

УДК 532.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Б. Курзин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kurzin@hydro.nsc.ru

Построена модель отрывного обтекания тонких профилей несжимаемой жидкостью в окрестности режима “безударного входа”, основанная на осреднении течения в вихревом следе, сбегаящем с кромок профилей. Путем аппроксимации вихревого следа двумя вихревыми линиями определение осредненных гидродинамических характеристик сводится к двукратному решению интегрального сингулярного уравнения, эквивалентного уравнению, описывающему стационарное безотрывное обтекание профиля. При этом время расчета на два порядка меньше, чем при решении соответствующей эволюционной задачи. Результаты тестового расчета предлагаемым методом удовлетворительно согласуются с известными результатами расчета и эксперимента.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, профиль, отрыв, след, вихрь.

Введение. Расчету отрывного обтекания тел посвящено большое количество работ, среди которых следует отметить монографии [1–3]. В [2] приведена классификация методов расчета таких течений. В отдельную группу выделены вихревые модели течения невязкой жидкости с использованием дополнительных гипотез типа гипотезы Жуковского — Чаплыгина, основные подходы к численной реализации которой изложены в [1]. Работа [3] посвящена развитию методов расчета отрывного обтекания тел, рассмотренных в [1], с учетом вязкости жидкости в рамках модели пограничного слоя.

Приведенные в [1, 3] многочисленные примеры расчета отрывного обтекания тел и результаты их сравнения с экспериментальными данными показали, что расчетное поле скоростей качественно хорошо согласуется с течением реальной жидкости, а в некотором диапазоне чисел Рейнольдса наблюдается также хорошее количественное согласование их гидродинамических характеристик.

Однако расчет образования и развития поверхностей контактного разрыва, которыми моделируются вихревые следы за профилями в потоке идеальной жидкости, весьма трудоемкий. При этом дополнительные трудности возникают в процессе осреднения течения, которое в режимах отрывного обтекания профилей всегда нестационарно и стремится к установившемуся лишь в среднем [2].

Данная работа посвящена разработке метода расчета отрывного обтекания тонких профилей потоком несжимаемой жидкости, в котором в рамках асимптотического приближения решения этой задачи отсутствуют указанные выше недостатки существующих методов расчета.

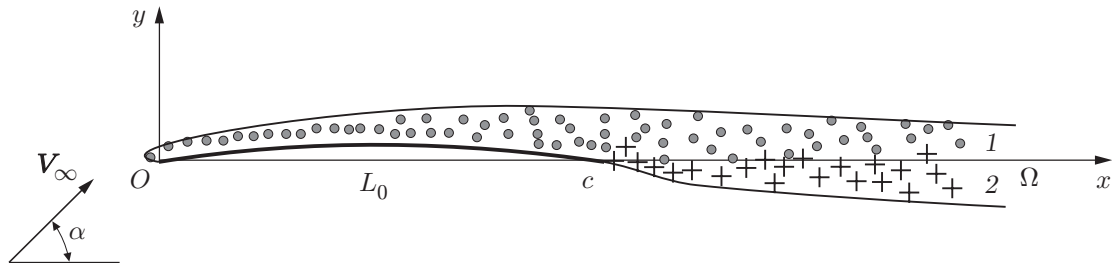


Рис. 1. Схема отрывного обтекания тонкого профиля:

1, 2 — свободные вихри, сбегаящие с передней и задней кромок профиля

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание криволинейной дужки потоком идеальной несжимаемой жидкости под углом атаки

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.1)$$

где α_0 — угол “безударного входа”, при котором скорость течения жидкости в окрестности передней кромки профиля ограничена.

Считая, что отрыв потока происходит лишь с кромок профилей, представим схематически мгновенное положение сбегаящих с них вихревых следов (рис. 1), которые могут быть рассчитаны с помощью методов, изложенных в [1].

В рамках модели идеальной жидкости комплексная скорость течения в плоскости $z = x + iy$ в каждый момент времени t может быть представлена в виде

$$\bar{V}(z, t) = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{L_0} \frac{\gamma_0(\zeta_0, t) d\zeta_j}{z - \zeta_0(t)} + \sum_{j=1}^2 \int_{L'_j} \frac{\gamma_j(\zeta_j, t) d\zeta_j}{z - \zeta_j(t)} \right), \quad \bar{V}_\infty = q_\infty e^{-i\alpha},$$

$$\zeta_j = \xi_j + i\eta_j, \quad \zeta_0 \in L_0, \quad \zeta_j(t) \in L'_j(t) \quad \text{при } j = 1, 2,$$

где L_0 — контур дужки; L'_j ($j = 1, 2$) — контуры вихревых следов, сбегаящих с передней и задней кромок соответственно; γ_j — погонная интенсивность вихревых слоев, моделирующих контуры дужки L_0 и вихревых следов L'_j .

Свободные вихревые частицы, принадлежащие L'_j ($j = 1, 2$), проходят практически через каждую точку некоторой полосы Ω , границы которой показаны на рис. 1 сплошными линиями. При этом в момент времени t в фиксированных точках области Ω завихренность жидкости $\omega(\zeta, t) \neq 0$, если $\zeta \in L'_j$, и $\omega(\zeta, t) = 0$, если $\zeta \notin L'_j$ ($j = 1, 2$). С учетом этого обстоятельства комплексная скорость течения жидкости в момент времени t может быть представлена в виде

$$\bar{V}(z, t) = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{L_0} \frac{\gamma_0(s_0, t) ds_0}{z - \zeta_0(s_0)} + \int_{\Omega} \frac{\omega(\zeta, t) d\sigma}{z - \zeta} \right), \quad (1.2)$$

где $\zeta = \xi + i\eta \in \Omega$; $d\sigma$ — элемент области Ω ; s_0 — дуговая координата L_0 , начало которой расположено на передней кромке.

Предполагая существование установившегося в среднем по времени течения жидкости в окрестности дужки, введем осредненные величины

$$\langle \bar{V}(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{V}(t, z) dt, \quad \langle \omega(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t, z) dt, \quad \langle \gamma_0(s_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_0(t, s_0) dt \quad (1.3)$$

$(T \rightarrow \infty).$

Согласно (1.2) для этих величин имеет место соотношение

$$\langle \bar{V}(z) \rangle = \langle q(z) \rangle e^{-i\theta(z)} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{L_0} \frac{\langle \gamma_0(s_0) \rangle ds_0}{z - \zeta_0(s_0)} + \int_{\Omega} \frac{\langle \omega(\zeta) \rangle d\sigma}{z - \zeta} \right), \quad (1.4)$$

где Ω — слой конечной толщины с осредненной завихренностью частиц.

