О ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗАМКНУТЫХ КАВИТАЦИОННЫХ ПОЛОСТЕЙ

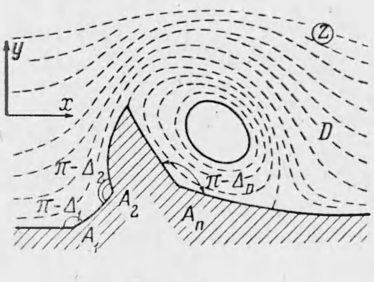
А. Е. Хоперсков

(Новосибирск)

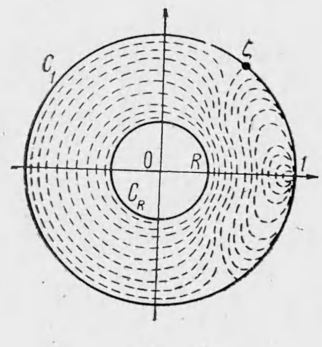
Рассматривается кавитационное обтекание тел по схеме, предложенной М. А. Лаврентьевым [1],— за телом образуется замкнутая область, в которой жидкость находится во вращении; внутри этой области заключена кавитационная полость с постоянной скоростью на границе; течение безвихревое и скорость всюду конечная (фиг. 1). Ставится задача: построить течение по заданной схеме, т. е. найти комплексный потенциал $w(z)$ течения, если заданы внешняя граница течения и число кавитации. Внутренняя граница (граница каверны) заранее не известна, но на ней заданы два условия — она является линией тока и скорость на ней постоянна.

Ниже рассматривается частный случай этой задачи — поток в бесконечной области с криволинейной границей. Изложенный метод применим и для решения аналогичной задачи о течении в криволинейном канале.

Пусть двусвязная область течения D отображается на круговое кольцо $R \leqslant |\zeta| \leqslant 1$; граница каверны переходит на внутреннюю (фиг. 2) окружность C_R. Для определенности будем считать, что точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Найдем комплексный потенциал $w(z)$ течения в кольце, считая, что в точке $\zeta=1$ помещен дублет, а окружности C_R и C_1 будут линиями тока

$$w(\zeta) = Qi\left[\frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{2n}}{1-R^{2n}}(\zeta^n - \zeta^{-n}) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\zeta\right] \qquad (1)$$

Здесь Q — масштабный множитель, $Q\Gamma$ — циркуляция скорости по границе каверны, $Q\,[{}^1/_2 - (\Gamma\,/\,2\pi)\ln R]$ — расход по контуру, соединяющему C_1 с C_R.

В дальнейшем потребуется производная

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{Qi}{\zeta}\left[-\frac{\zeta}{(\zeta-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nR^{2n}}{1-R^{2n}}(\zeta^n + \zeta^{-n}) + \frac{\Gamma}{2\pi}\right] \qquad (2)$$

Перейдем к переменной $u = -(iK/\pi)\ln\zeta$, где K находится из соотношения

$$R = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right) \qquad \left(K'(k) = K\left(\sqrt{1-k^2}\right)\right)$$

Здесь K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода. Тогда ряд в выражении (2) можно просуммировать

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{Qi}{\zeta}\left[\frac{1}{4}\csc^2\frac{\pi u}{2K} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nR^{2n}}{1-R^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{K} + \frac{\Gamma}{2\pi}\right] =$$
$$= \frac{Qi}{\zeta}\left[\frac{K^2}{\pi^2}\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} - \frac{K(K-E)}{\pi^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\right] - \frac{Qi}{\zeta}\frac{K^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u_0}\right] \tag{3}$$

Здесь $E = E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, $\mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u, k)$ — эллиптический синус Якоби, а u_0 — вспомогательный параметр, связанный с Γ соотношением

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u_0} = 1 - \frac{E}{K} - \frac{\pi\Gamma}{2K^2} \tag{4}$$

Параметр u_0 определяет положение критических точек течения (точек, где $dw/d\zeta = 0$); в зависимости от величины Γ, течение может иметь либо две критические точки на C_1, либо две критические точки на C_R, либо одну критическую точку внутри течения.

