

УДК 519.6; 533.9

ДВУХЖИДКОСТНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ УСКОРИТЕЛЕ С ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. Н. Козлов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047 Москва
E-mail: ankoz@keldysh.ru

Представлены результаты численных исследований осесимметричных потоков в коаксиальном плазменном ускорителе при наличии продольного магнитного поля. Расчеты выполнены в рамках двумерной двухжидкостной магнитогидродинамической модели с учетом эффекта Холла и тензора проводимости среды. Проведенные численные эксперименты подтвердили основные закономерности плазмодинамических процессов, выявленные ранее на основе аналитической и одножидкостной моделей, а также позволили исследовать особенности течений плазмы в окрестности электродов.

Ключевые слова: поток плазмы, магнитогидродинамическая модель, эффект Холла, плазменный ускоритель, продольное магнитное поле.

Введение. В коаксиальных плазменных ускорителях [1] с азимутальным магнитным полем H_φ ускорение плазмы осуществляется за счет силы Ампера. Явление кризиса тока [1, 2] препятствует достижению больших скоростей в ускорителях с непроницаемыми электродами. Данное явление обусловлено негативным воздействием эффекта Холла, приводящим к недостатку плазмы в окрестности анода. В ускорителе появляются колебания большой амплитуды. Наиболее сильное влияние это явление оказывает на вольт-амперные характеристики, соответствующие постоянному расходу вещества. Если разрядный ток в системе больше некоторого критического значения, то напряжение на разряде начинает резко расти и система препятствует прохождению токов большей величины. Преодоление кризиса тока возможно в двухступенчатых системах типа квазистационарного плазменного ускорителя (КСПУ) [1–3]. Первая ступень КСПУ состоит из нескольких малых коаксиальных плазменных ускорителей, в которых осуществляются ионизация и предварительное ускорение плазмы. Вторая ступень представляет собой большой коаксиальный плазменный ускоритель, подсоединенный к независимой электрической цепи. В экспериментальных исследованиях КСПУ отмечалась высокая степень устойчивости и азимутальной симметризации потоков (см., например, [4, 5]). Достигнутые значения параметров (концентрация частиц $n \geq 10^{20} \text{ м}^{-3}$, скорость плазмы $V \approx 10^4 \div 10^6 \text{ м/с}$) свидетельствуют о перспективности использования данных ускорителей не только при разработке новых технологий, но и в космической технике в качестве электрореактивных плазменных двигателей, а также в других областях. В современных КСПУ реализуется режим ионного токопереноса с проницаемыми электродами. В этом режиме электроды представляют собой эквипотенциальные поверхности и должны быть проницаемыми для плазмы. Самосогласованное протекание плазмы через электроды обусловлено эффектом Холла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-02-16707).

В случае пренебрежения этим эффектом ($\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i$) реализуется режим непроницаемых сплошных эквипотенциальных электродов, который в физической практике ($\mathbf{V}_e \neq \mathbf{V}_i$) является вырожденным. Аналитические и численные исследования процессов в ускорителях для достаточно плотной плазмы проведены на основе магнитогидродинамических (МГД) моделей в отсутствие продольного поля (см., например, [6–8]).

Введение в плазменный ускоритель дополнительного продольного магнитного поля позволяет сформировать своеобразный дополнительный канал для управления динамическими процессами в ускорителе и других устройствах, принцип действия которых основан на использовании азимутальной компоненты магнитного поля. Продольное магнитное поле обуславливает вращение плазмы вокруг оси системы. Наличие дополнительного продольного поля позволяет исследовать динамику потоков плазмы во всем многообразии процессов. На практике введение в систему продольного поля предусматривает разработку модифицированных плазменных ускорителей в дополнение к существующим КСПУ со сложной громоздкой системой анодных трансформеров. Теоретические исследования двумерных осесимметричных стационарных потоков идеально проводящей двухкомпонентной плазмы при наличии продольного поля [9] проведены в приближении “плавного канала” [1]. Эти исследования позволили выявить и проанализировать важнейшие свойства течений плазмы в присутствии продольного магнитного поля. В соответствии с иерархией численных моделей на первом этапе предполагается исследование динамики плазмы в рамках одножидкостной МГД-модели. С помощью такой модели, представленной в работах [10, 11], изучены свойства течений плазмы при наличии продольного поля с учетом конечной проводимости среды. В работе [11] получены также оценки эффективности процесса ускорения вращающейся плазмы в присутствии магнитного поля.