Рассматриваемое течение жидкости удовлетворяет условию непротекания через контур L_0 , которое для осредненного течения может быть представлено в виде

$$\text{Im} \{ \langle \bar{V}(z_0) \rangle e^{i\theta_0(z_0)} \} = 0, \quad z_0 \in L_0, \quad (1.5)$$

где $\theta_0(z_0)$ — угол между касательной к L_0 в точке z_0 и осью Ox .

Подставляя (1.4) в (1.5), получаем интегральное уравнение

$$\int_{L_0} \langle \gamma_0(\zeta_0) \rangle K_0(z_0, \zeta_0) d\zeta_0 + \int_{\Omega} \langle \omega(\zeta) \rangle K_0(z_0, \zeta) d\sigma = 2\pi q_\infty \sin[\alpha - \theta_0(z_0)], \quad (1.6)$$

$$K_0(z_0, \zeta_0) = -\frac{(x_0 - \xi_0) \cos \theta_0(z_0) + (y_0 - \eta_0) \sin \theta_0(z_0)}{(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2}, \quad \zeta_0 \in L_0,$$

в котором помимо искомой функции $\langle \gamma_0(\zeta_0) \rangle$ неизвестна также функция $\langle \omega(\zeta) \rangle$. При решении начально-краевой задачи об отрывном обтекании профиля эта функция определяется из условия Жуковского — Чаплыгина по формуле (1.3).

Учитывая предположение (1.1) о малости отклонения угла атаки α от угла “безударного входа” α_0 , для решения рассматриваемой задачи используем метод возмущений [4]. С этой целью искомые функции представим в виде суммы двух составляющих

$$\langle \gamma_0(s_0) \rangle = \gamma_{00}(s_0) + \langle \gamma'_0(s_0) \rangle, \quad \langle \bar{V}(z) \rangle = \bar{V}_0(z) + \langle \bar{V}'(z) \rangle, \quad (1.7)$$

где $\gamma_{00}(s_0)$, $\bar{V}_0(z)$ — искомые функции, соответствующие режиму “безударного входа”; $\langle \gamma'_0(s_0) \rangle$, $\langle \bar{V}'(z) \rangle$ — их возмущенные составляющие при $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$. Для возмущенной составляющей вектора скорости течения, за исключением малой окрестности передней кромки дужки, вводится предположение

$$\langle q'(z) \rangle = O(\varepsilon), \quad \langle \bar{V}'(z) \rangle = \langle q'(z) \rangle e^{-i\theta'(z)}. \quad (1.8)$$

Функция $\gamma_{00}(s_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{L_0} \gamma_{00}(s_0) K_0(z_0, \zeta_0(s_0)) ds_0 = 2\pi q_\infty \sin[\alpha_0 - \theta_0(z_0)], \quad z_0 \in L_0, \quad (1.9)$$

решение которого ищется в классе ограниченных функций на обоих концах контура L_0 . При этом соответствующее условие разрешимости уравнения для данного класса его решений можно рассматривать как уравнение для определения угла безударного входа α_0 .

Согласно методу возмущений функция $\langle \gamma'_0(s_0) \rangle$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_{L_0} \langle \gamma'_0(s_0) \rangle K_0(z_0, \zeta_0) ds_0 + \int_{\Omega} \langle \omega(\zeta) \rangle K_0(z_0, \zeta) d\sigma = 2\pi q_{0\infty} \cos[\alpha_0 - \theta_0(z_0)]\varepsilon. \quad (1.10)$$

Как показано ниже, вихревой слой Ω , в котором определена функция $\langle \omega(\zeta) \rangle$, можно моделировать двумя вихревыми линиями, параметры которых зависят лишь от двух неопределенных констант. В рамках этой модели решение уравнения (1.10) находится с точностью до величины второго порядка малости ε .

2. Модель вихревого слоя Ω . Поскольку взаимодействие вихревых частиц между собой и с обтекаемым профилем имеет различный характер, вихревой слой Ω целесообразно разбить на три подобласти Ω_j , так чтобы координаты x принадлежащих им точек удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} x > c & \quad \text{при } z \in \Omega_1, \\ 0 \leq x \leq c & \quad \text{при } z \in \Omega_2, \\ -\tilde{\varepsilon} \leq x < 0 & \quad \text{при } z \in \Omega_3. \end{aligned}$$

2.1. *Модель течения в подобласти Ω_1 .* В рамках линейного приближения обычно предполагается, что свободные завихренные частицы за обтекаемым телом движутся со скоростью основного потока $\vec{V}_0(z)$. На рис. 2 схематически представлен некоторый участок Ω_1 . Линиями u, s на нем показаны естественные криволинейные координаты, направленные вдоль линий тока основного потока и по направлению нормали к ним, значения $u = 0, h$ определяют верхнюю и нижнюю границы области Ω_1 , значение s_c берется при $x = c$, заштрихованные участки соответствуют эпюре завихренности при $s = \text{const}$.

Согласно теореме Томпсона имеет место равенство

$$\int_0^h \omega(s, u) du = 0. \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записи угловые скобки опускаются, так как они соответствуют лишь возмущенным составляющим параметров потока, которые имеют свое обозначение. Не нарушая общности, для простоты будем считать, что на отрезке $(0, h)$ значение $\omega(s, u)$ обращается в нуль не только на его концах, но и еще в одной точке при некотором значении $u = h_1$. Тогда согласно (2.1) с учетом (1.8) имеем

$$\int_0^{h_1} \omega(s, u) du = - \int_{h_1}^h \omega(s, u) du = \gamma_1(s) = O(\varepsilon q_\infty). \quad (2.2)$$

Интегралы по верхней и нижней частям области Ω_1 будем считать равными осредненным значениям погонной интенсивности вихрей, сбегаящих с передней и задней кромок дужки соответственно.

