УДК 539.3:517.958

УПРУГИЙ АНИЗОТРОПНЫЙ МАТЕРИАЛ С ЧИСТО ПРОДОЛЬНЫМИ И ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛНАМИ

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Получен простейший вид матрицы модулей упругости анизотропного материала, проводящего чисто продольные и поперечные волны при любом направлении волновой нормали. Дано представление общего решения уравнений в смещениях через три функции, удовлетворяющие независимым волновым уравнениям. В случае плоской деформации из него получается комплексное представление, совпадающее с формулой Колосова — Мусхелишвили для изотропного материала. Приведенные в работе формулы определяют также анизотропный материал с модулем Юнга, одинаковым для всех направлений, как в изотропной среде.

Ключевые слова: анизотропия, продольные и поперечные волны, модули упругости, общее решение.

Явные формулы для анизотропных материалов, проводящих чисто продольные и поперечные волны при любом направлении волновой нормали, получены в [1, 2], позднее существование подобных сред отмечено в [3–5].

Тензор четвертого ранга модулей упругости $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$ допускает разложение на постоянную (изотропную) часть и части, содержащие два девиатора и нонор и соответствующие неприводимым линейным представлениям ортогональной группы преобразований системы координат x_1, x_2, x_3 [6–9]. В [7, 9] приведено следующее разложение:

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = H(\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ijkl})/3 + 2h(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ijkl})/3 + \\ + (H_{ij}\delta_{kl} + H_{kl}\delta_{ij} + H_{ik}\delta_{lj} + H_{lj}\delta_{ik} + H_{il}\delta_{jk} + H_{jk}\delta_{il})/6 + \\ +(h_{ij}\delta_{kl} + h_{kl}\delta_{ij})/3 - (h_{ik}\delta_{lj} + h_{lj}\delta_{ik} + h_{il}\delta_{jk} + h_{jk}\delta_{il})/6 + N_{ijkl}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\delta_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Сумма слагаемых с H, H_{ij}, N_{ijkl} есть симметричная часть $A_{(ijkl)} = (A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk})/3$, а сумма слагаемых с h, h_{ij} — несимметричная часть $A_{ijkl} - A_{(ijkl)} = (2A_{ijkl} - A_{iklj} - A_{iljk})/3$. Тензор $N_{ijkl} = N_{(ijkl)}$ является нонором, а $H_{ij} = H_{(ij)}$, $h_{ij} = h_{(ij)}$ — девиаторами, т. е. $N_{iikl} = 0$, $H_{ii} = 0$, $h_{ii} = 0$. По повторяющимся индексам проводится суммирование, индексы в круглых скобках означают симметрическую функцию. Все части разложения (1) взаимно ортогональны.

Если A_{ijkl} заданы, то все величины в правой части (1) однозначно определяются, и обратно: по формуле (1) можно задавать A_{ijkl} через две постоянные H, h, пять независимых компонент H_{ij}, пять независимых компонент h_{ij}, девять независимых компонент нонора N_{ijkl} [7, 9]. Постоянный тензор в (1) записывается в традиционном виде

$$H(\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ijkl})/3 + 2h(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ijkl})/3 = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ijkl},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00649, 00-15-96180).

где

$$\lambda = (H + 2h)/3 = (2A_{iikk} - A_{ikki})/15, \qquad h = \lambda - \mu,$$

$$2\mu = 2(H - h)/3 = (3A_{ikki} - A_{iikk})/15, \qquad H = \lambda + 2\mu.$$

Константы λ, μ соответствуют постоянным Ламе для изотропного материала.