Верификация любой численной модели основана на сопоставлении ее с аналитической моделью, а также предполагает сравнение результатов, полученных в расчетах с использованием различных численных моделей. В данной работе предложена более полная двухжидкостная численная МГД-модель, предназначенная, в частности, для детального изучения процессов, протекающих вблизи электродов.

Модифицированные МГД-уравнения. В работе [12] представлены двухжидкостная численная модель двумерных течений и результаты первых численных экспериментов в коаксиальных каналах плазменных ускорителей при наличии продольного поля. В основе модели лежат МГД-уравнения с учетом эффекта Холла ($\mathbf{V}_e \neq \mathbf{V}_i$), тензора проводимости среды и зависимости коэффициентов переноса в магнитном поле от параметра $\omega_e \tau_e$ (ω_e — циклотронная частота вращения электронов; τ_e — время между столкновениями электронов с ионами) [13]. Данная модель описывает режим ионного токопереноса, при котором плазма поступает в канал, например сквозь прозрачный стержневой анод. При этом в соответствии с аналитической моделью на анодной эквипотенциальной поверхности заданы некоторые функции, в частности плотность $\rho(z)$ и азимутальная скорость $V_\varphi(z)$, что позволяет провести сравнение аналитического и численного решений. Однако в рамках такой постановки задачи невозможно исследовать динамику плазмы при различных параметрах задачи включая продольное поле.

В данной работе рассматривается двумерная двухжидкостная численная модель, которая позволяет изучить динамику плазмы в ускорителе с ионным токопереносом в случае самосогласованной подачи плазмы через электроды при различных значениях продольного поля и параметров плазмы на входе в канал. В отсутствие продольного поля модель с самосогласованной подачей плазмы в режиме ионного токопереноса использовалась ранее при исследовании процессов в канале ускорителя с традиционной азимутальной компонентой магнитного поля H_φ [14]. В присутствии дополнительного продольного поля ($H_\varphi \gg H_z \gg H_r$) в процессе самосогласованного втекания предполагается также, что на

эквипотенциальных электродах ($E_\tau = 0$, $E_\varphi = 0$) отсутствуют скачки и разрывы величин. (Здесь E_φ — азимутальная составляющая напряженности электрического поля; E_τ — тангенциальная составляющая в плоскости (z, r) .)

Следуя работе [13], будем считать плазму квазинейтральной ($n_i = n_e = n$) и пренебрегать инерцией электронов ($m_e \ll m_i$). В рассматриваемом диапазоне параметров задачи стандартные оценки передачи тепла и характерного времени обмена энергией между компонентами показывают, что $T_i \simeq T_e = T$. Далее ограничимся исследованием динамики водородной плазмы ($Z = 1$, $m = m_i = m_p$), часто используемой в экспериментах.

В результате несложных преобразований исходных уравнений переноса с учетом уравнения индукции магнитного поля и сделанных выше предположений получаем следующую систему уравнений [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla P &= \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}], \\ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + P \operatorname{div} \mathbf{V} &= Q - \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{k}{e(\gamma - 1)} (\mathbf{j}, \nabla) T + \frac{P_e}{e} \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}}{n}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, & \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} [\mathbf{V}_e, \mathbf{H}] - \frac{1}{en} \nabla P_e + \frac{1}{en} \mathbf{R}, \\ \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = en(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e), & \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla), \\ P &= P_i + P_e = 2(c_p - c_v)\rho T, & \varepsilon &= 2c_v T, & k/m &= c_p - c_v = c_v(\gamma - 1), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{V}_i$; P — суммарное давление; $\rho = mn$ — плотность тяжелых частиц; \mathbf{j} — электрический ток; \mathbf{q} — тепловой поток; коэффициенты переноса в магнитном поле зависят от параметра $\omega_e \tau_e$; $\omega_e = eH/(m_e c)$; $\tau_e = 3\sqrt{m_e} (kT)^{3/2} / (4\sqrt{2\pi} \lambda e^4 Z^2 n)$; λ — кулоновский логарифм.