Если граница имеет угловую точку, в которой обращенный к течению угол больше π, то при обычном, некавитационном обтекании в этой точке скорость обращается в бесконечность. Чтобы избежать этого, согласно принятой схеме будем считать такие точки точками разветвления потока (критическими точками) и рассматривать течения с критическими точками на внешней границе течения.

Опираясь на найденную функцию $w(\zeta)$, построим функцию $z = f(\zeta)$, отображающую кольцо $R \leqslant |\zeta| \leqslant 1$ на физическую область течения D. Для решения поставленной задачи достаточно определить комплексную скорость течения

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}$$

Рассмотрим функцию $\chi(\zeta) = U(r, t) + iV(r, t)$ такую, что

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{e^{\chi(\zeta)}}{(\zeta-1)^2} \qquad (\zeta = re^{it}) \tag{5}$$

Тогда из (5) получим

$$U(r, t) = \ln\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| + \ln(1 - 2r\cos t + r^2)$$
$$V(r, t) = \arg dz - \arg d\zeta + 2\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin t}{r\cos t - 1}$$

Имеем

$$|dz/d\zeta| = |dz/dw| \cdot |dw/d\zeta|$$

Но на поверхности каверны $|dw/dz| = v_0$, и, следовательно,

$$U(R, t) = \ln|dw/dz|_{r=R} - \ln v_0 + \ln(1 - 2R\cos t + R^2) \tag{6}$$

будет известной функцией от t.

На контуре C_1 имеем $\arg dz = \theta$ — углу касательной к контуру с осью x, а $\arg d\zeta = t + {}^1/_2\,\pi$, следовательно,

$$V(1, t) = \theta - {}^3/_2\,\pi \tag{7}$$

Угол θ как функция от t не известен. Если временно предположить, что функция $V(1, t)$ найдена, можно получить выражение для функции $\chi(\zeta)$. Это дает возможность свести задачу к решению интегрального уравнения.

Регулярная в кольце $R < |\zeta| < 1$ однозначная функция $\chi(\zeta)$, если известны ее действительная часть $U(R, t)$ на окружности C_R и мнимая часть $V(1, t)$ на C_1, дается следующим выражением:

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(R, t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(R, t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{1+R^{2n}}[\cos nt\,(\zeta^n + \zeta^{-n}) -$$

$$- i\sin nt\,(\zeta^n - \zeta^{-n})]\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(1, t)\,dt +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} V(1, t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{1+R^{2n}}\left[\cos nt\left(\left(\frac{\zeta}{R}\right)^n + \left(\frac{\zeta}{R}\right)^{-n}\right) -\right.$$

$$\left.- i\sin nt\left(\left(\frac{\zeta}{R}\right)^n - \left(\frac{\zeta}{R}\right)^{-n}\right)\right]dt \qquad (8)$$

Если ввести переменную $u = -i(K/\pi)\ln\zeta$, то

$$\zeta^n + \zeta^{-n} = 2\cos\frac{n\pi u}{K}, \qquad \zeta^n - \zeta^{-n} = 2\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Так как $\ln R = -\pi K'/K$, то

$$\left(\frac{\zeta}{R}\right)^n + \left(\frac{\zeta}{R}\right)^{-n} = 2\cos\frac{n\pi}{K}(u - iK')$$

$$\left(\frac{\zeta}{R}\right)^n - \left(\frac{\zeta}{R}\right)^{-n} = 2i\sin\frac{n\pi}{K}(u - iK')$$

Подставляя эти выражения в формулу для $\chi(\zeta)$, получим

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(R, t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(R, t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2R^n}{1+R^{2n}}\cos n\left(t - \frac{\pi u}{K}\right)dt +$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(1, t)\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(1, t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2R^n}{1+R^{2n}}\cos n\left(t - \frac{\pi}{K}(u - iK')\right)dt$$

Но

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{1+R^{2n}}\cos nx = \frac{K}{\pi}\,\mathrm{dn}\,\frac{Kx}{\pi} - \frac{1}{2}$$

Поэтому

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(R, t)\,\mathrm{dn}\left(\frac{Kt}{\pi} - u\right)\frac{K}{\pi}dt + \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} V(1, t)\,\mathrm{dn}\left(\frac{Kt}{\pi} - u + iK'\right)\frac{K}{\pi}dt \qquad (9)$$

Здесь $\mathrm{dn}\,u = \mathrm{dn}(u, k)$ — дельта амплитуды, эллиптическая функция Якоби. При $R < |\zeta| < 1$ интегралы в формуле (9) не имеют особенностей, но при $|\zeta| = R$ первый из них, а при $|\zeta| = 1$ второй являются сингулярными и в этих случаях в формулу (9) подставляются их главные значения.