Используя формулы перехода от двух индексов к одному

$$h_{11} = h_1, \qquad h_{22} = h_2, \qquad h_{33} = h_3,$$

$$\sqrt{2}h_{23} = \sqrt{2}h_{32} = h_4, \qquad \sqrt{2}h_{13} = \sqrt{2}h_{31} = h_5, \qquad \sqrt{2}h_{12} = \sqrt{2}h_{21} = h_6,$$

запишем разложение (1) в виде суммы матриц

$$A_{ij} = \frac{H}{3}\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & \text{sym} & & \\ 1 & 1 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2h}{3}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & \text{sym} & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6H_1 & & & & & \\ -H_3 & 6H_2 & & & \text{sym} & \\ -H_2 & -H_1 & 6H_3 & & & \\ H_4 & 3H_4 & 3H_4 & -2H_1 & & \\ 3H_5 & H_5 & 3H_5 & \sqrt{2}H_6 & -2H_2 & \\ 3H_6 & 3H_6 & H_6 & \sqrt{2}H_5 & \sqrt{2}H_4 & -2H_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -h_3 & 0 & & & \text{sym} & \\ -h_2 & -h_1 & 0 & & & \\ h_4 & 0 & 0 & h_1 & & \\ 0 & h_5 & 0 & -h_6/\sqrt{2} & h_2 & \\ 0 & 0 & h_6 & -h_5/\sqrt{2} & -h_4/\sqrt{2} & h_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} N_{11} & & & & & \\ N_{21} & N_{22} & & & \text{sym} & \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & & & \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & 2N_{32} & & \\ N_{51} & N_{52} & N_{53} & \sqrt{2}N_{63} & 2N_{31} & \\ N_{61} & N_{62} & N_{63} & \sqrt{2}N_{52} & \sqrt{2}N_{41} & 2N_{21} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

причем $H_1 + H_2 + H_3 = 0$, $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ и

$$N_{11} + N_{21} + N_{31} = 0, \qquad N_{41} + N_{42} + N_{43} = 0,$$

$$N_{21} + N_{22} + N_{32} = 0, \qquad N_{51} + N_{52} + N_{53} = 0,$$

$$N_{31} + N_{32} + N_{33} = 0, \qquad N_{61} + N_{62} + N_{63} = 0.$$

Уравнения теории упругости при произвольной анизотропии без учета объемных сил в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид [1, 2]

$$L_{ij}u_j = 0, \qquad L_{ij} = L_{ji} = A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho\delta_{ij}\partial_{44}, \qquad (3)$$

где u_j — вектор смещения; $A_{i(kl)j} = (A_{iklj}+A_{ilkj})/2$; ρ — постоянная плотность материала; ∂_k — производная по координате x_k; ∂_4 — производная по времени $x_4 = t$.

Если для операторов (3) находятся с постоянными коэффициентами дифференциальные операторы T, $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$ такие, что $LT = TD$, $|T| \neq 0$, то общее решение уравнений (3) имеет вид [1, 2]

$$u = T\phi, \qquad D\phi = f, \qquad Tf = 0. \tag{4}$$

В [1, 2] получена матрица модулей упругости вида (см. также [10])

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{11}-A_{66} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{11}-A_{55} & A_{11}-A_{44} & A_{11} & & & \\ A_{41} & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & A_{52} & 0 & -A_{63}/\sqrt{2} & A_{55} & \\ 0 & 0 & A_{63} & -A_{52}/\sqrt{2} & -A_{41}/\sqrt{2} & A_{66} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$A_{41} = -2\sqrt{2}bc_2c_3, \qquad A_{44} = 2(a - bc_1^2),$$
$$A_{52} = -2\sqrt{2}bc_1c_3, \qquad A_{55} = 2(a - bc_2^2),$$
$$A_{63} = -2\sqrt{2}bc_1c_2, \qquad A_{66} = 2(a - bc_3^2),$$

а операторы T, D при этом следующие:

$$T = [\partial_j,\ \varepsilon_{jmn}c_m\partial_n,\ c_j\partial_{kk} - c_m\partial_{mj}]; \tag{6}$$

$$D_1 = A_{11}\partial_{kk} - \rho\partial_{44}, \quad D_2 = [(a - bc_mc_m)\delta_{kl} + bc_kc_l]\partial_{kl} - \rho\partial_{44}, \quad D_3 = a\partial_{kk} - \rho\partial_{44}. \tag{7}$$

Здесь ε_{jmn} — символы Леви-Чивиты; $A_{11}, a, b, c_1, c_2, c_3$ — произвольные параметры такие, что матрица (5) положительно определенная; c_j — ненулевой вектор.