Сила трения между компонентами среды $\mathbf{R} = \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_T$ представляет собой сумму силы трения \mathbf{R}_j , обусловленной наличием относительной скорости $\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i = -\mathbf{j}/(en)$, и термосилы \mathbf{R}_T , зависящей от градиента температуры. В соответствии с работой [13] имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j &= \frac{en}{\sigma} \left(A_1(x) \mathbf{j}_\parallel + A_2(x) \mathbf{j}_\perp - \frac{A_3(x)}{H} [\mathbf{H}, \mathbf{j}] \right), \\ \mathbf{R}_T &= -kn \left(B_1(x) \nabla_\parallel T + B_2(x) \nabla_\perp T + \frac{B_3(x)}{H} [\mathbf{H}, \nabla T] \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{j}_\parallel = (\mathbf{j}, \mathbf{H})\mathbf{H}/H^2$, $\mathbf{j}_\perp = [\mathbf{H}, [\mathbf{j}, \mathbf{H}]]/H^2$ — компоненты вектора, параллельного и перпендикулярного магнитному полю; A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 — известные функции переменной величины $x = \omega_e \tau_e$; $\sigma = e^2 n_e \tau_e / m_e$ — электропроводность среды. Электронный поток тепла также состоит из двух потоков: $\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_j^e + \mathbf{q}_T^e$. Потоком тепла \mathbf{q}_T^e , обусловленным градиентом температуры, можно пренебречь, так как $q_T^e \ll q_j^e$. Кроме того, ионный поток тепла существенно меньше электронного ($q_i \ll q_e$), поэтому им также можно пренебречь. Тогда

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i \approx \mathbf{q}_j^e = -\frac{kT}{e} \left(B_2(x) \mathbf{j} + \frac{B_1(x) - B_2(x)}{H^2} (\mathbf{j}, \mathbf{H})\mathbf{H} + \frac{B_3(x)}{H} [\mathbf{H}, \mathbf{j}] \right).$$

Суммарное количество тепла, выделяющегося вследствие столкновений, равно

$$Q = Q_i + Q_e = (\mathbf{R}, \mathbf{j}) / (en).$$

Экспериментальные исследования (см., например, [4, 5, 15]) и оценки параметров в рассматриваемом диапазоне указывают на то, что использование обычных коэффициентов

переноса в известной степени оправданно при численном решении не только данной, но и большого количества других плазмодинамических задач (см., например, [15, 16]).

Параметры задачи. Уравнения (1), (2) преобразуются и записываются в безразмерном виде. В качестве нормирующих величин примем следующие размерные константы: L — длина канала; n_0 ($\rho_0 = mn_0$), T_0 , $H_0 = H_\varphi^0 = 2J_p/(cR_0)$ — характерные значения концентрации, температуры и азимутальной составляющей магнитного поля на входе в канал (R_0 — радиус внешнего электрода; J_p — разрядный ток в системе). Давление нормируется на величину $H_0^2/(4\pi)$, характерная скорость — на $V_1 = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, время — на $t_1 = L/V_1$, напряженность электрического поля — на $E_1 = H_0V_1/c$, плотность тока — на величину $j_1 = cH_0/(4\pi L)$. Исходные размерные величины связаны с безразмерными параметрами, используемыми в задаче, следующим образом: $\xi = (c/(eL))\sqrt{m/(4\pi n_0)}$ — локальный параметр обмена, характеризующий роль эффекта Холла в двухжидкостной модели; $\beta = 8\pi P_0/H_0^2$ — отношение газового и магнитного давлений на входе ($P_0 = kn_0T_0$); $\nu = 1/\text{Re}_m = c^2/(4\pi LV_1\sigma)$ — магнитная вязкость, обратно пропорциональная магнитному числу Рейнольдса, соответствующему спитцеровской проводимости. С помощью ξ и ν получим $x = \omega_e\tau_e = \xi H/(\nu\rho)$.

