

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ В УПРУГИХ
КАМЕРАХ СГОРАНИЯ

В. В. Болотин, В. Н. Москаленко, Ю. Н. Новицкий

(Москва)

Теоретическое изучение явления высокочастотной неустойчивости в жестких камерах сгорания содержится в работах [1-3]. Это явление объясняется взаимодействием процессов горения и колебаний продуктов сгорания в камере. Один из возможных механизмов возникновения высокочастотной неустойчивости рассмотрен в книге [3], в которой скорость горения представлена в виде запаздывающего функционала давления. При этом задача сводится к исследованию устойчивости некоторой распределенной автоколебательной системы с запаздыванием.

Если частоты колебаний продуктов сгорания сопоставимы с собственными частотами оболочки, образующей камеру сгорания, то следует ожидать влияния упругости стенок камеры на процесс горения. Возможны явления связанной упруго-акустической неустойчивости, в развитии которой значительную роль играют колебания стенки камеры. Поэтому эти явления особенно нежелательны с точки зрения вибрационной прочности камер сгорания.

В статье дается теория высокочастотной неустойчивости стационарного процесса горения с учетом упругих деформаций стенок камеры сгорания. В основу положен механизм вибрационного горения [1-3], согласно которому фронт горения считается сосредоточенным, а скачок скорости на фронте выражается через запаздывающий функционал давления. Течение продуктов сгорания предполагается одномерным и изэнтропическим, камера — цилиндрической. Деформации камеры описываются при помощи моментной теории оболочек. Обнаруживается существование дополнительных областей неустойчивости, порождаемых взаимодействием упругих колебаний стенок камеры и акустических колебаний продуктов сгорания. Исследуется влияние соотношения между упругими и акустическими частотами, а также влияние коэффициента конструкционного демпфирования в стенках камеры сгорания на устойчивость стационарного процесса горения. Рассмотренная задача трактуется как математическая модель для более сложных неосесимметричных задач, в которых упругие и акустические частоты могут иметь одинаковый порядок.

1. Рассмотрим процесс горения в цилиндрической камере радиуса R и длиной L . Будем исходить из следующих допущений: движение топлива и продуктов сгорания считается одномерным; фронт горения — плоским и сосредоточенным в сечении, отстоящем от распределительной головки на расстоянии x_0 ; скачок скорости на фронте горения выражается через запаздывающий функционал давления согласно [3]; возмущения, накладываемые на стационарный процесс горения, являются малыми; возмущения давления и скорости на входе в сопло ($x = L$) связаны между собой посредством акустической проводимости сопла; явления, происходящие в системе подачи, не влияют на внутрикамерные процессы; распределительная головка считается абсолютно жесткой; деформации камеры при предположении одномерности течения считаются осесимметричными и описываются при помощи моментной теории оболочек; силы конструкционного демпфирования считаются пропорциональными скорости.

Течение продуктов сгорания описывается уравнением движения, уравнением неразрывности и уравнением состояния

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u S) &= 0, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^x \end{aligned} \quad (1.1)$$

В этих уравнениях u — средняя скорость продуктов сгорания, ρ — плотность, p — давление, S — площадь поперечного сечения камеры, κ — показатель политропы, x — продольная координата, t — время, p_0 и ρ_0 — значение давления и плотности в стационарном потоке за фронтом горения.

Деформации стенок камеры при одномерном течении являются осесимметричными. Для их описания будем пользоваться моментной теорией оболочек. Учитывая силы инерции, а также силы конструкционного демпфирования, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \rho_c h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\varepsilon_v \rho_c h \frac{\partial v}{\partial t} \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \bar{p} - \rho_c h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\varepsilon_w \rho_c h \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь w — нормальный прогиб; v — продольное смещение; E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; D — цилиндрическая жесткость; h — толщина стенки; ρ_c — плотность материала оболочки, ε_v , ε_w — коэффициенты демпфирования в продольном и поперечном направлениях. Система уравнений (1.1), (1.2) будет замкнута, если добавить соотношение между S и w