При замене ∂_k на n_k и ∂_{44} на $|v|^2 = v_iv_i$ ($v_i = |v|n_i$) из (7) находим фазовые скорости, соответствующие волновой нормали n_k:

$$\begin{gathered} \rho|v|_1^2 = A_{11}n_kn_k = A_{11}, \qquad \rho|v|_3^2 = an_kn_k = a, \\ \rho|v|_2^2 = [(a - bc_mc_m)\delta_{kl} + bc_kc_l]n_kn_l = a - bc_mc_m + bc_kc_ln_kn_l. \end{gathered} \tag{8}$$

Из (6) следует, что формулы (5)–(8) определяют среду с *чисто продольными* и *чисто поперечными волнами* [11] при любом направлении волновой нормали n_k. В экспериментах с продольными волнами материал, соответствующий матрице (5), неотличим от изотропного [3–5].

Используя разложение (1), найдем условия, при которых в материале возможно распространение чисто продольных волн. Из (1) получаем

$$\begin{aligned} A_{ijkl}\partial_{jkl} &= (\lambda + 2\mu)\partial_{ikk} + (H_{ik}\partial_{kll} + H_{kl}\partial_{ikl})/2 + N_{ijkl}\partial_{jkl} = \\ &= \partial_i[(\lambda + 2\mu)\partial_{kk} + H_{kl}\partial_{kl}/2] + (H_{ij}\delta_{kl}/2 + N_{ijkl})\partial_{jkl}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для существования чисто продольной волны должно быть выполнено условие

$$(H_{ij}\delta_{kl}/2 + N_{ijkl})\partial_{jkl} = \partial_iB_{kl}\partial_{kl} = \delta_{ij}B_{kl}\partial_{jkl},$$

или

$$(H_{ij}\delta_{kl}/2 + N_{ijkl} - \delta_{ij}B_{kl})\partial_{jkl} = 0, \tag{9}$$

где $B_{kl} = B_{(kl)}$ — неопределенные пока величины. Соотношение (9) будет выполнено, если

$$N_{ijkl} = \delta_{i(j}B_{kl)} - H_{i(j}\delta_{kl)}/2 = \\ = [\delta_{ij}B_{kl} + \delta_{ik}B_{lj} + \delta_{il}B_{jk} - (H_{ij}\delta_{kl} + H_{ik}\delta_{lj} + H_{il}\delta_{jk})/2]/3. \qquad (10)$$

Учитывая свойства девиатора и нонора, из (10) получаем

$$N_{iikl} = (5B_{kl} - H_{kl})/3 = 0, \qquad B_{kl} = H_{kl}/5,$$

$$N_{ijkl} = [(\delta_{ij}H_{kl} + \delta_{ik}H_{lj} + \delta_{il}H_{jk})/5 - (H_{ij}\delta_{kl} + H_{ik}\delta_{lj} + H_{il}\delta_{jk})/2]/3, \quad N_{ijkk} = -7H_{ij}/10 = 0.$$

Отсюда следует, что в анизотропном материале возможно распространение чисто продольных волн при любом направлении волновой нормали n_k, если в (1) $H_{ij} = 0$, $N_{ijkl} = 0$.

Девиатор h_{ij} не влияет на продольную волну. Так как h_{ij} — девиатор и (1), (2) — инвариантное разложение, то можно считать, что система координат главная для h_{ij}, т. е. $h_4 = h_5 = h_6 = 0$, и (2) принимает форму

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & & & & & \\ \lambda - h_3/3 & \lambda + 2\mu & & & \text{sym} & \\ \lambda - h_2/3 & \lambda - h_1/3 & \lambda + 2\mu & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu + h_1/3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu + h_2/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu + h_3/3 \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

Выражение (11) есть простейший вид матрицы модулей упругости материала, в котором возможно распространение чисто продольных волн при любом направлении волновой нормали n_k.