В потоке плазмы безразмерная проводимость зависит от температуры: $\text{Re}_m = \sigma_0 T^{3/2}$, параметр $\omega_e\tau_e$ также может иметь различные значения в той или иной точке канала. С использованием экспериментальных данных [4, 5] в качестве характерных параметров задачи выберем следующие значения: $n_0 = 3,6 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $T_0 = 2 \text{ эВ}$, $J_p = 300 \text{ кА}$, $L = 0,6 \text{ м}$, $R_0 = 0,25 \text{ м}$. В этом случае значения безразмерных параметров задачи равны $\beta = 0,005$, $\xi = 0,02$, $\sigma_0 = 812,8$. При $T = 1$, $\rho = 1$ имеем $\omega_e\tau_e = 16,2$, $\nu = 0,0012$. Именно безразмерные параметры, наряду с уравнениями и граничными условиями, определяют, по существу, течение плазмы в канале. Следует отметить, что в современных плазменных ускорителях $\beta \ll 1$, поэтому температурный фон не оказывает существенного влияния на динамику потока плазмы. Соответственно перенос излучения не является обязательным элементом данного исследования и может быть учтен в дальнейшем.

Особенности численной модели. Численное интегрирование многомерной МГД-задачи предполагает выполнение условия $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Существует несколько подходов для обеспечения соленоидальности магнитного поля. Наиболее простой способ состоит в том, чтобы записать уравнения (1) с учетом векторного потенциала \mathbf{A} ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$). В цилиндрической системе координат имеем

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}, \quad (3)$$

где A_φ — азимутальная компонента векторного потенциала \mathbf{A} . В осесимметричном случае соотношения (3) обеспечивают точное выполнение условия $\text{div } \mathbf{H} = 0$, хотя в уравнениях импульсов следует аппроксимировать вторые производные векторного потенциала, так как

$$j_\varphi = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -\Delta A_\varphi + \frac{A_\varphi}{r^2},$$

где

$$\Delta A_\varphi = \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right).$$

Результаты численного решения задачи показывают, что в расчетах не наблюдается значительных осцилляций в распределении вторых производных и разворотов тока, обусловленных аппроксимацией производных.

С учетом сделанных выше замечаний в осесимметричном случае уравнения (1), (2) можно записать в безразмерной форме в терминах компоненты векторного потенциала A_φ и компоненты магнитного поля H_φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V_r)}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_z^2 + P + \frac{H_\varphi^2}{2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V_z V_r)}{\partial r} &= j_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_z V_r)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r^2 + P + \frac{H_\varphi^2}{2} \right) \right] &= \frac{1}{r} \left(\rho V_\varphi^2 + P - \frac{H_\varphi^2}{2} \right) + \frac{j_\varphi}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z}, \\ \frac{\partial D_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(V_z D_\varphi)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r D_\varphi)}{\partial r} &= \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}, \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho \varepsilon V_r)}{\partial r} &= \\ &= -P \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} \right) + \nu A_2(x) \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + j_\varphi^2 \right] + Q_1 + Q_2, \\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + V_z \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} &= \nu C_A^\nu \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} \right) - U_1 \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{U_2}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}, \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(V_z H_\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial(V_r H_\varphi)}{\partial r} &= \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) - r \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{C_r^\nu}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu C_z^\nu \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) - 2\nu C_{rz}^\nu \frac{\partial^2(rH_\varphi)}{\partial r \partial z} + \\ &+ \frac{\partial(V_r^D H_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(V_z^D H_\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial F_2}{\partial r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z} - G_1 \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{G_2}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} + \frac{\xi \beta}{2} W. \end{aligned}$$

