronomi Fys. 1905. Bd 2, N 11. S. 1–52.
2. **Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D.** Exact solutions of the Navier — Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. Chem. Engng. 2009. V. 43, iss. 5. P. 642–662.
3. **Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu.** A new class of exact solutions for three dimensional thermal diffusion equations // Theor. Found. Chem. Engng. 2016. V. 50, iss. 3. P. 286–293.
4. **Aristov S. N., Polyanin A. D.** New classes of exact solutions of Euler equations // Dokl. Phys. 2008. V. 53, N 3. P. 166–171.
5. **Polyanin A. D., Aristov S. N.** A new method for constructing exact solutions to three dimensional Navier — Stokes and Euler equations // Theor. Found. Chem. Engng. 2011. V. 45, iss. 6. P. 885–890.
6. **Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu.** On one class of analytic solutions for steady state axisymmetric Benard — Marangoni convection in a viscous incompressible liquid // Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2013. Iss. 3. P. 110–118.
7. **Pramanik S.** Casson fluid flow and heat transfer past an exponentially porous stretching surface in presence of thermal radiation // Engng Phys. Math. 2014. V. 5, iss. 1. P. 205–212.
8. **Berker R.** Handbook of fluid dynamics. Berlin: Springer, 1963.
9. **Coirier J.** Rotations non-coaxial d'un disque et d'un fluid ăl'infini // J. Mech. 1972. V. 11. P. 317–340.
10. **Erdogan M. E.** Flow due to eccentric rotating a porous disk and a fluid at infinity // J. Appl. Mech. 1976. V. 43. P. 203–204.
11. **Erdogan M. E.** Flow due to non-coaxial rotations of porous disk and a fluid at infinity // Rev. Roumaine Sci. Tech. Ser. Méc. Appl. 1977. V. 22. P. 171–178.
12. **Erdogan M. E.** Unsteady viscous flow between eccentric rotating disks // Intern. J. Nonlinear Mech. 1995. V. 30. P. 711–717.
13. **Ersoy H. V.** MHD flow of an Oldroyd-B fluid between eccentric rotating disks // Intern. J. Engng Sci. 1999. V. 37. P. 1973–1984.
14. **Guria M., Manna G., Jana R. N., Pop I.** Flow due to non-coaxial rotations of permeable disk and a fluid at infinity through porous medium // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2007. V. 12. P. 965–974.
15. **Hayat T., Ellahi R., Asghar S.** Unsteady magnetohydrodynamic non-Newtonian flow due to non-coaxial rotations of disk and a fluid at infinity // Chem. Engng Comm. 2007. V. 194. P. 37–49.
16. **Hayat T., Ellahi R., Asghar S.** Hall effects on unsteady flow due to non-coaxially rotating disk and a fluid at infinity // Chem. Engng Comm. 2008. V. 195. P. 958–976.
17. **Murthy S. N., Ram R. P. K.** MHD fluid and heat transfer due to eccentric rotations of a porous disk and a fluid at infinity // Intern. J. Engng Sci. 1978. V. 16. P. 943–949.
18. **Pop I.** Unsteady flow due to non-coaxial rotating disk and a fluid at infinity // Bull. Tech. Univ. Istanbul. 1979. V. 32. P. 14–18.
19. **Maji S. L., Manna G., Jana R. N.** Unsteady flow due to non-coaxial rotations of a porous disk and a fluid at infinity through medium // Chem. Engng Comm. 2010. V. 197. P. 791–803.

Поступила в редакцию 24/VIII 2017 г.,
в окончательном варианте — 18/X 2017 г.