ПМТФ, № 4, 1981

УДК 539.1(075.8)

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ ПРИ СИЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

К. Ш. Ходжаев, А. Г. Чирков, С. Д. Шаталов

(Ленинград)

Рассматривается встречающийся в астрофизике [1] случай движения частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. В отличие от известных [2—5] задач допускаются сильные неоднородности магнитного поля.

1. Уравнения движения и адиабатический инвариант. В ряде физически интересных случаев можно предполагать, что движущаяся частица не взаимодействует со средой (плазмой), в которой протекают токи. Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор частицы, m — масса, $e > 0$ — заряд, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — соответственно напряженности электрического и магнитного полей. Уравнение движения имеет вид

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}\mathbf{r}^{\cdot}\times\mathbf{H}. \tag{1.1}$$

В рассматриваемом случае $\mathbf{E} = E\mathbf{j}$, $E = \mathrm{const} > 0$, $\mathbf{H} = H_z(x)\mathbf{k}$, $H_z(x) > 0$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты осей). Указанное магнитное поле создается токами, направленными по оси y, причем плотность тока зависит только от x. Случаи $e < 0$, $H_z < 0$ и т. п. исследуются аналогично.

Обозначим характерные значения напряженности магнитного поля, проекции скорости на плоскость xy, ларморовских частоты и радиуса соответственно $[H]$, $[v]$, λ и R_L. Введем безразмерные время λt и координаты x/R_L, y/R_L. Сохраняя за безразмерными величинами их прежние обозначения и проектируя (1.1) на оси x, y, получим

$$x^{\cdot} = u,\ u^{\cdot} = h(x)v,\ v^{\cdot} = \varepsilon - h(x)u, \tag{1.2}$$

где $v = y^{\cdot}$; $\varepsilon = Ec/[v][H]$; $h(x) = H_z(x)/[H]$.

Движение по оси z равномерное и далее несущественно.

Как в [2—5], считается $\varepsilon \ll 1$, но в отличие от известных работ функция $h(x)$ не предполагается медленно меняющейся.

Введем вместо v новую переменную $\sigma = v + A(x)$, где $dA/dx = h(x)$, $A(0) = 0$. Из (1.2) получим $\sigma^{\cdot} = \varepsilon$ и $\sigma = \sigma_0 + \tau$, где $\tau = \varepsilon(t - t_0)$. Первые два уравнения (1.2) примут вид

$$x^{\cdot} = u,\ u^{\cdot} = h(x)(\sigma - A(x)). \tag{1.3}$$

Уравнения (1.3) описывают одномерное движение условной материальной точки в медленно меняющемся со временем силовом поле с потенциалом

$$\Pi = (1/2)(\sigma - A(x))^2.$$

Функция $A(x)$ строго монотонна, поэтому фазовые траектории системы (1.3) при $\sigma = \mathrm{const}$ замкнуты. Движение условной точки представляет собой колебания с медленно изменяющимися размахом, периодом и положением центра. С точностью до малых величин центр колебаний x_c является корнем уравнения $A(x_c) = \sigma$, размах равен $x_2 - x_1$, где x_1, x_2, $x_1 < x_2$ — корни уравнения $(\sigma - A(x))^2 = 2H$, H —гамильтониан условной точки

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} (\sigma - A(x))^2. \tag{1.4}$$

Система (1.3) имеет адиабатический инвариант [6]

$$I(H, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2H - (\sigma - A(\xi))^2} d\xi. \tag{1.5}$$

Интеграл в (1.5) и ниже в (1.8) вычисляется при σ, $H = \mathrm{const}$, величины x_1, x_2 при этом — функции σ, H.

Величина I при $t \leqslant t_0 + T/\varepsilon$ с точностью до малых $O(\varepsilon)$ сохраняется, что позволяет исследовать изменение других динамических характеристик частицы. Далее проводится такое исследование, поскольку инвариант в данной задаче имеет «нелокальный» вид, отличный от известного.

Разрешая соотношение $I = I(H, \sigma)$ относительно H, получим зависимость $H = H(I, \sigma)$, определяющую изменение H в первом приближении в виде $H(t_1) - H(t_0) = H(I, \sigma_1) - H(I, \sigma_0)$. Выразив $\omega = \partial H/\partial I$ через I, σ, найдем изменение периода $2\pi/\omega$, а из приведенных выше соотношений — эволюцию x_c, x_1, x_2.