$$S = \pi(R + w)^2 \quad (1.3)$$

Преобразуем уравнения (1.1) — (1.3) к безразмерному виду, взяв в качестве характерных параметров длину камеры L , скорость звука в стационарном потоке c_0 , время прохождения звуковой волны от головки до выхода из камеры T , а также давление p_0 и плотность ρ_0 . Введем следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{x}{L}, \quad \rho_* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p_* = \frac{p}{p_0}, \quad t_* = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{c_0} \\ u_* &= \frac{u}{c_0}, \quad S_* = \frac{S}{\pi R^2}, \quad w_* = \frac{w}{R}, \quad v_* = \frac{v}{L}, \quad c_0 = \left(\frac{\kappa p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \\ r_0 &= \frac{R}{L}, \quad \omega^{\circ 2} = \frac{L^2 E}{R^2 \rho_c c_0^2 (1-\nu^2)}, \quad \gamma^2 = \frac{R^2 h^2}{12 L^4} \\ \varepsilon_{v*} &= \frac{L \varepsilon_v}{c_0}, \quad \varepsilon_{w*} = \frac{L \varepsilon_w}{c_0}, \quad \mu = \frac{\rho_0 L^2}{\rho_c R h} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь ω° — параметр, пропорциональный отношению парциальной частоты безмоментной оболочки к частоте продольных колебаний продуктов сгорания в закрытой камере; параметр μr_0^2 — отношение массы продуктов сгорания, заполняющих камеру, к массе оболочки; γ характеризует отношение жесткости оболочки на изгиб к жесткости на растяжение. После введения безразмерных параметров (1.4) уравнения (1.1) — (1.3) примут вид (в дальнейшем звездочки у безразмерных величин опускаем)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = \rho^\kappa \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u S) &= 0, \quad S = (1 + w)^2 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\varepsilon_v \frac{\partial v}{\partial t} - \omega^{\circ 2} r_0^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon_w \frac{\partial w}{\partial t} + \omega^{\circ 2} w + \omega^{\circ 2} \gamma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \omega^{\circ 2} \nu \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\mu}{\kappa} p \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем различать невозмущенное движение, параметры которого не зависят от времени, и накладывающиеся на него малые возмущения. Невозмущенное движение характеризуется параметрами

$$\rho = 1, \quad p = 1, \quad w = w_0 = \mu (\omega^2 \kappa)^{-1}, \quad v = v_0 = 0$$

Безразмерная скорость u перед фронтом горения мала и может быть положена равной нулю, а за фронтом горения она постоянна и равна M . Невозмущенное состояние оболочки является безмоментным и удовлетворяет условиям

$$w = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad v = 0 \quad (x = 0; 1)$$

Составим уравнения в вариациях для возмущенного движения, полагая возмущения и их производные малыми. Положим

$$\rho = 1 + \rho', \quad p = 1 + p', \quad w = w_0 + w' \quad v = v' \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$u = u' \quad (0 \leq x < x_0), \quad u = M + u' \quad (x_0 < x \leq 1)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.5) после линеаризации и учета того, что $w_0 \ll 1$, получаем (штрихи у возмущений опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + M \delta_{k2} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial \rho_k}{\partial x} &= 0, \quad p_k = \kappa \rho_k \\ \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + M \delta_{k2} \frac{\partial \rho_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial x} + 2 \frac{\partial w_k}{\partial t} + 2M \delta_{k2} \frac{\partial w_k}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + 2\varepsilon_v \frac{\partial v_k}{\partial t} - \omega^2 r_0^2 \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + 2\varepsilon_w \frac{\partial w_k}{\partial t} + \omega^2 \left(w_k + \gamma^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + v \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) &= \mu \rho_k \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь δ_{kj} — символ Кронеккера. При этом индекс $k = 1$ соответствует области до фронта горения ($0 \leq x < x_0$), а индекс $k = 2$ — области за фронтом горения ($x_0 < x \leq 1$). Рассмотрим граничные условия

$$u_1 = 0, \quad w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = v_1 = 0 \quad (x = 0)$$

$$u_2 - MA[\rho_2] = 0, \quad w_2 = \frac{\partial w_2}{\partial x} = v_2 = 0 \quad (x = 1)$$

$$\rho_1 = \rho_2, \quad (u_2 - u_1) / M = \beta \kappa (\rho_1 - \rho_{1\tau}) - \rho_1, \quad w_1 = w_2, \quad v_1 = v_2 \quad (x = x_0)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \quad (x = x_0) \quad (1.7)$$