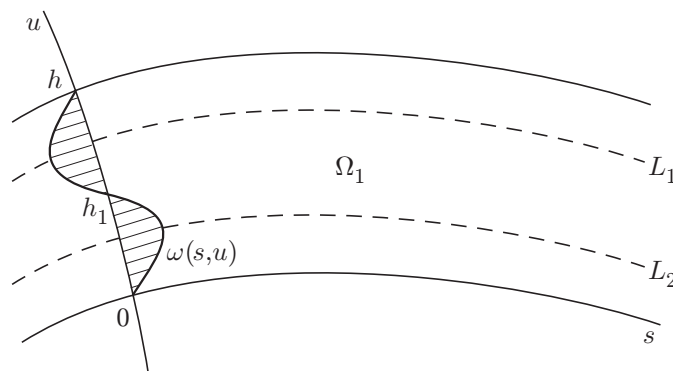


Рис. 2. Модель вихревого слоя за профилем

Кратный интеграл в левой части (1.10) для $\zeta \in \Omega_1$ представим в виде повторного интеграла

$$J_1 = \int_{sc}^{\infty} \left(\int_0^{h(sc)} \omega(\zeta) K_0(z_0, \zeta) du \right) ds.$$

Разложим функцию $K_0(z_0, \zeta)$ в ряд Тейлора по переменной u в окрестности значения $u = 0$ при произвольных $s > 0$:

$$K_0(z_0, \zeta) = K_0(z_0; s, 0) + \left. \frac{\partial K_0}{\partial u} \right|_{u=0} u + \dots$$

Полагая, что $h/c = O(\varepsilon)$ и учитывая (2.2), с точностью до величин второго порядка малости найдем

$$J_{11} = \int_0^h \omega(\zeta) K_0(z_0, \zeta) du = \left. \frac{\partial K_0}{\partial u} \right|_{u=0} \int_0^h \omega(s, u) u du.$$

Запишем выражения для центров завихренности частиц, сбегających с передней и задней кромок, при фиксированных значениях s_1 :

$$u_{11}(s) = \int_{h_1}^h \omega(s, u) u du / \int_{h_1}^h \omega(s, u) du,$$

$$u_{12}(s) = \int_0^{h_1} \omega(s, u) u du / \int_0^{h_1} \omega(s, u) du,$$

и введем величину, определяющую расстояние между этими центрами:

$$\delta_1(s) = u_{11}(s) - u_{12}(s) = O(\varepsilon c). \quad (2.3)$$

Тогда с учетом (2.2) получим

$$J_{11} = -\gamma_1(s) \delta_1(s) \left. \frac{\partial K_0}{\partial u} \right|_{u=0}.$$

Таким образом, вихревой слой Ω при $x > c$ моделируется двумя вихревыми линиями L_1 и L_2 , являющимися линиями контактных разрывов, величины которых равны $-\gamma_1(s)$ и $\gamma_1(s)$ соответственно, расположенными на расстоянии $\delta_1(s)$ друг от друга.

Используя соотношение

$$q_0(s) \gamma_1(s) = \text{const} \quad (2.4)$$

для линий контактного разрыва, а также соотношение

$$q_0(s) \delta_1(s) = \text{const},$$

которое следует из уравнения неразрывности, найдем

$$\gamma_1(s) = \gamma_{1\infty} q_{0\infty} / q_0(s), \quad \delta_1(s) = \delta_{1\infty} q_{0\infty} / q_0(s). \quad (2.5)$$

Здесь $q_0(s)$ — модуль скорости основного потока, комплексная скорость которого определяется по формуле

$$\bar{V}_0(z) = q_0(z) e^{-i\theta(z)} = \bar{V}_{0\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\gamma_{00}(s_0) ds_0}{z - \zeta_0(s_0)}, \quad \bar{V}_{0\infty} = q_{0\infty} e^{-i\alpha_0}, \quad (2.6)$$

$\gamma_{00}(s_0)$ — решение уравнения (1.9); $\gamma_{1\infty}, \delta_{1\infty}$ — интенсивность вихревого слоя L_2 (значение разрыва скорости на L_2) и расстояние между линиями L_1 и L_2 на бесконечном удалении от дужки соответственно.

Следовательно, двойной интеграл в левой части уравнения (1.10) сводится к интегралу от функции одной переменной, зависящей от двух неопределенных констант.

Покажем, что в рамках рассматриваемой модели может быть получена оценка потерь полного давления вследствие затраты энергии потока на образование вихревых следов. Для этого используем уравнение движения идеальной жидкости в форме уравнения Ламба — Громеки

$$\nabla(p + \rho q^2(z)/2) = \rho \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.7)$$

где выражение в скобках представляет собой полное давление

$$P = p + \rho q^2(z)/2.$$

Так как $\boldsymbol{\omega} = 0$ при $z \notin \Omega$, то из (2.7) следует

$$P = P_{-\infty} = \text{const} \quad \text{при } z \notin \Omega. \quad (2.8)$$

Определим проекцию уравнения (2.7) на нормаль к линиям тока основного течения

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \rho q(s, u)\omega.$$

Интегрируя это уравнение с учетом (2.2) и (2.8), получим

$$P(z) = P_{-\infty} - \Delta P(z) \quad \text{при } z \in \Omega,$$

где $\Delta P(z)$ — потери полного давления:

$$\Delta P(z) = \rho q_0(s)\gamma_1(s)[1 + O(\varepsilon)]. \quad (2.9)$$

Следует отметить, что из (2.9) с учетом (2.5) следует выражение для силы сопротивления дужки, обусловленной отрывом потока:

$$R_{x_1} = \rho q_{0\infty}\gamma_{1\infty}\delta_{1\infty}[1 + O(\varepsilon)], \quad (2.10)$$

которое согласно [5] следует также из теоремы об изменении количества движения.