Теперь вернемся к отысканию функции $V(1, t)$ (7). Рассматривая угол θ как функцию длины дуги s контура, получим

$$\frac{dV(1, t)}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \left(\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \cdot \left|\frac{d\zeta}{dt}\right| = \frac{\exp U(1, t)}{2(1 - \cos t)} \quad \text{при } r = 1\right)$$

Считая кривизну границы $d\theta / ds = \varkappa(s)$ заданной, получим

$$\frac{dV(1, t)}{dt} = p\,[t, U(1, t)]\, e^{u(1,t)} \tag{10}$$

где $p\,[t, U(1, t)]$ — оператор над функцией $U(1, t)$

$$p[t, U(1, t)] = \frac{\varkappa[s(t)]}{2(1 - \cos t)} = \frac{1}{2(1 - \cos t)}\varkappa\left[s(t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{\exp U(1, t)\, dt}{2(1 - \cos t)}\right]$$

Из формулы (9) найдем $U(1, t)$

$$U(1, t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dV(1, \tau)}{d\tau}\ln\left|\frac{1 - \operatorname{dn}[(\tau - t)K/\pi]}{\operatorname{sn}[(\tau - t)K/\pi]}\right| d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(R, \tau)\operatorname{dn}\frac{K}{\pi}(\tau - t)\frac{K}{\pi}\, d\tau$$

Подставляя сюда $dV(1, t) / dt$ из (10), получим нелинейное интегральное уравнение для определения $U(1, t)$

$$U(1, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p\,[\tau, U(1, \tau)]\ln\left|\frac{\operatorname{sn}[(\tau - t)K/\pi]}{1 - \operatorname{dn}[(\tau - t)K/\pi]}\right| e^{U(1,\tau)}\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(R, \tau)\frac{K}{\pi}\operatorname{dn}\frac{K(\tau - t)}{\pi}\, d\tau \tag{11}$$

Определив $U(1, t)$, подставив ее в (10) и проинтегрировав, получим неизвестную функцию $V(1, t)$.

Рассмотрим функцию

$$y(t) = U(1, t) - g(t) \qquad \left(g(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(R, \tau)\frac{K}{\pi}\operatorname{dn}\frac{K(\tau - t)}{\pi}\, d\tau\right)$$

Здесь $g(t)$ — известная функция, и, переходя к безразмерным величинам, получим для $y(t)$ следующее уравнение:

$$y(t) = \lambda\int_0^{2\pi} K(\tau, t, y(\tau))\, e^{y(\tau)}\, d\tau \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\pi}\frac{Q}{lv_0}\right) \tag{12}$$

Здесь безразмерные величины

$$K(\tau, t, y(\tau)) = p_1\,[\tau, g(\tau) + y(\tau)]\ln\left|\frac{\operatorname{sn}[(\tau - t)K/\pi]}{1 - \operatorname{dn}[(\tau - t)K/\pi]}\right| e^{g_1(\tau)}$$

$$p_1\,[t, u(t)] = \frac{l}{2(1 - \cos t)}\varkappa\left[s(t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{\exp u(t)\, dt}{2(1 - \cos t)}\right]$$

$$g_1(t) = g(t) + \ln v_0 - \ln Q$$

не зависят от параметров v_0 (скорости на поверхности каверны), Q (расхода) и l (характерного размера обтекаемого тела); λ — безразмерный параметр (неизвестная величина, так как расход Q заранее не известен).