Первая группа этих условий означает, что на краях оболочки осуществляется заделка; возмущения скорости у распределительной головки равны нулю, а на выходе из камеры при гармонических колебаниях возмущение скорости связано с возмущением давления через акустический импеданс. В (1.7) A — оператор акустической проводимости сопла, вообще говоря, зависящий от геометрии сопла и приведенной частоты. Вторая группа условий соответствует фронту горения. Считается, что возмущения давления (плотности), а также деформации и силовые факторы возмущенного состояния оболочки непрерывны, а скачок скорости выражается через запаздывающий функционал [3]. Индекс τ означает, что эта величина берется для момента времени $t - \tau$, где τ — среднее время запаздывания. Константа β называется обычно показателем взаимодействия.

Исследование устойчивости стационарного процесса горения сведено, таким образом, к отысканию условий, при которых все решения системы (1.6) с граничными условиями (1.7) затухают во времени. Из уравнений (1.6)

легко получаются уравнения для исследования устойчивости процесса горения в случае, когда оболочка камеры работает как безмоментная оболочка ($\gamma^2 \lambda^2 \ll 1$, где λ — показатель изменяемости напряженно-деформированного состояния) или когда оболочка камеры абсолютно жесткая ($w \equiv 0, v \equiv 0$). Заметим, что использование уравнений безмоментной теории равносильно пренебрежению динамическими краевыми эффектами [4].

2. Для исследования устойчивости стационарного процесса горения решение системы (1.6) ищем в виде

$$u_k = U_k(x) e^{st}, \quad \rho_k = G_k(x) e^{st}, \quad w_k = W_k(x) e^{st}, \quad v_k = V_k(x) e^{st} \quad (2.1)$$

где s — характеристический показатель. Невозмущенное движение будет устойчивым, если все характеристические показатели рассматриваемой задачи лежат в левой полуплоскости. Подстановка (2.1) в (1.6) дает

$$\begin{aligned} sU_k + M\delta_{k2}U_k' + G_k' &= 0, \quad sG_k + M\delta_{k2}G_k' + U_k' + 2sW_k + 2M\delta_{k2}W_k' = 0 \\ (s^2 + 2\varepsilon_v s) V_k - \omega^2 r_0^2 (V_k'' + \nu W_k') &= 0 \\ (s^2 + 2\varepsilon_w s + \omega^2) W_k + \gamma^2 \omega^2 W_k^{IV} + \omega^2 \nu V_k' - \mu G_k &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Штрихами здесь обозначено дифференцирование по координате x . Граничные условия (1.7) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} U_1 = W_1 = W_1' = V_1 &= 0 \quad (x=0) \\ U_2 = \alpha M G_2, \quad W_2 = W_2' = V_2 &= 0 \quad (x=1) \\ \chi G_1 - (U_2 - U_1) / M = 0, \quad G_1 = G_2, \quad V_1 = V_2 &(x=x_0) \\ W_1 = W_2, \quad W_1' = W_2', \quad W_1'' = W_2'', \quad W_1''' = W_2''' &(x=x_0) \\ [\chi = \kappa\beta (1 - e^{-s\tau}) - 1, \quad \alpha = e^{-i\omega t} A [e^{i\omega t}]] & \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$[\chi = \kappa\beta (1 - e^{-s\tau}) - 1, \quad \alpha = e^{-i\omega t} A [e^{i\omega t}]] \quad (2.4)$$

Здесь α — акустическая проводимость сопла. Решение системы (2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} U_k &= \sum_{j=1}^8 A_{kj} \exp(l_{kj}x), \quad G_k = \sum_{j=1}^8 B_{kj} \exp(l_{kj}x) \\ W_k &= \sum_{j=1}^8 C_{kj} \exp(l_{kj}x), \quad V_k = \sum_{j=1}^8 D_{kj} \exp(l_{kj}x) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Характеристические показатели l_{kj} определяются из уравнений

$$\det \| a_{\lambda\mu}^{(k)} \| = 0 \quad (k=1, 2) \quad (\lambda, \mu=1, \dots, 4) \quad (2.6)$$