2.2. *Модель течения в подобласти Ω_2 .* На рис. 3 схематически показана форма вихревого слоя в окрестности дужки Ω_2 , которая соответствует картине течения при отрывном обтекании тонких профилей [6], полученной методом визуализации (линия L_1 — геометрическое место центров завихренности частиц осредненного течения, продолжением ее является соответствующая линия в области Ω_1 ; линия L_3 — верхняя граница Ω_2). Для удобства

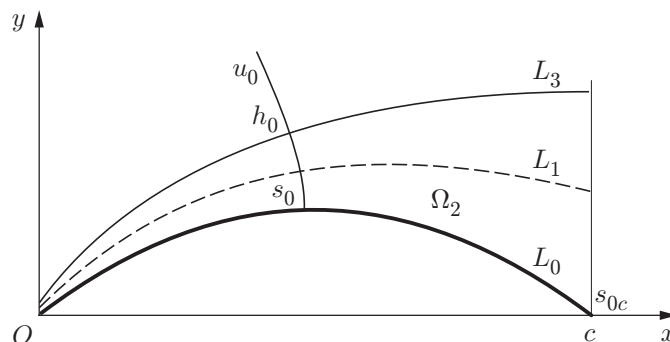


Рис. 3. Модель вихревого слоя над профилем

описания течения введена система ортогональных криволинейных координат (s_0, u_0) , координатные линии $u_0 = \text{const}$ которой совпадают с траекториями осредненного движения завихренных частиц ($u_0 = 0$ на контуре профиля L_0 , значение s_0 совпадает с дуговой координатой L_0). Аналогично (2.3) кратный интеграл в левой части (1.10) для Ω_2 представим в виде повторного интеграла по переменным s_0, u_0 и рассмотрим его внутренний интеграл по переменной u_0 :

$$J_{21} = \int_0^{h_0(s_0)} \omega(s_0, u_0) K_0(z_0, \zeta) du_0.$$

Здесь $h_0(s_0)$ — координата u_0 верхней границы Ω_2 .

С точностью до величин первого порядка малости компоненты комплексной координаты $\zeta = \xi + i\eta \in \Omega_2$ могут быть представлены в виде

$$\xi = \xi_0 - u_0 \sin \theta_0(\zeta_0), \quad \eta = \eta_0 + u_0 \cos \theta_0(\zeta_0), \quad \zeta_0(s_0) \in L_0.$$

Подставляя их в выражение для $K_0(z_0, \zeta)$, введенное в (1.6), найдем

$$J_{21} = \int_0^{h_0(s_0)} \omega(s_0, u_0) \frac{(x_0 - \xi_0) \cos \theta_0(z_0) + (y_0 - \eta_0) \sin \theta_0(z_0) + u_0 \sin [\theta_0(\zeta_0) - \theta_0(z_0)]}{(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 + 2u_0[(x_0 - \xi_0) \sin \theta_0(\zeta_0) - (y_0 - \eta_0) \cos \theta_0(\zeta_0)]} du_0.$$

Предполагая, что кривизна дужки $\varkappa(s_0) = O(1/c)$, преобразуем этот интеграл к виду

$$J_{21}(s_0) = \int_0^{h_0(s_0)} \omega(s_0, u_0) \left(K_0(z_0, \zeta_0) + u_0 [1 + O(\varepsilon)] \frac{1}{[(y_0 - \eta_0)^2 - (x_0 - \xi_0)^2]^2} \times \right. \\ \left. \times \{ [(y_0 - \eta_0)^2 - (x_0 - \xi_0)^2] \sin [\theta_0(\zeta_0) - \theta_0(z_0)] + \right. \\ \left. + 2(x_0 - \xi_0)(y_0 - \eta_0) \cos [\theta_0(\zeta_0) - \theta_0(z_0)] \} \right) du_0.$$

Аналогично (2.2) введем величину $\gamma_1(s_0)$, определяющую осредненное значение погонной интенсивности вихрей, сбегаящих с передней кромки, а также координату положения центров завихренности $u_0(s_0)$, которую будем обозначать $\delta_2(s_0)$, в виде

$$\gamma_1(s_0) = \int_0^{h_0(s_0)} \omega(s_0, u_0) du_0, \quad \delta_2(s_0) = \frac{1}{\gamma_1(s_0)} \int_0^{h_0(s_0)} u_0 \omega(s_0, u_0) du_0.$$

Тогда, вычисляя интеграл $J_{21}(s_0)$ с точностью до величин второго порядка малости, получим

$$J_{21}(s_0) = \gamma_1(s_0) \left(K_0(z_0, \zeta_0) + \frac{\partial K_0(z_0, \zeta_0)}{\partial u_0} \delta_2(s_0) \right).$$

Таким образом, вихревой слой Ω_2 , как и Ω_1 , для определения осредненной скорости течения с точностью до величин второго порядка малости может быть смоделирован вихревой линией L_1 . Однако имеет место различие моделей вихревых слоев Ω_1 и Ω_2 : согласно рис. 3 вихревая линия L_1 в области Ω_2 не может быть расположена вдоль линии тока основного потока, так как источник возникновения вихрей находится на передней кромке, а линия тока основного потока, проходящая через эту кромку, совпадает с L_0 . Отклонение траектории движения завихренных частиц от линии тока основного потока может быть

обусловлено не только влиянием второго приближения решения задачи, но и вязкостью жидкости, а также нестационарностью процесса отрыва частиц (особенно в окрестности передней кромки), так как они занимают лишь незначительную часть области Ω_2 .

Для определения положения линии L_1 с учетом условия непрерывности течения введем координаты $u_0(s_0) = \delta_2(s_0)$ ее концов:

$$\delta_2(0) = \varepsilon_0, \quad \delta_2(s_{0c}) = \delta_1(0), \quad (2.11)$$

а также комплексную скорость осредненного движения завихренных частиц

$$V_\omega(z) = q(z) e^{i\theta'(z)}, \quad z \in \Omega_2,$$

полагая, что модуль этой скорости равен модулю скорости осредненного течения. Отмеченное выше отличие траектории завихренных частиц от линий тока осредненного течения будем учитывать с помощью функции

$$\Delta\theta = \theta'(z) - \theta(z) = O(\varepsilon). \quad (2.12)$$

Согласно [7] величина завихренности частиц может быть определена по формуле

$$\omega(z) = -\frac{\partial q(z)}{\partial u'} + \frac{q(z)}{R(z)}, \quad \frac{1}{R(z)} = \frac{\partial \theta'(z)}{\partial s'}, \quad z \in \Omega_2,$$

где $s'(z)$ — направление осредненной скорости движения завихренных частиц; $u'(z)$ — направление нормали к $s'(z)$; $R(z)$ — радиус кривизны траектории движения завихренных частиц.