Сравнивая (2), (5), (11), для матрицы (5) находим

$$\lambda = A_{11} - 2(a - bc_sc_s/3), \quad 2\mu = 2(a - bc_sc_s/3);$$
$$h_{ij} = 2b(c_sc_s\delta_{ij} - 3c_ic_j). \qquad (12)$$

Из (12) следует, что c_j есть собственный вектор девиатора h_{ij}, а его собственные значения $h_1 = h_2 = 2bc_sc_s$, $h_3 = -4bc_sc_s$. Этот вектор можно считать единичным ($c_sc_s = 1$), и в главных осях $c_j = \delta_{j3}$.

Матрица (5) принимает вид

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{11} - 2(a-b) & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{11} - 2a & A_{11} - 2a & A_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2a & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(a-b) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{31} & A_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{31} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{31} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{21} \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

где $2a = A_{11} - A_{31}$; $2b = A_{21} - A_{31}$. Очевидно, что матрица (13) соответствует частному случаю трансверсально-изотропного материала [11, 12]. Собственные модули упругости $\mu_i > 0$ и ортогональные собственные состояния t_{ip}, $t_{ip}t_{iq} = \delta_{pq}$ для (13) следующие [12]:

$$\mu_{1,2} = (2A_{11} + A_{21} \pm \sqrt{A_{21}^2 + 8A_{31}^2}\,)/2 =$$

$$= [3A_{11} - 2(a-b) \pm \sqrt{(A_{11} - 2(a-b))^2 + 8(A_{11} - 2a)^2}\,]/2, \qquad (14)$$

$$\mu_3 = \mu_6 = A_{11} - A_{21} = 2(a-b), \qquad \mu_4 = \mu_5 = A_{11} - A_{31} = 2a;$$

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} \cos\alpha/\sqrt{2} & -\sin\alpha/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha/\sqrt{2} & -\sin\alpha/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\sqrt{2}A_{31}/A_{21} = 2\sqrt{2}(A_{11} - 2a)/(A_{11} - 2(a-b)).$$

Выражения для матрицы A_{ij} и обратной матрицы коэффициентов податливости $a_{ij} = A_{ij}^{-1}$ через собственные модули и состояния имеют вид

$$A_{ij} = \mu_1 t_{i1} t_{j1} + \mu_2 t_{i2} t_{j2} + \mu_3 (t_{i3} t_{j3} + t_{i6} t_{j6}) + \mu_4 (t_{i4} t_{j4} + t_{i5} t_{j5}),$$

$$a_{ij} = t_{i1} t_{j1}/\mu_1 + t_{i2} t_{j2}/\mu_2 + (t_{i3} t_{j3} + t_{i6} t_{j6})/\mu_3 + (t_{i4} t_{j4} + t_{i5} t_{j5})/\mu_4.$$

Для положительной определенности матрицы (13) необходимо и достаточно положительности собственных модулей: $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$. Отсюда с учетом (14) получаем неравенства, обеспечивающие положительную определенность матрицы (13):

$$g_1 = 2(A_{31}/A_{11})^2 - 1 < A_{21}/A_{11} < 1, \qquad -1 < A_{31}/A_{11} < 1; \qquad (15)$$

$$g_2 = (a/A_{11})(4a/A_{11} - 3) < b/A_{11} < a/A_{11}, \qquad 0 < a/A_{11} < 1. \qquad (16)$$

Области допустимых значений параметров (15) и (16) показаны на рис. 1, 2 соответственно. Изотропному материалу соответствуют линии $A_{21} = A_{31}$ (рис. 1) и $b = 0$ (рис. 2).