В этих уравнениях члены, не обращающиеся в нуль, равны

$$\begin{aligned} a_{11}^{(k)} = \bar{a}_{22}^{(k)} &= s + M\delta_{k2}l_k, \quad a_{12}^{(k)} = a_{21}^{(k)} = l_k \\ a_{23}^{(k)} &= 2a_{11}^{(k)}, \quad a_{32}^{(k)} = -\mu, \quad a_{33}^{(k)} = s^2 + 2\varepsilon_w s + \omega^2 + \gamma^2 \omega^2 l_k^4 \\ a_{34}^{(k)} &= \omega^2 \nu l_k, \quad \bar{a}_{43}^{(k)} = -r_0^2 \omega^2 \nu l_k, \quad \bar{a}_{44}^{(k)} = s^2 + 2\varepsilon_v s - r_0^2 \omega^2 l_k^2 \end{aligned}$$

Уравнения (2.6) представляют собой алгебраические уравнения восьмой степени. Постоянные интегрирования A, B, C, D могут быть выражены через 16 постоянных N_{kj} ($j=1, \dots, 8, k=1, 2$). Удовлетворяя граничным условиям (2.3), получаем систему 16 однородных линейных уравнений для определения постоянных N_{kj} . Для существования ненулевых решений для N_{kj} определитель этой системы должен быть равен нулю. Отсюда получаем уравнение для определения характеристических показателей s . Ввиду крайней громоздкости этого уравнения выписывать его не будем. В дальнейшем приведем некоторые частные случаи этого уравнения.

Удобными параметрами, характеризующими процесс горения, являются среднее время запаздывания τ и показатель взаимодействия β . Поэтому для отыскания области неустойчивости отобразим мнимую ось плоскости комплексного переменного на плоскость действительных переменных τ, β . Для этого решим уравнение для характеристических показателей относительно параметра χ . Полагая $s = i\omega$ и разделяя действительную и мнимую части с учетом (2.5), получаем

$$\beta\chi(1 - \cos \omega\tau) = f, \quad \beta\chi \sin \omega\tau = \varphi \quad (2.7)$$

Здесь $f - 1$ и φ — действительная и мнимая части выражения решения характеристического уравнения относительно χ после подстановки $s = i\omega$.

3. Выражения для f и φ в общем случае очень громоздки. Если $\nu = 0$, то уравнения для продольных и поперечных перемещений стенок камеры разделяются. В этом случае продольные колебания стенок камеры можно не учитывать, поскольку они не влияют на процесс горения.

Если камера достаточно длинная, то можно считать, что фронт горения расположен у распределительной головки, $x_0 = 0$. Наконец, если длина дозвуковой части сопла значительно меньше длины камеры, то для акустической проводимости сопла можно взять выражение $\alpha = (\kappa - 1) / 2$. При сделанных предположениях характеристическое уравнение для показателей s , разрешенное относительно параметра χ , имеет вид

$$\chi = \frac{1}{M} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \quad (3.1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ l_1 & \dots & l_6 \\ e^{l_1} & \dots & e^{l_6} \\ l_1 e^{l_1} & \dots & l_6 e^{l_6} \\ (a_1 - \alpha M b_1) e^{l_1} & \dots & (a_6 - \alpha M b_6) e^{l_6} \\ a_1 & \dots & a_6 \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

$$a_j = - \frac{i j}{(s + M l_j) \mu} (\gamma^2 \omega^2 l_j^4 + S_1), \quad b_j = - \frac{1}{i \mu} (\gamma^2 \omega^2 l_j^4 + S_1)$$

$$S_1 = s^2 + 2\varepsilon_\omega s + \omega^2$$

Определитель Δ_2 получается из Δ_1 заменой в последней строчке a на b с соответствующими индексами. Характеристические показатели l_j определяются из уравнения

$$\begin{aligned} \gamma^2 (m_6 l^6 + m_5 l^5 + m_4 l^4) + m_3 l^3 + m_2 l^2 + m_1 l + m_0 &= 0 \\ m_6 &= \omega^2 (M^2 - 1), \quad m_5 = 2\omega^2 M s \\ m_4 &= \omega^2 s^2, \quad m_3 = 0 \\ m_2 &= S_1 (M^2 - 1) + 2\mu M^2, \quad m_1 = 2M s (S_1 + 2\mu) \\ m_0 &= -\omega^2 (S_1 + 2\mu) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выражения для f и φ могут быть получены после подстановки в (3.2) и (3.3) $s = i\omega$ и деления в (3.1) действительной и мнимой частей.