Вместе с тем в естественной системе отсчета завихренность равна

$$\omega(z) = -\frac{\partial q(z)}{\partial u} + q(z) \frac{\partial \theta(z)}{\partial s}$$

(u, s — направление нормали и касательной к линии тока осредненного течения). Исключая из этих уравнений $\omega(z)$ и переходя в полученном соотношении к общей системе координат (u, s) , с учетом (2.12) и уравнения неразрывности

$$q(z) \frac{\partial \theta(z)}{\partial u} + \frac{\partial q(z)}{\partial s} = 0 \quad (2.13)$$

найдем

$$\frac{\partial}{\partial s} [\Delta\theta(z)] = O\left(\frac{\varepsilon^2}{c}\right).$$

Уравнения траекторий осредненного движения завихренных частиц представим в виде зависимостей координат $u'_0(z)$ от их дуговых координат s_0 . Соответствующие зависимости удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u'_0(s_0)}{\partial s_0} = \theta'(z) - \theta_0(z_0) + O(\varepsilon^2).$$

Добавим к правой части этого уравнения функцию $\pm\theta(z)$ и возьмем частную производную по s . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u'_0(s_0)}{\partial s_0} \right) = \frac{\partial}{\partial s} [\theta(z) - \theta_0(z_0)] + O\left(\varepsilon^2 \frac{q_\infty}{c}\right).$$

Представив функцию $\theta(z)$ этого выражения в виде ряда Тейлора в окрестности z_0 , с учетом (2.13) найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial s_0^2} [u'_0(s_0)] = O\left(\frac{\varepsilon^2}{c}\right).$$

Нетрудно показать, что из этого соотношения следует уравнение для искомой функции $\delta_2(s_0)$ вида

$$\frac{\partial^2}{\partial s_0^2} [\delta_2(s_0)] = 0,$$

определяющей положение линии L_1 в Ω_2 с точностью до величин первого порядка малости. Решая это уравнение при условиях (2.11), найдем

$$\delta_2(s_0) = C_0 s_0 + \varepsilon_0, \quad C_0 = [\delta_1(0) - \varepsilon_0]/s_{0c}.$$

В дальнейшем будет показано, что для величины ε_0 имеет место оценка

$$\varepsilon_0 = O(\varepsilon^2 c),$$

поэтому с точностью до величин первого порядка малости и с учетом (2.5) положение линии L_1 определяется по формуле

$$\delta_2(s_0) = \frac{\delta_{1\infty} q_{0\infty}}{s_{0c} q_0(s_{0c})} s_0. \quad (2.14)$$

2.3. Модель течения в подобласти Ω_3 . При отрыве потока с тонкого профиля завихренные частицы, сбегаящие с передней кромки, образуют подобласть вихревого слоя Ω_3 , которая согласно условию Жуковского — Чаплыгина расположена в некоторой малой окрестности перед этой кромкой. По аналогии с областью Ω_2 будем моделировать вихревой слой в Ω_3 вихревой линией L_1 (штриховая линия на рис. 4), которая при $s_0 = 0$ совпадает с соответствующей линией в области Ω_2 . При этом в силу условия Жуковского — Чаплыгина касательная к L_1 в точке $z = 0$ совпадает с касательной к L_0 .

Введем дуговую координату s_1 линии L_1 с началом в точке ее сопряжения с L_0 ($z = 0$), а также декартову систему координат (ξ_1, η_1) , ось $O_1\xi_1$ которой направлена параллельно касательной к L_0 в точке $z = 0$, а ось $O_1\eta_1$ — по касательной к L_1 . Точка касания оси $O_1\eta_1$ с L_1 является началом координат этой системы.

Выполним оценку погонной интенсивности $\gamma_1(s_1)$ вихревой линии L_1 в точках $s_{10} = 0$ и s_{11} , s_{12} — дуговых координатах точек пересечения L_1 с осью $O\xi_1$ и отрезком $l_3 \perp O\xi_1$ (границей Ω_3) соответственно. Учитывая (1.7), отметим, что скорость основного течения, соответствующая обтеканию дужки со скоростью набегающего потока $\bar{V}_{0\infty}$, может быть определена по формуле (2.6).

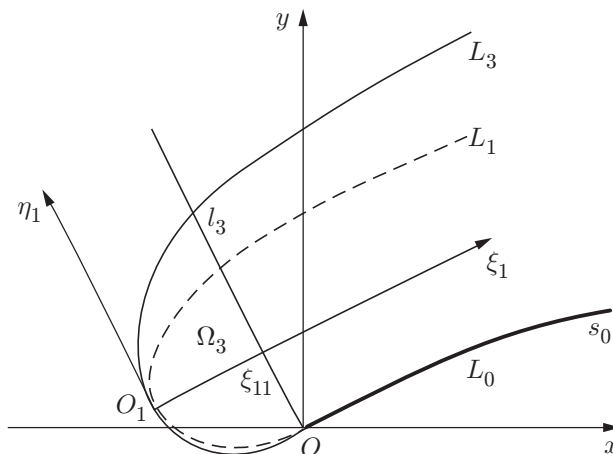


Рис. 4. Модель вихревого слоя перед профилем

Возмущенная составляющая скорости течения возникает вследствие набегания на дужку дополнительного потока со скоростью $\bar{V}'_{\infty}(z) = \varepsilon q_{0\infty} i e^{-i\alpha_0}$. Вихревую линию L_1 можно рассматривать как свободную границу раздела некоторой области Ω'_3 , примыкающей к контуру L_0 и к внешней по отношению к ней области течения жидкости.

Учитывая условие Жуковского — Чаплыгина, которое можно интерпретировать как условие непротекания начального участка L_1 , по аналогии со струйными моделями будем предполагать, что

$$\bar{V}'(z) = 0, \quad z \in \Omega'_3. \quad (2.15)$$

Однако при этом полагаем, что для основного течения линия L_1 проницаема, т. е. уравнение Гельмгольца, описывающее движение свободных вихрей в идеальной жидкости, для осредненного течения в области Ω_3 не выполняется. Это обстоятельство можно рассматривать как следствие образования вихрей при отрыве потока с передней кромки (что приводит к потере полного давления), в результате чего в области Ω_3 не выполняются условия теоремы Лагранжа [5].

Для обоснования предлагаемой модели течения в области Ω_3 проведем оценку некоторых его параметров. Постулируя возникновение потерь полного давления в этой области, что, по сути, является следствием условия Жуковского — Чаплыгина, из (2.9) с учетом (2.2) найдем

$$\Delta P = O(\varepsilon \rho q_{\infty}^2). \quad (2.16)$$

В рамках данной модели на эту величину скачкообразно изменяется полное давление при пересечении линии $L_1(s_1)$.