Кроме λ, неизвестной является и величина Γ в формуле (1). Для их определения используем условие однозначности функции $z = f(\zeta)$; для этого необходимо и достаточно, чтобы по любому замкнутому контуру L, лежащему в кольце $R \leqslant |\zeta| \leqslant 1$

$$\oint \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0 \tag{13}$$

за контур L примем C_R, используя (4), получим

$$\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{r=R} = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{r=R} \exp\left[iV(R, t) + 2i \operatorname{arctg} \frac{R \sin t}{1 - R\cos t}\right]$$

а из (8)

$$V(R, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V(1, \tau)\, \mathrm{dn}\frac{K}{\pi}(\tau - t)\frac{K}{\pi}d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[U(R, \tau) - U(R, t)]\frac{\mathrm{cn}\,[(\tau - t)K/\pi]}{\mathrm{sn}\,[(\tau - t)K/\pi]}\frac{K}{\pi}d\tau$$

Здесь второй интеграл существует, так как $U(R, t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Итак, условие (13) дает два уравнения, которых вместе с (12) достаточно для нахождения решения $U(1, t)$ и параметров λ и Γ. Кроме $Q / v_0 l$, в задаче имеется еще безразмерный параметр

$$\frac{v_0}{v_\infty} = \sqrt{1 + \sigma} \qquad \left(\sigma = \frac{p_\infty - p_0}{{}^1/_2\, \rho v_\infty^2} — \text{| число кавитации |}\right)$$

где v_∞ — скорость потока на бесконечности. От этого отношения зависит параметр R, причем R — велико при малых v_0 / v_∞, и наоборот. Так как выразить R через v_0 / v_∞ и другие параметры очень трудно, будем рассматривать течения при различных R и определять v_0 / v_∞, которые при этом получаются. Легко получить

$$v_\infty = e^{-U(1,0)} \lim_{\zeta\to 1}(\zeta - 1)^2\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| = Qe^{-U(1,0)}$$

Интересно рассмотреть случай, когда граница течения имеет угловые точки. Пусть им соответствуют $\zeta_k = \exp(it_k)$, а область течения D образует в этих точках углы $\pi - \Delta_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ (фиг. 1).

Выразим через дельта-функцию кривизну контура

$$\varkappa\,[s(t)] = \varkappa^*\,[s(t)] + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \delta\,[s(t) - s(t_k)]$$

где $\varkappa^*\,[s(t)]$ — кусочно-непрерывная функция. Для

$$y^*(t) = U(1, t) - g(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \Delta_k \ln\left|\frac{\mathrm{sn}\,[(t_k - t)K/\pi]}{1 - \mathrm{dn}\,[(t_k - t)K/\pi]}\right| = U(1, t) - g^*(t)$$

получим интегральное уравнение, аналогичное (12)

$$y^*(t) = \lambda \int_0^{2\pi} K^*(\tau, t, y^*(\tau))\, e^{y^*(\tau)}\, d\tau \tag{14}$$

где

$$K^*(\tau, t, y^*(\tau)) = p_1^*[\tau, g^*(\tau) + y^*(\tau)] \ln \left| \frac{\operatorname{sn}[(\tau - t) K/\pi]}{1 - \operatorname{dn}[(\tau - t) K/\pi]} \right| e^{g_1(\tau)} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{sn}[(t_k - \tau) K/\pi]}{1 - \operatorname{dn}[(t_k - \tau) K/\pi]} \right|^{\frac{\Delta_k}{\pi}}$$

$$p_1^*[t, u(t)] = \frac{l}{2(1 - \cos t)} \varkappa^* \left[s(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\exp u(t)\, dt}{2(1 - \cos t)} \right]$$

остальные обозначения совпадают с обозначениями формулы (12).

Вопрос о существовании решения задачи осложняется тем, что уравнение (14) приходится решать совместно с условиями (13). Если оставить пока в стороне условия (13), считая известными λ и Γ, можно сделать некоторые выводы о разрешимости основного уравнения (14).