В качестве другого частного случая рассмотрим задачу об устойчивости процесса горения при предположении, что деформации стенок камеры опи-

связываются безмоментной теорией оболочек. В этом случае вместо (3.1) получим

$$\chi = \frac{\Phi}{M} (1 + \text{th } \Phi i \omega) - \frac{2\Phi (\Phi - \alpha M)}{M [(\Phi + \alpha M) e^{(l_1 - l_2)(1 - x_0)} + (\Phi - \alpha M)]}$$

$$\Phi^2 = 1 + \frac{2\mu\kappa}{\omega^2 + 2\varepsilon i \omega - \omega^2}$$

$$l_1 = \frac{i\Phi\omega}{1 - M\Phi}, \quad l_2 = -\frac{i\Phi\omega}{1 + M\Phi} \tag{3.4}$$

Разделяя в (3.4) действительные и мнимые части с учетом $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ и $\Phi = \Phi_r + i\Phi_i$, получаем для f и φ явное выражение, которое ввиду громоздкости здесь не выписывается.

Формулы упрощаются, если считать, что фронт горения расположен у распределительной головки ($x_0 = 0$) и акустическая проводимость сопла равна $1/2 (\kappa - 1)$.

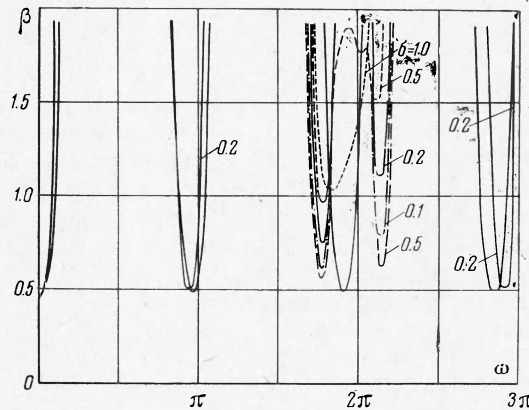
4. Зависимости (2.7) определяют в параметрической форме на плоскости τ, β некоторую кривую $F(\tau, \beta) = 0$, являющуюся образом мнимой оси на плоскости данных параметров. Отображение правой полуплоскости комплексного переменного на плоскость τ, β представляет собой многолистную поверхность.

Поэтому использование (2.7), помимо вычислительных трудностей, связано также с некоторыми принципиальными трудностями.

Во-первых, границам области неустойчивости соответствуют лишь некоторые отрезки кривой $F(\tau, \beta) = 0$. Возникает задача о выделении этих отрезков. Во-вторых, каждому листу поверхности, очевидно, соответствует определенный тип неустойчивости. Классификация листов по типам неустойчивости является совершенно необходимой для физического истолкования результатов и возможности их практического применения.

Отрезки кривой $F(\tau, \beta) = 0$, соответствующие границе области неустойчивости, можно выделить на основании следующих соображений. Нетрудно установить, что при $\beta = 0$ все характеристические показатели имеют отрицательные действительные части. Следовательно, невозмущенное движение будет оставаться устойчивым и в некоторой достаточно узкой полосе $0 \leq \beta < \beta_0(\tau)$. Значение $\beta_0(\tau)$ найдем, двигаясь от оси $\beta = 0$ в сторону положительных значений β до первого пересечения с кривой $F(\tau, \beta) = 0$, определяемой соотношением (2.7).