Рассмотрим соответствующее соотношение при пересечении L_1 в точке $s_1 = s_{12}$:

$$p^+(s_{12}) + \rho(V_{s_1}^+)^2/2 - \Delta P = p^-(s_{12}) + \rho(V_{s_1}^-)^2/2.$$

Здесь p^+ , $V_{s_1}^+$, p^- , $V_{s_1}^-$ — предельные значения статического давления и касательной составляющей скорости жидкости при приближении к L_1 сверху и снизу соответственно. Учитывая условие непрерывности статического давления на свободной границе и (2.16), из этого соотношения получим оценку величины γ_1 в точке $s_1 = s_{12}$ на верхней ветви L_1 :

$$-\gamma_1(s_{12}) = V^+(s_{12}) - V^-(s_{12}) = O(\varepsilon q_{0\infty}). \quad (2.17)$$

Так как $V^+(s_{12}) \approx q_0(s_{12}) - \gamma_1(s_{12})/2$, то из (2.17) следует, что в области Ω'_3 скорость жидкости порядка скорости основного потока, т. е. линия L_1 проницаема для основного потока, а оценка (2.17) не противоречит (2.15).

Аналогично в рамках предположения (2.15) получим оценку величины $\gamma_1(s_1)$ на нижней ветви L_1 в точке $s_1 = s_{10} = 0$:

$$\gamma_1(s_{10}) = 2q_0(s_{10})[1 + O(\varepsilon)].$$

В дальнейшем представляет интерес суммарная погонная интенсивность вихрей нижней и верхней ветвей L_1 по координате ξ при $\xi \rightarrow 0$.

Согласно [8] в малой окрестности начала координат O_1 системы (ξ_1, η_1) имеет место выражение для погонной интенсивности вихревой линии L_1 вида

$$\gamma_1(\xi) = A/\sqrt{\xi}. \quad (2.18)$$

3. Алгоритм определения гидродинамических характеристик. Согласно условию Жуковского — Чаплыгина в случае отрывного обтекания дужки $\gamma_0(s_0) < \infty$ при $s_0 \rightarrow 0$, поэтому подсосывающая сила, которая имеет место при безотрывном обтекании,

в рассматриваемом случае стремится к нулю. Отсюда следует, что аэродинамическое взаимодействие дужки с потоком при его отрыве с кромок дужки полностью определяется перепадом давления $\Delta p(s_0)$ на ее профиле. В частности, проекции равнодействующей аэродинамических сил на оси Ox_1 и Oy_1 могут быть определены по формулам

$$R_{x1} = - \int_{L_0} \Delta p(s_0) \sin \theta_1(s_0) ds_0, \quad R_{y1} = \int_{L_0} \Delta p(s_0) \cos \theta_1(s_0) ds_0,$$

где $\theta_1(s_0)$ — угол между касательной к L_0 в точке s_0 и осью Ox_1 . В рамках рассмотренной выше модели с учетом непрерывности статического давления при переходе через вихревую линию L_1 справедливо соотношение

$$\Delta p(s_0) = -\rho q(s_0)\gamma(s_0), \quad s_0 \in L_0, \quad (3.1)$$

где

$$q(s_0) = q_\infty \cos [\alpha - \theta_0(s_0)] + \frac{1}{2\pi} \int_{L_0} \gamma(\zeta_0) K_1(z_0, \zeta_0) d\zeta_0 + O(\varepsilon^2 q_\infty),$$

$$K_1(z_0, \zeta_0) = \frac{(x_0 - \xi_0) \sin \theta_0(z_0) - (y_0 - \eta_0) \cos \theta_0(z_0)}{(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2}, \quad \gamma(s_0) = \gamma_{00}(s_0) + \gamma'_0(s_0) + \gamma_1(s_0).$$

Следует отметить, что (3.1) отличается от формулы Жуковского в малом тем, что помимо функций интенсивности присоединенных вихрей $\gamma_{00}(s_0) + \gamma'_0(s_0)$ функция $\gamma(s_0)$ содержит также функцию интенсивности свободных вихрей $\gamma_1(s_0)$.

Покажем, что с точностью до величин второго порядка малости функция $\gamma(s_0)$, полностью определяющая $\Delta p(s_0)$, может быть найдена из уравнения (1.6), которое с помощью модели вихревого слоя Ω , рассмотренной в п. 2, преобразуется к виду

$$\int_L \gamma(s_0) K_0(z_0, \zeta_0) ds_0 = F(z_0) + 2\pi q_\infty \sin [\alpha - \theta_0(z_0)], \quad (3.2)$$

$$z_0, \zeta_0 \in L = L_0 \cup \Delta L_0.$$

Здесь ΔL_0 — отрезок касательной к L_0 в точке $z_0 = 0$ (длиной l_0) между точкой $z = 0$ и точкой ее пересечения с осью $O_1\eta_1$;

$$F(z_0) = \int_{L'} G(z_0, \zeta_0) ds_0, \quad G = g(s_0) \frac{\partial K_0(z_0, \zeta)}{\partial u_0} \Big|_{\zeta=\zeta_0}, \quad L' = L \cup L_2,$$

$$\begin{aligned} \gamma(s_0) &= \gamma_1^+ + \gamma_1^-, & g(s_0) &= \gamma_1^+ u_0^+ + \gamma_1^- u_0^- & \text{при } -l_0 \leq s_0 < 0, \\ \gamma(s_0) &= \gamma'_0 + \gamma_1 + \gamma_{00}, & g(s_0) &= \gamma_1 \delta_0 & \text{при } 0 \leq s_0 \leq s_{0c}, \end{aligned}$$

$\gamma_1^+, u_0^+, \gamma_1^-, u_0^-$ — интенсивность и координаты u_0 точек верхней и нижней ветвей вихревой линии L_1 соответственно; L_2 — отрезок линии тока основного потока, начало которого расположено на задней кромке профиля.

Следует отметить, что уравнение (3.2) можно рассматривать как условие непротекания жидкости через дугу L . При этом непротекание жидкости через отрезок ΔL_0 — переднюю часть этой дуги — является следствием условия Жуковского — Чаплыгина о плавном сходе жидкости с передних кромок тонких профилей при их отрывном обтекании.