Функция $K^*(\tau, t, y^*(\tau))$ слабо зависит от $y^*(\tau)$, так как

$$\frac{\min \varkappa^*}{2(1 - \cos t)} \leqslant p_1^*[t, U(1, t)] \leqslant \frac{\max \varkappa^*}{2(1 - \cos t)}$$

и имеет интегрируемые особенности типа $\ln|x|$ и $|x|^{-\Delta_k/\pi}$ при $x \to 0$, так как $\Delta_k < \pi$ (для этого условимся не рассматривать течения с областью D, образующей нулевой угол).

Поэтому, не зная решения, можно оценить интеграл

$$\int_0^{2\pi} K^*(\tau, t, y^*(\tau))\, d\tau = M(t)$$

Предположим для простоты, что криволинейная часть границы расположена в ограниченной области. Тогда будет конечной величина $\max M(t)$ на $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Решение уравнения (14) может быть получено методом последовательных приближений, если

$$\lambda \max M(t) < e^{-1} \quad \text{на } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Это неравенство выполняется при $\varkappa^*(s) < 0$, т. е. если все криволинейные участки обращены выпуклостью в сторону течения, а также при достаточно малом

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varkappa^*(s)|\, ds$$

т. е. при достаточно малом вкладе, вносимом криволинейными участками в изменение угла контура с осью $\varkappa$.

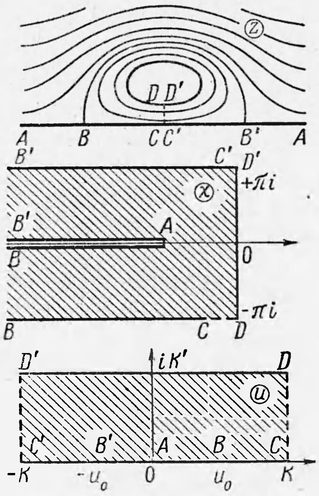
Рассмотрим наиболее простой случай — отсутствие у контура криволинейных участков. Так как $\varkappa^*(s) \equiv 0$, то $y^*(t) \equiv 0$, и мы избавлены от необходимости решать интегральное уравнение (14). В этом случае $V(1, t)$ — ступенчатая функция, определенная с точностью до неизвестных параметров t_k, определяющих положения угловых точек.

В этом случае второй интеграл в формуле (9) принимает вид

$$\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} V(1,\,t)\,\mathrm{dn}\left(\frac{Kt}{\pi}-u+iK'\right)\frac{K}{\pi}\,dt=-\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\,\mathrm{am}\left(\frac{Kt_k}{\pi}-u+iK'\right) \tag{15}$$

где $\mathrm{am}\,u=\mathrm{am}\,(u,\,k)$ — амплитуда Якоби.

Легко видеть, что первый интеграл в формуле (9) дает решение задачи об обтекании пузырька над ровным дном (фиг. 3). Ее решение можно найти в приложении к работе Кокса и Клайдена [2]. Ниже оно дается в принятых ранее обозначениях.



Фиг. 3

Если сделать разрез CD в области течения, показанной на фиг. 3 (z), то область изменения функции

$$\chi=\ln\left(\frac{1}{v_0}\frac{dw}{dz}\right)$$

будет иметь вид, показанный на фиг. 3 (χ). Отображая эту область на параметрический прямоугольник (фиг. 3 (u))

$$u=-\frac{iK}{\pi}\ln\zeta$$

$$\left(R\leqslant|\zeta|\leqslant 1,\ -\pi\leqslant\arg\zeta\leqslant\pi,\quad R=\exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right)\right)$$

получим

$$\frac{dw}{dz}=v_0k^2\,\frac{\mathrm{sn}^2u_0-\mathrm{sn}^2u}{(\mathrm{dn}\,u_0+\mathrm{dn}\,u)^2}$$

Используя выражение (3) для $dw\,/\,d\zeta$, найдем

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{dw}{d\zeta}\frac{dz}{dw}=i\,\frac{QK^2}{\pi^2v_0k^2}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_0+\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u_0\,\mathrm{sn}\,u}\right)^2$$

Эта формула дает решение задачи о пузырьке над ровным дном и одновременно позволяет вычислить первый интеграл в формуле (9)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} U\,(R,\,t)\,\mathrm{dn}\left(\frac{Kt}{\pi}-u\right)\frac{K}{\pi}\,dt=\ln\left[i\,\frac{QK^2}{\pi^2v_0k^2}\frac{(\zeta-1)^2}{\zeta}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_0+\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u_0\,\mathrm{sn}\,u}\right)^2\right] \tag{16}$$