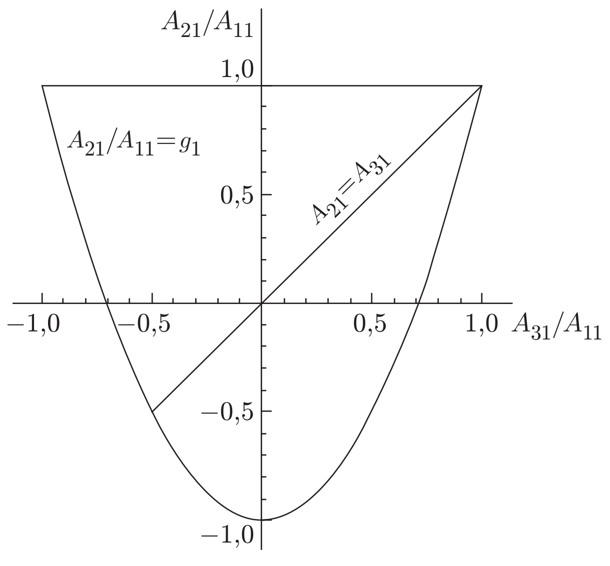

Рис. 1

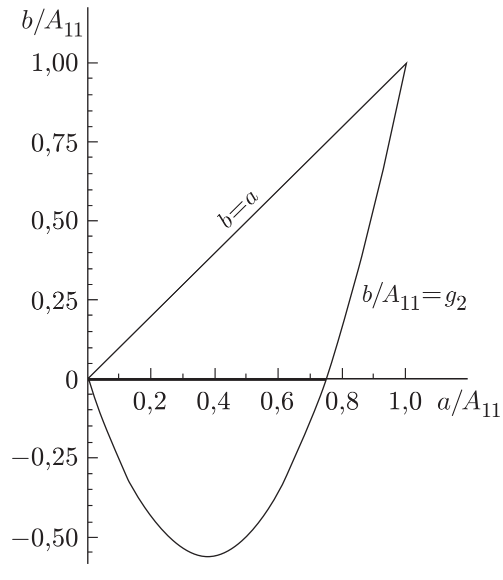

Рис. 2

Обратную матрицу a_{ij} для (13) можно получить непосредственно (без использования собственных модулей и состояний):

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} (A_{11}^2 - A_{31}^2)/A & & & & & \\ -(A_{11}A_{21} - A_{31}^2)/A & a_{11} & & & \mathrm{sym} & \\ -A_{31}(A_{11} - A_{21})/A & a_{31} & (A_{11}^2 - A_{21}^2)/A & & & \\ 0 & 0 & 0 & (A_{11} - A_{31})^{-1} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (A_{11} - A_{21})^{-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$A = (A_{11} - A_{21})[A_{11}(A_{11} + A_{21}) - 2A_{31}^2] > 0.$$

Матрица (17), очевидно, соответствует трансверсально-изотропному материалу, но структура матрицы не совпадает с (13).

Для материала (13) матрицы (3), (6) принимают вид

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{21} & L_{22} & L_{32} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{gathered} L_{11} = (\lambda + 2\mu)\partial_{11} + (\mu - 2b/3)\partial_{22} + (\mu + b/3)\partial_{33} - \rho\partial_{44}, \\ L_{21} = (\lambda + \mu + 2b/3)\partial_{21}, \qquad L_{22} = (\mu - 2b/3)\partial_{11} + (\lambda + 2\mu)\partial_{22} + (\mu + b/3)\partial_{33} - \rho\partial_{44}, \\ L_{31} = (\lambda + \mu - b/3)\partial_{31}, \qquad L_{32} = (\lambda + \mu - b/3)\partial_{32}, \\ L_{33} = (\mu + b/3)(\partial_{11} + \partial_{22}) + (\lambda + 2\mu)\partial_{33} - \rho\partial_{44}, \end{gathered} \quad (18)$$

$$T = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -\partial_{23} \\ \partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} A_{11} = \lambda + 2\mu, \qquad a - b = \mu - 2b/3, \qquad a = \mu + b/3, \\ A_{11} - (a - b) = \lambda + \mu + 2b/3, \qquad A_{11} - a = \lambda + \mu - b/3. \end{gathered} \quad (19)$$

Для операторов (18) имеет место соотношение $LT = TD$, где $D = \mathrm{diag}\,(D_1, D_2, D_3)$ определяется формулами (7).