В данных уравнениях присутствуют безразмерные переменные $D_\varphi = r\rho V_\varphi$, $\varepsilon = \beta T/(\gamma - 1)$, $P = \beta \rho T$, коэффициенты $C_A^\nu = A_2 + (A_1 - A_2)H_\varphi^2/H^2$, $C_r^\nu = A_2 + (A_1 - A_2)H_z^2/H^2$, $C_z^\nu = A_2 + (A_1 - A_2)H_r^2/H^2$, $C_{rz}^\nu = (A_1 - A_2)H_z H_r/H^2$ и функции V_r^D , V_z^D , U_1 , U_2 , G_1 , G_2 , F_1 , F_2 , Q_1 , Q_2 , W [12], зависящие от переменных задачи и пропорциональные параметрам ξ , β , ν , существенно меньшим единицы. Поэтому на гладких решениях все слагаемые, содержащие указанные функции, можно рассматривать как малые добавки, не оказывающие значительного влияния на динамику плазмы в целом. В итоге имеем семь уравнений для переменных ρ , T , V_z , V_r , V_φ , H_φ , A_φ .

Для заданных профилей электродов криволинейная расчетная область в переменных (r, z) отображается в единичный квадрат $0 \leq y, z \leq 1$. С учетом якобиана отображения исходные нестационарные МГД-уравнения записываются в новых переменных в дивергентном виде, за исключением уравнения для A_φ . Численное решение задачи основано на покоординатном расщеплении. Используются алгоритм SHASTA-FCT с фениксовой коррекцией для гиперболической части дифференциальных уравнений и потоковый вариант метода прогонки для параболической части, описывающей диффузию вдоль и поперек магнитного поля. Уравнение переноса для величины A_φ решается с помощью одного из характеристических методов. Более подробное описание использованных алгоритмов и ссылки на соответствующие работы приведены в [12].

Численное решение задачи осуществляется до момента установления течения. В общем нестационарном случае уравнения (1), (2) должны быть дополнены уравнением электрической цепи. В этом случае расчет МГД-задачи ведется одновременно с вычислением осциллограмм тока и напряжения. Такие численные эксперименты были проведены в отсутствие продольного поля [7]. Если решать задачу с использованием уравнения цепи, то

для любого момента времени определенной величине тока в цепи будет соответствовать решение МГД-задачи, совпадающее с решением, найденным с помощью метода установления для данного значения тока. Применение этого метода оправдано также тем, что характерное время установления существенно меньше продолжительности разряда. Поэтому качественный анализ процессов основан на получении квазистационарных решений.

Граничные условия. На входе в канал $z = 0$ ставится условие дозвукового втекания плазмы с известными распределениями плотности $\rho(r) = f_1(r)$ и температуры $T(r) = f_2(r)$. Задание этих функций в соответствии с аналитической моделью [9] позволяет осуществить верификацию решения. Если не рассматривать дополнительное уравнение электрической цепи, то можно считать, что ток имеет постоянную величину и поступает в систему только через электроды, т. е. $j_z = 0$ при $z = 0$ или $rH_\varphi = r_0 = \text{const}$, где $r_0 = R_0/L$. Плазма подается в некотором направлении, например вдоль координатных линий. Будем считать, что во входном сечении плазма не вращается и азимутальная скорость равна нулю: $V_\varphi = 0$. Зададим на входе продольное поле $H_z \neq 0$. Следуя [9, 10], имеем $H_z(r) = H_z^0 = \text{const}$. С учетом (3) при $z = 0$ получаем $A_\varphi = 0,5H_z^0 r$.