Многолистность поверхности, являющейся образом правой полуплоскости переменного s , имеет двойное происхождение. Во-первых, она порождается наличием бесконечного счетного множества собственных частот упруго-акустической системы. Во-вторых, многолистность связана с явлением, когда неустойчивость, обнаруженная при времени запаздывания τ , повторяется при других временах, отличающихся от τ , грубо говоря, на кратное число периодов собственных колебаний. Решая (2.7) относительно



Фиг. 1

β и τ , имеем

$$\beta = \frac{f^2 + \varphi^2}{2\kappa f} \quad (4.1)$$

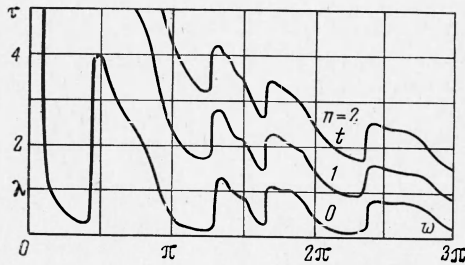
$$\tau = \frac{1}{\omega} \left\{ (2n_t + 1)\pi - \text{sign } \varphi \arccos \left(\frac{f}{\beta\varphi} - 1 \right) \right\} \quad (4.2)$$

$(n_t = 0, 1, 2, \dots)$

При этом n_t — число полных периодов колебаний, укладывающихся в изменяющуюся часть времени запаздывания.

Как видно из формулы (4.1) и выражений для f и φ , показатель взаимодействия является однозначной колеблющейся функцией частоты ω . При абсолютно жесткой камере ($w \equiv 0, v \equiv 0$) имеется бесчисленное множество минимумов, лежащих вблизи частот $\omega = n_x \pi$, где $n_x = 0, 1, 2, \dots$ (фиг. 1). Числа n_x характеризуют форму колебаний — число узлов вдоль длины L .

На фиг. 1 зависимости $\beta(\omega)$ для данного случая соответствуют сплошные жирные кривые.

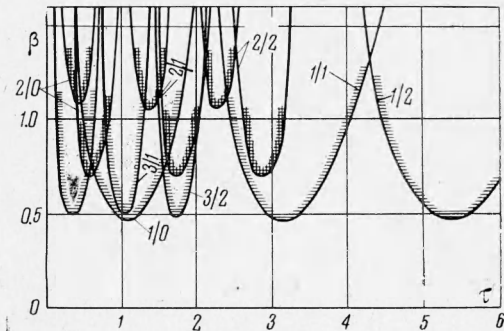


Фиг. 2

В случае упругих стенок картина становится более сложной. Однако податливость стенок оказывает влияние лишь вблизи частот ω , близких к парциальным частотам собственных колебаний оболочки.

В окрестности собственной парциальной частоты оболочки будут лежать частоты связанных упруго-акустических колебаний. Наличие последних приводит к появлению дополнительных минимумов у зависимости $\beta(\omega)$. Количество возбуждаемых упруго-акустических форм колебаний будет существенно зависеть от величины конструкционного демпфирования и соотношения парциальных частот оболочки и продуктов сторания.

Как было указано выше, второй причиной многолистности области неустойчивости является неоднозначность зависимости $\tau(\omega)$, определяемой (4.2). Чтобы построить области неустойчивости на плоскости τ, β , необходимо воспользоваться формулами (4.1), (4.2). Каждому листу области неустойчивости приписывается два индекса n_x и n_t , один из которых характеризует форму колебаний, другой — количество периодов колебаний, которое содержится во времени τ .



Фиг. 3

5. Остановимся на обсуждении численных результатов. Для случая безмоментной оболочки были произведены вычисления по формулам (3.4), (4.1), (4.2) при следующих данных: $x_0 = 0, \kappa = 1.2, M = 0.213, \alpha = 0.1, \mu = 0.5, \omega^0 = 2\pi; 3/2\pi, \delta = 2\pi v/\omega^0 = 0 \div 1$. Результаты вычислений представлены на фиг. 1—3. На фиг. 1 показаны зависимости $\beta(\omega)$ для $\omega^0 = 2\pi$ при различных значениях декремента δ . Приведенные графики показывают, что в случае упругой камеры появляются дополнительные петли, соответствующие связанным упруго-акустическим колебаниям. При этом петли, расположенные вдали от ω^0 , почти не изменяют своей формы. Наиболее существенное

изменение зависимости показателя взаимодействия $\beta(\omega)$ происходит в случае совпадения парциальных частот собственных колебаний упругой оболочки и собственных колебаний продуктов сгорания в закрытой камере. В этом случае связанные упруго-акустические частоты наиболее отличаются от парциальных частот.