Отметим также, что в уравнении (3.2) помимо искомой функции $\gamma(s_0)$ неизвестной является также функция $F(z_0)$ в правой его части. Выполним оценку величины $F(z_0)$. С этой целью, учитывая (2.4) и (2.14), представим ее в виде

$$F(\sigma) = q_{0\infty}^2 \gamma_{1\infty} \delta_{1\infty} J(\sigma),$$

$$J(\sigma) = \int_L \frac{f(s_0)}{q_0^2(s_0)} \frac{\partial K(z_0, \zeta_0)}{\partial u_0} ds_0, \quad f(s_0) = \begin{cases} q_0(s_0)s_0/q(s_{0c})s_{0c}, & -l_0 \leq s_0 \leq s_{0c}, \\ 1, & s_0 > s_{0c}. \end{cases}$$

Подынтегральная функция $J(\sigma)$ при $z = \zeta_0$ имеет особенность. Для определения порядка этой особенности рассмотрим функцию

$$\left. \frac{\partial K_0(z_0, \zeta)}{\partial u_0} \right|_{\zeta=\zeta_0} = \frac{1}{[(y_0 - \eta_0)^2 + (x_0 - \xi_0)^2]^2} \{ [(y_0 - \eta_0)^2 + (x_0 - \xi_0)^2] \sin [\theta_0(\zeta_0) - \theta_0(z_0)] + 2(x_0 - \xi_0)(y_0 - \eta_0) \cos [\theta_0(\zeta_0) + \theta_0(z_0)] \}.$$

При $\zeta_0 \rightarrow z_0$ ($\zeta_0 \in L$, $z_0 \in L$) имеют место соотношения

$$y_0 - \eta_0 = (x_0 - \xi_0) \operatorname{tg} \theta_0(\zeta_0), \quad \theta_0(z_0) = \theta_0(\zeta_0) + \frac{x_0 - \xi_0}{R(z_0) \cos \theta_0(\zeta_0)},$$

где $R(z_0)$ — радиус кривизны кривой L в точке z_0 . Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial K_0(z_0, \zeta)}{\partial u_0} \right|_{\zeta=\zeta_0} = \frac{\cos \theta_0(z_0)}{R(z_0)(x_0 - \xi_0)},$$

и, таким образом, интеграл $F(z_0)$ является интегралом типа Коши, который вычисляется в смысле главного значения. Плотность этого интеграла на левом конце контура интегрирования (при $s_0 \rightarrow -l_0$) в соответствии с (2.18) имеет степенную особенность порядка $1/2$. Поэтому с учетом того, что при $s_0 \geq c$ имеет место оценка

$$\left. \frac{\partial K_0(z_0, \zeta_0)}{\partial u_0} \right|_{\zeta=\zeta_0} = O\left(\frac{c^2}{s_0^2}\right),$$

согласно [9] интеграл $J(\sigma)$ является всюду ограниченной функцией, а величина $F(\sigma)$ с учетом (1.8) и (2.3) имеет оценку

$$F(\sigma) = O(\varepsilon^2 q_\infty). \quad (3.3)$$

Учитывая это обстоятельство, функцию $\gamma(s_0)$ представим в виде суммы двух составляющих:

$$\gamma(s_0) = \gamma_{11}(s_0) + \gamma_{12}(s_0), \quad (3.4)$$

которые должны удовлетворять уравнениям

$$\int_L \gamma_{11}(s_0) K_0(z_0, \zeta_0) ds_0 = 2\pi q_\infty \sin [\alpha - \theta_0(z_0)]; \quad (3.5)$$

$$\int_L \gamma_{12}(s_0) K_0(z_0, \zeta_0) ds_0 = F(z_0). \quad (3.6)$$

Из выражения для ядра $K_0(z_0, \zeta_0)$ этих уравнений, полученного при выводе уравнений (1.6) и (1.9), следует, что (3.5) и (3.6) представляют собой сингулярные интегральные уравнения первого рода, эквивалентные уравнению, описывающему стационарное безотрывное обтекание криволинейных тонких профилей. Согласно (2.18) решение этих уравнений ищется в классе функций, не ограниченных на конце $s_0 = -l_0$ контура $L = L_0 \cup \Delta L_0$ и ограниченных на конце $s_0 = s_{0c}$. При этом сначала ищется решение уравнения (3.5), правая часть которого определена, а затем — решение уравнения (3.6), правая часть которого, как показано ниже, с точностью до величин второго порядка малости определяется с использованием решения уравнения (3.5).

Рассмотрим решение уравнения (3.5). Его вид позволяет интерпретировать функцию $\gamma_{11}(s_0)$ как интенсивность вихревого слоя, моделирующего контур L при его безотрывном обтекании потоком, набегающим под углом атаки α .

Согласно гидродинамической теории тонких профилей [8] величины

$$(R_L)_{x_1} = \rho \int_L q_{11}(s_0) \gamma_{11}(s_0) \sin \theta_1(s_0) ds_0, \quad (R_L)_{y_1} = -\rho \int_L q_{11}(s_0) \gamma_{11}(s_0) \cos \theta_1(s_0) ds_0$$

являются компонентами вектора \mathbf{R}_L :

$$\mathbf{R}_L = \mathbf{R}_J - \mathbf{Q}$$

(\mathbf{R}_J — вектор силы Жуковского; \mathbf{Q} — вектор подсосывающей силы). Проекции этих векторов на оси Ox_1 и Oy_1 равны

$$(R_J)_{x_1} = 0, \quad (R_J)_{y_1} = -\rho q_\infty \Gamma_{11}, \quad \Gamma_{11} = \int_L \gamma_{11}(s_0) ds_0,$$

$$(R_Q)_{x_1} = -(\pi/4)\rho A^2 \cos[\alpha - \theta_0(0)], \quad (R_Q)_{y_1} = (\pi/4)\rho A^2 \sin[\alpha - \theta_0(0)].$$

Здесь A — коэффициент в выражении (2.18) для особенности функции $\gamma_{11}(s_0)$ на передней кромке L , которая с учетом обозначений в уравнении (3.2) имеет вид

$$\gamma_{11}(s_0) = A/\sqrt{s_0 + l_0}, \quad s_0 \in L. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что

$$(R_L)_{x_1} = (\pi/4)\rho A^2 \cos[\alpha - \theta_0(0)], \quad (R_L)_{y_1} = -\rho\{q_\infty \Gamma_{11} + (\pi/4)A^2 \sin[\alpha - \theta_0(0)]\}. \quad (3.8)$$