Фазовые скорости (8) с учетом (19) равны:

$$\rho|v|_1^2 = \lambda + 2\mu, \qquad \rho|v|_2^2 = \mu - 2b/3 + bn_3^2, \qquad \rho|v|_3^2 = \mu + b/3.$$

Отсюда следует, что две скорости не зависят от направления волновой нормали n_k, а одна зависит от компоненты n_3. Экстремальные значения скорости $\rho|v|_2^2$ есть $a - b = \mu - 2b/3$ и $a = \mu + b/3$. Если $b \leqslant 0$, то $0 < a \leqslant \rho|v|_2^2 \leqslant a - b < A_{11}$. Если $b \geqslant 0$, то $0 < a - b \leqslant \rho|v|_2^2 \leqslant a < A_{11}$. Условия положительной определенности (15), (16), выраженные через параметры λ, μ, b, имеют вид

$$g_3 = \frac{2}{9}\,\frac{b}{\mu} - 1 + \frac{1}{2b/\mu + 3} < \frac{\lambda}{\mu}, \qquad -\frac{3}{2} < \frac{b}{\mu} < \frac{3}{2}. \quad (20)$$

Областью допустимых значений параметров (20) является множество всех точек, лежащих выше кривой $\lambda/\mu = g_3$ на рис. 3. Постоянная λ может быть отрицательной. Для изотропного материала $b = 0$ и $-2/3 < \lambda/\mu$.

С учетом (7), (18), (19) запишем общее решение (4) уравнений (3):

$$u_1 = \partial_1\phi_1 - \partial_2\phi_2 - \partial_{13}\phi_3, \quad u_2 = \partial_2\phi_1 + \partial_1\phi_2 - \partial_{23}\phi_3, \quad u_3 = \partial_3\phi_1 + (\partial_{11} + \partial_{22})\phi_3; \quad (21)$$

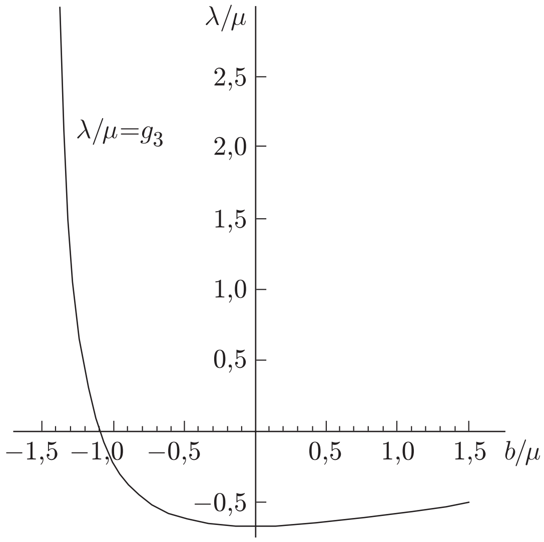

Рис. 3

$$
\begin{gathered}
[(\lambda+2\mu)\partial_{kk}-\rho\partial_{44}]\phi_1=f_1,\\
[(\mu-2b/3)\partial_{kk}+b\partial_{33}-\rho\partial_{44}]\phi_2=f_2,\quad [(\mu+b/3)\partial_{kk}-\rho\partial_{44}]\phi_3=f_3;
\end{gathered}
\tag{22}
$$

$$
\partial_1 f_1-\partial_2 f_2-\partial_{13}f_3=0,\quad \partial_2 f_1+\partial_1 f_2-\partial_{23}f_3=0,\quad \partial_3 f_1+(\partial_{11}+\partial_{22})f_3=0. \tag{23}
$$

В свою очередь общее решение системы (23) можно представить в виде

$$
f_1=(\partial_{11}+\partial_{22})(\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2)+\partial_3\psi_3,\quad f_2=\partial_{kk}(-\partial_2\psi_1+\partial_1\psi_2),\quad f_3=-\partial_3(\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2)+\psi_3,
$$

$$
\partial_{kk}(\partial_{11}+\partial_{22})\psi_1=0,\qquad \partial_{kk}(\partial_{11}+\partial_{22})\psi_2=0,\qquad \partial_{kk}\psi_3=0.
$$

Частный случай решения (21), (22) для изотропного материала без учета функций f_1, f_2, f_3 приведен в [13].