Влияние упругости стенок камеры оказывается менее заметным, если парциальная частота оболочки лежит в промежутке между акустическими частотами. Введение значительного демпфирования приводит к тому, что в этом случае упругость стенок камеры практически не оказывает влияния на процесс горения.

Заметим, что условие $\omega_f = n_x \pi$ в размерных величинах имеет вид $c/R = n_x \pi c_0/L$, где c — скорость продольных волн в материале стенок. При умеренных n_x это условие не выполняется. Таким образом, рассмотренная задача носит методический характер.

Характерный график зависимости времени запаздывания $\tau(\omega)$ приведен на фиг. 2 для $\omega^0 = 3/2\pi$, $\delta = 0,2$. Области неустойчивости на плоскости β, τ для $\omega^0 = 2\pi$, $\delta = 0,2$ показаны на фиг. 3. Область устойчивости располагается вблизи $\beta = 0$. Каждому листу области неустойчивости приписаны два значения n_x и n_t , характеризующие форму возбуждающихся колебаний и соотношение периода колебаний и времени запаздывания (на фиг. 3 и 4 значения n_x указаны в числителе, значения n_t — в знаменателе). Листы области неустойчивости, для которых частота ω не близка к ω^0 , остаются почти такими же, как в случае жестких стенок камеры. Листы, соответствующие связанным упруго-акустическим колебаниям, на фиг. 3 отмечены двойной штриховкой.

Для случая, когда деформации оболочки описываются моментной теорией, проведены вычисления при $\nu = 0$, $x_0 = 0$, $\alpha = 1/2$ ($\kappa = 1$). Для вычислений с использованием формул (3.1) — (3.3), (4.1), (4.2) была составлена программа для ЭВМ Минск-22. После ввода числовых данных для значений ω^0 , γ , ω и других параметров находились комплексные значения для коэффициентов характеристического уравнения (3.3) m_j . После нахождения корней характеристического уравнения вычислялись значения коэффициентов a_j , b_j и определителей Δ_1 и Δ_2 . Разделение действительных и мнимых частей приводило к определению f и φ , по которым находились, согласно формулам (4.1), (4.2), значения показателя взаимодействия β и времени запаздывания τ . После нахождения β и τ производилось изменение ω и цикл повторялся до некоторого заранее заданного значения ω_{\max} . Вычисления повторялись для других значений γ и, наконец, для другого значения ω^0 .

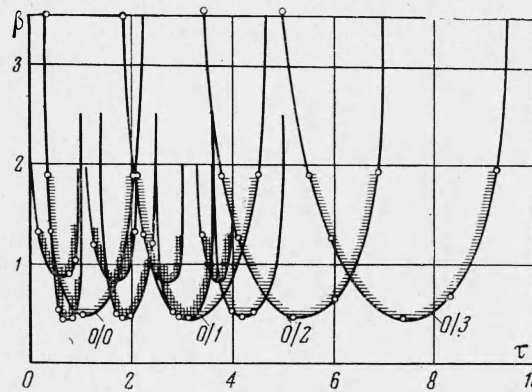
Особенностью вычислений в данном случае является произведение операции с комплексными числами на каждом этапе с использованием стандартных подпрограмм действия с комплексными числами.

На фиг. 4 показаны вычисленные точки и области неустойчивости на плоскости β, τ для $\nu = 0$, $x_0 = 0$, $\gamma = 0,05$, $\omega^0 = 2\pi$, $\delta = 0,2$. Классификация областей неустойчивости оказывается более затруднительной, чем в случае безмоментной оболочки. Это в первую очередь относится к характеристике форм колебаний. Значительное влияние при этом оказывают динамические краевые эффекты [4]. Двойной штриховкой на фиг. 4 отмечены области, соответствующие возбуждению связанных упруго-акустических колебаний.

Поступила 2 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М. Физматгиз, 1961.
2. Шаулов Ю. Х., Лернер Н. О. Горение в жидкостных ракетных двигателях. М. Оборонгиз, 1961.
3. Рокко Л., Чжен С. И. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М. Изд-во иностр. лит., 1958.
4. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.



Фиг. 4