В силу малого отклонения угла α от угла безударного входа α_0 ($\alpha - \alpha_0 = \varepsilon$) коэффициент A в выражении (3.7) имеет оценку

$$A/(q_\infty \sqrt{c}) = O(\varepsilon), \quad (3.9)$$

которая с учетом (2.10) и (3.8) согласуется с (3.3). По аналогии с (3.4) компоненты искомого вектора силы представим в виде

$$R_{x_1} = R_{x_{1,1}} + R_{x_{1,2}}, \quad R_{y_1} = R_{y_{1,1}} + R_{y_{1,2}}. \quad (3.10)$$

Из (3.8) с учетом (3.9) найдем

$$R_{x_{1,1}} = 0, \quad R_{x_{1,2}} = (\pi/4)\rho A^2 \cos[\alpha - \theta_0(0)][1 + O(\varepsilon)]. \quad (3.11)$$

Следует отметить, что рассмотренная выше величина $(R_L)_{y_1}$ отличается от соответствующей компоненты силы R_{y_1} , действующей на контур профиля L_0 , так как контур L несколько отличается от профиля L_0 . Учитывая, что $L = L_0 \cup \Delta L_0$, рассмотрим часть величины $(R_L)_{y_1}$, которая соответствует отрезку ΔL_0 контура L :

$$\Delta(R_L)_{y_1} = -\rho q_0(0) \Delta\Gamma, \quad \Delta\Gamma = \int_{\Delta L_0} \gamma_{11}(s_0) ds_0.$$

С учетом (3.6) получим $\Delta\Gamma = 2A\sqrt{l_0}$. Так как на отрезке ΔL_0 функция $\gamma(s_0) = \gamma_1^+(s_0) + \gamma_1^-(s_0)$, то, учитывая (2.17) и (2.18), найдем

$$\sqrt{l_0} = \frac{A}{2q_0(0)} [1 + O(\varepsilon)].$$

В результате имеем

$$\Delta(R_L)_{y_1} = -\rho A^2 [1 + O(\varepsilon)]. \quad (3.12)$$

(Из выражения для $\sqrt{l_0}$ с учетом (3.9) следует оценка $\delta_0(0) = \varepsilon_0 = O(\varepsilon^2 c)$, которая априори была использована при выводе формулы (2.14).)

Рассмотрим уравнение (3.6). С учетом (2.10) и (3.11) правую часть этого уравнения с точностью до величин второго порядка малости представим в виде

$$F(z_0) = -(\pi/4)A^2 \cos[\alpha - \theta_0(0)]J(z_0).$$

С использованием решения этого уравнения из (3.1) найдем составляющую подъемной силы

$$R'_{y_{1,2}} = -\rho \int_{L_0} [q_{11}(s_0)\gamma_{12}(s_0) + q_{12}(s_0)\gamma_{11}(s_0)] \cos \theta_1(s_0) ds_0. \quad (3.13)$$

В результате, учитывая (3.8)–(3.13), с точностью до величин второго порядка малости получим

$$\begin{aligned} R_{x_1} &= (\pi/4)\rho A^2 \cos[\alpha - \theta_0(0)] = |Q| \cos[\alpha - \theta_0(0)]; \\ R_{y_1} &= -\rho \{q_{\infty} \Gamma_{11} + R'_{y_{1,2}} - A^2 [(\pi/4) \sin[\alpha - \theta_0(0)] + 1]\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, время расчета осредненных аэродинамических характеристик тонких профилей в рамках данной модели на два порядка меньше, чем при использовании методов, основанных на решении эволюционной задачи [1]. Следует отметить, что сила аэродинамического сопротивления тонких профилей, обусловленная отрывом потока с их кромок, пропорциональна величине подсосывающей силы, которая присутствует в модели безотрывного обтекания профиля.

4. Верификация предложенной модели. Геометрическая модель вихревого следа и оценка его параметров, проведенная в п. 2, качественно хорошо согласуются с результатами наблюдений, представленными в [6]. Сравнение количественных результатов расчета

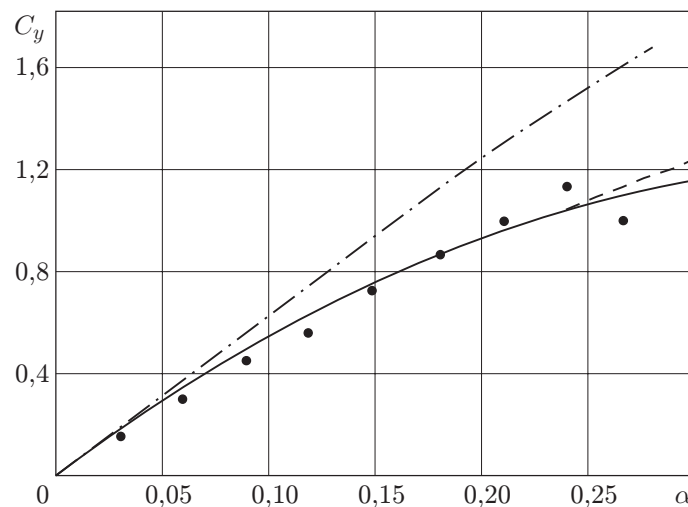


Рис. 5. Результаты тестового расчета:

сплошная линия — расчет предложенным методом; штрихпунктирная — расчет по теории безотрывного обтекания; штриховая — осредненное значение C_y , полученное при решении эволюционной задачи [1]; точки — результаты эксперимента для профиля с геометрическими характеристиками, близкими к геометрическим характеристикам пластины [3]

аэродинамических характеристик тонких профилей в рамках данной модели с результатами расчета другим методом и с экспериментальными данными проведено для случая обтекания пластины. На рис. 5 представлена зависимость коэффициента подъемной силы пластины C_y от угла атаки α . Следует отметить, что зависимость $C_y(\alpha)$, построенная с помощью формулы (3.14), в рассматриваемом случае, когда $\alpha_0 = 0$, $\theta_0(s_0) = 0$ и $\alpha = \varepsilon$, с использованием теории тонкого крыла [8] преобразуется к аналитическому выражению вида

$$C_y = 2\pi \sin \varepsilon (1 - (4/\pi) \sin \varepsilon).$$

Из рис. 5 следует, что результаты расчета в рамках данной модели удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными в достаточно широком диапазоне углов атаки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
2. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
3. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Федоров Р. М., Ништ М. И. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
6. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.
7. Милн-Томсон Л. М. Гидродинамика. М.: Мир, 1964.
8. Горелов Д. Н. Методы решения плоских задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

*Поступила в редакцию 3/II 2005 г.,
в окончательном варианте — 22/VII 2005 г.*