Рассмотрим случай плоской деформации, для которой $u_3=0$, $\partial_3=0$. Тогда вместо (18), (21)–(23) получим

$$
L=\begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\partial_{11}+(\mu-2b/3)\partial_{22}-\rho\partial_{44} & (\lambda+\mu+2b/3)\partial_{12}\\ (\lambda+\mu+2b/3)\partial_{21} & (\mu-2b/3)\partial_{11}+(\lambda+2\mu)\partial_{22}-\rho\partial_{44}\end{bmatrix},
$$

$$
T=\begin{bmatrix}\partial_1 & -\partial_2\\ \partial_2 & \partial_1\end{bmatrix},\qquad LT=TD;
$$

$$
\begin{gathered}
u_1=\partial_1\phi_1-\partial_2\phi_2,\qquad u_2=\partial_2\phi_1+\partial_1\phi_2,\\
[(\lambda+2\mu)(\partial_{11}+\partial_{22})-\rho\partial_{44}]\phi_1=f_1,\qquad [(\mu-2b/3)(\partial_{11}+\partial_{22})-\rho\partial_{44}]\phi_2=f_2,\\
\partial_1 f_1-\partial_2 f_2=0,\qquad \partial_2 f_1+\partial_1 f_2=0.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Известны формулы [14]

$$
\partial_z=(1/2)(\partial_1-i\partial_2),\qquad \partial_{\bar z}=(1/2)(\partial_1+i\partial_2),\qquad z=x_1+ix_2,\qquad i=\sqrt{-1}. \tag{25}
$$

Последние два уравнения (24) есть условия Коши — Римана для аналитической функции $\varphi_1'(z)=f_1+if_2$ (здесь штрих обозначает производную по z):

$$
\partial_{\bar z}\varphi_1'(z)=(1/2)(\partial_1+i\partial_2)(f_1+if_2)=(1/2)(\partial_1 f_1-\partial_2 f_2)+(i/2)(\partial_2 f_1+\partial_1 f_2)=0.
$$

С учетом (25) формулы (24) записываются в виде

$$
u_1+iu_2=2\partial_{\bar z}(\phi_1+i\phi_2); \tag{26}
$$

$$2[(\lambda+2\mu)(\partial_{11}+\partial_{22})-\rho\partial_{44}]\phi_1=\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1'(z)},$$
$$2i[(\mu-2b/3)(\partial_{11}+\partial_{22})-\rho\partial_{44}]\phi_2=\varphi_1'(z)-\overline{\varphi_1'(z)}.$$

Для статики $\partial_4=0$, и так как $\partial_{11}+\partial_{22}=4\partial_z\partial_{\bar z}$, то

$$2(\lambda+2\mu)4\partial_z\partial_{\bar z}\phi_1=\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1'(z)},\qquad 2i(\mu-2b/3)4\partial_z\partial_{\bar z}\phi_2=\varphi_1'(z)-\overline{\varphi_1'(z)}.$$

Из последних соотношений получаем

$$2(\phi_1+i\phi_2)=[\bar z\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\psi_1(z)+\overline{\psi_1(z)}]/[4(\lambda+2\mu)]+$$
$$+[\bar z\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1(z)}+\psi_2(z)-\overline{\psi_2(z)}]/[4(\mu-2b/3)].$$