а при отсутствии криволинейных участков получим из формул (15), (16) и (5)

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{iQK^2}{\pi^2v_0k^2}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_0+\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u_0\,\mathrm{sn}\,u}\right)^2\prod_{j=1}^{n}\left[\mathrm{cn}\left(\frac{Kt_j}{\pi}-u+iK'\right)+\right.$$

$$\left.+\,i\,\mathrm{sn}\left(\frac{Kt_j}{\pi}-u+iK'\right)\right]^{-\Delta_j/\pi} \tag{17}$$

В решение (17) входит n неизвестных параметров t_j и неизвестный масштабный множитель Q. Параметр u_0 (через него определяется Γ при помощи соотношения (4)) равен $Kt_0\,/\,\pi$, где t_0 совпадает с тем из t_j, для которого $\Delta_j<0$ — эта угловая точка должна быть точкой разветвления потока. Пока будем считать, что такая угловая точка одна.

Если задано препятствие, то известны длины $(n-1)$-го отрезка $l_{j,\,j+1}$ между угловыми точками A_j и A_{j+1}; для определения параметров t_j и Q

получаем $n-1$ трансцендентное уравнение

$$l_{j,\,j+1}=\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{r=1}dt=\frac{Q}{v_0}\frac{K^2}{k^2\pi^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(\frac{\operatorname{dn}u_0+\operatorname{dn}(Kt/\pi)}{\operatorname{sn}u_0\operatorname{sn}(Kt/\pi)}\right)^2\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{1-\operatorname{dn}[(t_i-t)K/\pi]}{\operatorname{sn}[(t_i-t)K/\pi]}\right|^{-\Delta_i/\pi}dt\qquad(j=1,\ldots,n-1)\tag{18}$$

Присоединяя к ним два уравнения, вытекающие из условия (13) однозначности функции $z(\zeta)$

$$\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{dn}^2u_0\operatorname{sn}^2\frac{Kl}{\pi}+\operatorname{cn}^2\frac{Kt}{\pi}\right)\cos\gamma(t)\,dt=0\tag{19}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{dn}^2u_0\operatorname{sn}^2\frac{Kt}{\pi}+\operatorname{cn}^2\frac{Kt}{\pi}\right)\sin\gamma(t)\,dt=0\tag{20}$$

$$\left(\gamma(t)=-2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{cn}(Kt/\pi)}{\operatorname{dn}u_0\operatorname{sn}(Kt/\pi)}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_j}{\pi}\operatorname{am}\frac{K}{\pi}(t_j-t)\right)$$

придем к системе из $(n+1)$-го уравнения для определения $(n+1)$-го неизвестного: $t_1,\ldots,t_n$ и Q.

Если же имеется несколько точек A_k, у которых $\Delta_k<0$, то в общем случае пришлось бы рассматривать трех- и более связную область течения D. При существовании двух таких точек A^* и A^{**} область течения будет двусвязной и подходит под наше рассмотрение, если соответствующие им t^* и t^{**} связаны соотношением $t^{**}=-t^*$; этому соотношению можно удовлетворить, если уменьшить на единицу число уравнений (18), (19) и (20). Это можно сделать в двух случаях: если препятствие взять симметричным, то уравнение (20) превращается в тождество ($\gamma(t)$ в этом случае нечетная функция от t), и если считать заранее не известной длину одного из отрезков $l_{j,\,j+1}$.

Итак, поставленную задачу удалось свести к решению интегрального уравнения, разрешимость которого ясна для выпуклых и для слабо изогнутых препятствий. Для контуров в виде ломаной решение записывается в замкнутом виде, но для определения параметров приходится решать систему трансцендентных уравнений.

Поступила 13 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Изд. АН СССР, 1962.
2. Cox R. N., Clayden W. A. Air Entrainment at the Rear of a Steady Cavity. В сб. Cavitation in Hydrodynamics, London, 1956.