Таким образом, определение медленной эволюции сводится только к обращению зависимости (1.5) (а не к интегрированию усредненных уравнений, что необходимо, когда неизвестен адиабатический инвариант).

Рассмотрим проекцию траектории частицы на плоскость xy. Ордината частицы y определяется квадратурой

$$y = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (\sigma - A(x))\, dt. \tag{1.6}$$

Функция $y(t)$ представима как наложение быстрых колебаний на быстрое, почти равномерное движение. За время порядка $1/\varepsilon$ частица сместится по оси x на расстояние порядка R_L, а по оси y — на большое расстояние порядка R_L/ε. Поэтому проекция траектории движения частицы на плоскость xy представляет собой спиралеобразную кривую с «осью», мало наклоненной к оси y. Так как в отличие от известных задач скорость центра витка вдоль оси y немала, то спираль будет «растянутой»: ее витки «неплотно» прилегают один к другому.

Из (1.3) следует

$$H^{\cdot} = \varepsilon(\sigma - A(x)) = \varepsilon v, \quad H - H_0 = \varepsilon(y - y_0). \tag{1.7}$$

Это выражает очевидный факт, что приращение кинетической энергии частицы равно работе электростатических сил. С помощью (1.7), имея информацию о функции H, можно получить сведения о траектории.

Разумно считать центром витка точку с координатами

$$x = x_c(\tau), \quad y = y_c(\tau) = [H(I, \tau) - H_0]/\varepsilon.$$

Соотношения $A(x_c) = \sigma$, $\dot{x}_c = \varepsilon/h(x_c)$ определяют медленное перемещение центра в положительном направлении оси x. Перемещение по оси y определяется изменением H. Поэтому построение траектории центра витка также сводится к обращению квадратуры (1.5).

В (1.5) входит не непосредственно напряженность магнитного поля $h(x)$, а потенциал $A(x)$. Может показаться, что динамические характеристики частицы зависят не только от значений $h(x)$ на рассматриваемом витке, но и от значений $h(x)$ на уже пройденном частицей пути. Покажем, что это не так. С этой целью сравним движения двух частиц в разных полях, отличающихся только на некотором промежутке $[x_a, x_b]$, т. е. сравним движения в полях $h(x)$ и $h(x) + \Delta(x)$, где $\Delta \neq 0$ только при $x \in [x_a, x_b]$.

Пусть движения обеих частиц начинаются при одинаковых начальных условиях и на первых витках частицы не заходят в область $x > x_a$. На этих витках их движения будут одинаковыми, одинаковыми будут и значения I. На витках, где $x > x_b$, потенциал $A(x)$ для второй частицы будет отличаться от потенциала для первой постоянным слагаемым

$$\Delta A = \int_{x_a}^{x_b} \Delta(\xi)\, d\xi.$$

Введем в уравнениях (1.3) для второй частицы новый аргумент $t^{(2)} = t - \Delta A/\varepsilon$. В результате уравнения (1.3) для первой частицы в переменных $x^{(1)}$, $u^{(1)}$, t и для второй в переменных $x^{(2)}$, $u^{(2)}$, $t^{(2)}$ совпадут (индекс означает номер частицы). Одинаковыми у обеих частиц будут и значения I. Следовательно, с точностью до малых величин динамические характеристики обеих частиц при $x > x_b$ будут одинаковыми, т. е. $H^{(1)}(\tau) = H^{(2)}(\tau - \Delta A)$, $\omega^{(1)}(\tau) = \omega^{(2)}(\tau - \Delta A)$ и т. д. Отличаться будут только времена прохождения частиц вблизи одной и той же точки.

Проанализируем теперь качественно изменение кинетической энергии при движении частицы. Пусть $dh/dx > 0$. Тогда

$$(1.8)\qquad \frac{\partial I(H,\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma - A(\xi)}{\sqrt{2H - (\sigma - A(\xi))^2}}\, d\xi =$$

$$= -\frac{2H}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{h(A^{-1}(\sigma + \sqrt{2H}\sin\theta)) - h(A^{-1}(\sigma - \sqrt{2H}\sin\theta))}{h(A^{-1}(\sigma + \sqrt{2H}\sin\theta))\, h(A^{-1}(\sigma - \sqrt{2H}\sin\theta))}\sin\theta\, d\theta < 0,$$

т. е. при $H = \mathrm{const}$ действие $I(H, \sigma)$ уменьшается со временем. Но поскольку I сохраняется, то кинетическая энергия увеличивается. Аналогично в случае $dh/dx < 0$ кинетическая энергия со временем уменьшается.