Здесь $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ — новые аналитические функции, возникшие при интегрировании. Отсюда по формуле (26) находим

$$u_1+iu_2=2\partial_{\bar z}(\phi_1+i\phi_2)=\frac{\lambda+3\mu-2b/3}{4(\lambda+2\mu)(\mu-2b/3)}\,\varphi_1(z)-$$
$$-\frac{\lambda+\mu+2b/3}{4(\lambda+2\mu)(\mu-2b/3)}\,z\overline{\varphi_1'(z)}+\frac{1}{4(\lambda+2\mu)}\,\overline{\psi_1'(z)}-\frac{1}{4(\mu-2b/3)}\,\overline{\psi_2'(z)}. \qquad (27)$$

Обозначим

$$\frac{\lambda+\mu+2b/3}{4(\lambda+2\mu)(\mu-2b/3)}\,\varphi_1(z)=\varphi(z),\qquad \frac{1}{4(\lambda+2\mu)}\,\overline{\psi_1'(z)}-\frac{1}{4(\mu-2b/3)}\,\overline{\psi_2'(z)}=-\overline{\psi(z)},$$

тогда (27) примет вид

$$u_1+iu_2=æ\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \qquad (28)$$

где

$$æ=\frac{3A_{11}-A_{21}}{A_{11}+A_{21}}=\frac{A_{11}+a-b}{A_{11}-(a-b)}=\frac{3(\lambda+3\mu)-2b}{3(\lambda+\mu)+2b}.$$

Выражение (28) соответствует формуле Колосова — Мусхелишвили [14] и при $b=0$ является представлением смещений для изотропного материала, при этом $æ=(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)=3-4\nu$ (ν — коэффициент Пуассона). Таким образом, для трансверсально-изотропного материала, отвечающего матрице (13), при плоской деформации имеет место представление (28) смещений через аналитические функции, поэтому все методы функций комплексного переменного, развитые для изотропного материала [14], применимы и в данном случае. Однако при рассмотрении краевых задач можно также непосредственно использовать решение (24), а в пространственных задачах — общее представление (21)–(23).

Существуют реальные упругие среды, близкие к материалу с матрицей модулей упругости (13); например, для некоторых керамик [15] параметр α [13] примерно равен единице:

$$\alpha=\frac{A_{44}/2+A_{31}}{A_{11}-A_{44}/2}=\frac{A_{33}-A_{44}/2}{A_{44}/2+A_{31}}\approx 1.$$

Отметим также, что если матрица a_{ij} коэффициентов податливости анизотропного материала имеет структуру вида (5), (11), (13), то модуль Юнга $1/E_n=n_in_ja_{ijkl}n_kn_l$ в направлении n_i не зависит от n_i и одинаков для всех направлений: $1/E_n=a_{11}$, как в изотропном материале (см. также [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Остросаблин Н. И.** Собственные операторы и векторы для системы дифференциальных уравнений линейной теории упругости анизотропных материалов // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 608–610.
2. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трем независимым волновым уравнениям // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 143–150.
3. **Rychlewski J.** Elastic waves under unusual anisotropy // Proc. of the 3rd Intern. conf. on nonlinear mech., Shanghai, Aug. 17–20, 1998. Shanghai: S. n., 1998. P. 101, 102.
4. **Rychlewski J.** A qualitative approach to Hooke's tensors. Pt 2 // Arch. Mech. 2001. V. 53, N 1. P. 45–63.
5. **Rychlewski J.** Elastic waves under unusual anisotropy // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49, N 11. P. 2651–2666.
6. **Победря Б. Е.** Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
7. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
8. **Rychlewski J.** A qualitative approach to Hooke's tensors. Pt 1 // Arch. Mech. 2000. V. 52, N 4/5. P. 737–759.
9. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 149–160.
10. **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
11. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
12. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
13. **Остросаблин Н. И.** Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
14. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
15. **Хантингтон Г.** Упругие постоянные кристаллов. 2 // Успехи физ. наук. 1961. Т. 74, вып. 3. С. 461–520.

Поступила в редакцию 3/VI 2002 г.