2. Сравнение с задачей о движении в слабо неоднородном поле. В этой задаче предполагается [2—5], что $R_L \sim \varepsilon[r]$, где $[r]$ — характерный масштаб изменения магнитного поля. Рассмотренная же выше задача относится к случаю $R_L \sim [r]$. Сравним решения этих двух задач, чтобы выяснить, как влияют в данном случае сильные неоднородности магнитного поля на движение частиц.

Рассмотрим сначала задачу о движении в слабо неоднородном поле, которая сейчас имеет особенности по сравнению с [2—5]. Из известных [2—5] уравнений получаем

$$(2.1)\qquad \rho^{\cdot} = \varepsilon p\cos\psi,\quad p^{\cdot} = -\varepsilon\sin\psi,\quad \psi^{\cdot} = h(\rho) - \varepsilon\cos\psi/p,$$

где $\rho = \varepsilon x$; $p = (u^2 + v^2)^{1/2}$; $\cos\psi = u/p$; $\sin\psi = -v/p$.

Усреднение по ψ приводит к тривиальному результату, что в первом приближении ρ и p сохраняются на временах $\sim 1/\varepsilon$; поэтому тривиален и вывод о сохранении известного адиабатического инварианта p^2/h. Эти выводы также и недостаточны, поскольку нужно проследить движение частицы, пока существенно не изменится h, т. е. на расстояниях $\sim[r]$ и временах $\sim 1/\varepsilon^2$.

Ввиду сказанного необходимо найти решения уравнений (2.1) во втором приближении. Для дрейфовых составляющих ξ, η функций ρ, p во втором приближении получим уравнения

$$\frac{d\xi}{d\psi} = \varepsilon^2 \frac{1}{h^2(\xi)}, \quad \frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{dh/d\xi}{h^3(\xi)} \eta.$$

Эти уравнения имеют интеграл $\eta^2/h(\xi) = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что p^2/h является адиабатическим инвариантом.

В данном случае получился адиабатический инвариант известного вида. Однако заранее это неочевидно, поскольку в невырожденной задаче адиабатический инвариант получается из членов первого порядка и иным путем. Существенной особенностью является также то, что инвариант сохраняется на временах $\sim 1/\varepsilon^2$. Аналогичная ситуация возникает, когда $v_\parallel = 0$ во все время движения [5].

Сравним теперь движения двух частиц, из которых одна все время движется в слабо неоднородном поле, а другая начинает и заканчивает движение в тех же областях поля, что и первая частица, но проходит по пути участки сильной неоднородности. Пусть частицы начинают движение с одинаковыми начальными условиями. В начале движения обе частицы имеют инвариант p^2/h. Для первой частицы этот инвариант сохраняется во все время движения. Для второй частицы при заходе в область сильно неоднородного поля величина p^2/h сохраняться не будет, а будет сохраняться инвариант (1.5). Но в области слабо неоднородного поля с точностью до малых имеем

$$A(\xi) = A(x_c) + h(x_c)(\xi - x_c),$$

$$I(H, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2H - h^2(x_c)(\xi - x_c)^2} d\xi = p^2/h(x_c),$$

т. е. инвариант (1.5) переходит в p^2/h. Следовательно, при переходе в сильно неоднородное поле значение I будет определяться значением p^2/h в слабо неоднородном поле, и наоборот. Выйдя окончательно в ту же область слабо неоднородного поля, что и первая частица, вторая будет иметь то же самое значение (первоначальное) инварианта p^2/h.

Следовательно, наличие скачков напряженности магнитного поля в рассмотренных условиях не влияет на динамические характеристики движения. Иначе говоря, в рассмотренных случаях не обнаруживается «сверхадиабатическое» [1] ускорение частиц, т. е. большее, чем то, какое наблюдается в условиях сохранения адиабатического инварианта p^2/h.

Поступила 9 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Румянцев А. А.** Сверхадиабатическое ускорение заряженных частиц и вспышки на Солнце и звездах.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1977, т. 41, № 9.
2. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
3. **Волосов В. М., Моргунов Б. И.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: изд. Московск. ун-та, 1977.
4. **Брагинский С. И.** К теории движения заряженных частиц в магнитном поле.— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 2.
5. **Нортроп Т.** Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1974.
6. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.