Геометрию канала можно определить в рамках аналитических построений [9] в отсутствие продольного поля. Соответствующая этим построениям форма электродов (рис. 1) позволяет реализовать трансзвуковое течение. В средней, наиболее узкой части канала происходит переход через скорость быстрой магнитозвуковой волны, поэтому на выходе для сверхзвукового потока ставятся условия свободного вытекания.

Граничные условия на электродах $r_a(z)$ и $r_k(z)$ предполагают их эквипотенциальность ($E_r = 0, E_\varphi = 0$). Эти условия позволяют определить нормальную составляющую скорости V_n (или V_r для данной геометрии внешнего электрода $r_a(z) = r_0 = \text{const}$), соответствующей оптимальной подаче плазмы через электроды. Как показывают расчеты, втекание на аноде происходит таким образом, что $|V_r| \ll V_z$. При наличии потока ($\rho V_n \neq 0$) предполагаемое отсутствие на аноде скачков переменных с физической точки зрения означает отсутствие вращательного или альфвеновского разрыва на анодной эквипотенциальной поверхности.

Результаты расчетов течений плазмы. На рис. 1 для указанных выше характерных параметров задачи представлен пример установившегося трансзвукового течения плазмы в случае, когда продольное магнитное поле на входе равно $H_z^0 = 0,1$. В данном варианте расчета плотность во входном сечении меняется по закону $\rho(0, r) = r_0^2/r^2$ в соответствии с аналитической моделью [9]. Предполагая изоэнтропичность (энтропия $s = c_v \ln P/\rho^\gamma = \text{const}$) поступающей плазмы, при $z = 0$ имеем $T = \rho^{\gamma-1}$. На рис. 1 приведены линии уровня $rH_\varphi = \text{const}$, которые совпадают с линиями электрического тока, векторное распределение магнитного поля \mathbf{H} в плоскости (z, r) , азимутальная скорость ионов и электронов, проекция скорости ионов на плоскость (z, r) и изолинии плотности ρ . На рис. 1, б масштаб векторов определяется масштабной скоростью V_1 .

На рис. 1, а (кривая F) видно, что в середине канала скорость потока переходит через местную скорость быстрой магнитозвуковой волны

$$V_{fa}^2 = \frac{1}{2} (V_T^2 + V_A^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(V_T^2 + V_A^2)^2 - 4V_T^2 V_A^2 \cos^2 \theta}.$$

Здесь $V_T = \sqrt{\gamma P/\rho}$ — тепловая газодинамическая скорость звука; $V_A = H/\sqrt{\rho}$; $\cos \theta = (\mathbf{H}, \mathbf{V})/(HV)$. Кривая A на рис. 1, б соответствует переходу через скорость альфвеновской волны $V_A = H/\sqrt{\rho}$. Оба указанных перехода происходят плавно и не сопровождаются разрывами МГД-переменных.

В распределении продольного магнитного поля H_z наблюдаются особенности (см. рис. 1, а). С ростом r величина H_z увеличивается и достигает максимального значения на поверхности внешнего электрода в средней, наиболее узкой части канала ускорителя:

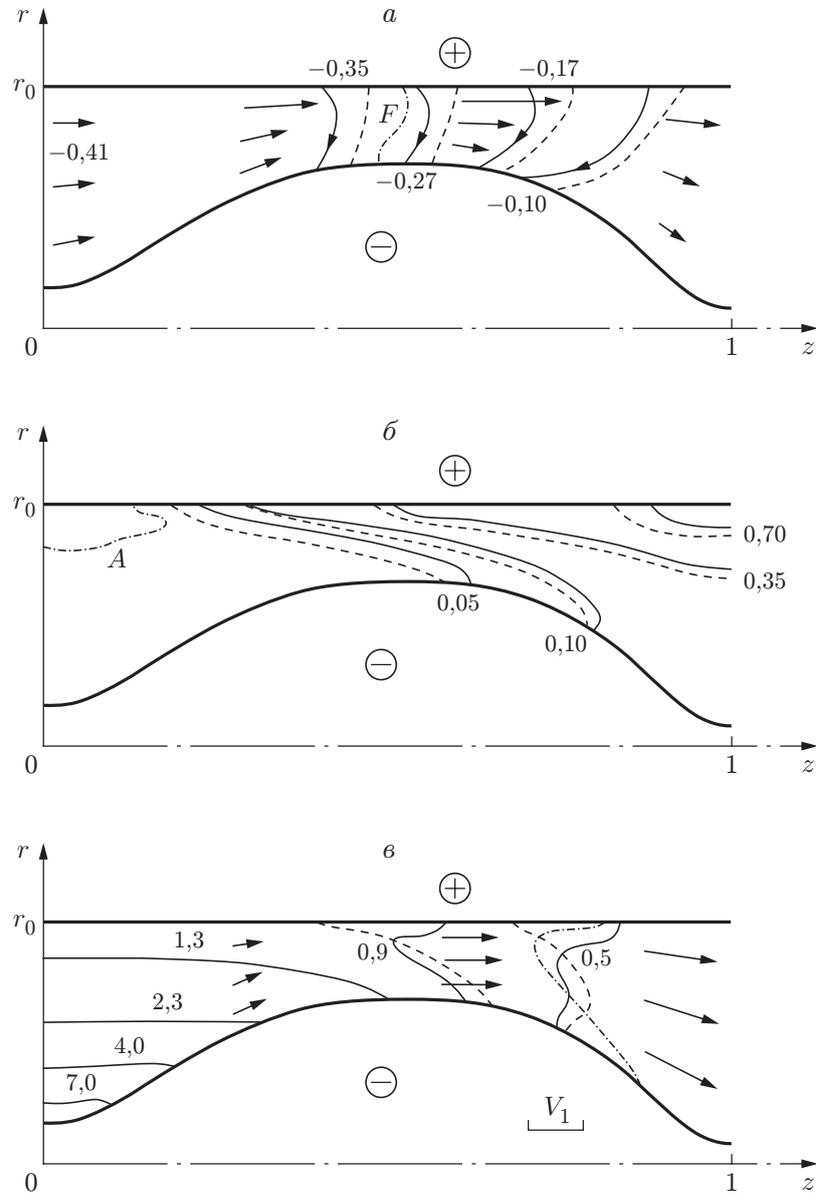


Рис. 1. Пример трансзвукового течения плазмы при наличии продольного магнитного поля ($H_z^0 = 0,1$):

a — изолинии функции rH_φ (сплошные линии — в присутствии продольного магнитного поля; штриховые — в отсутствие продольного магнитного поля); штрихпунктирная линия F — граница перехода через скорость быстрой магнитозвуковой волны; стрелки — векторное распределение магнитного поля \mathbf{H} в плоскости (z, r) ; *б* — азимутальная скорость (сплошные линии — ионы; штриховые — электроны); штрихпунктирная линия A — граница перехода через скорость альфвеновской волны; *в* — изолинии плотности ρ (сплошные линии — в присутствии продольного магнитного поля; штриховые — в отсутствие продольного магнитного поля); штрихпунктирная линия — результаты расчета по аналитической модели; стрелки — проекция скорости ионов на плоскость (z, r)

$H_z^{\max} = H_z(z, r) = 0,5$ ($z \approx 0,5, r = r_0$). Практически такое же значение получено в рамках одножидкостной модели.

Азимутальная скорость $V_\varphi^{i,e}(z, r)$ (см. рис. 1,б) увеличивается в радиальном и осевом направлениях. Иными словами, наличие небольшого по величине продольного поля приводит к вращению плазмы, которое в соответствии с одножидкостной и аналитической моделями достигает максимального значения в окрестности внешнего электрода на выходе из канала ускорителя: $V_\varphi^{\max} = V_\varphi(z, r) = 0,72$ ($z = 1, r = r_0$). Следует отметить, что различие скоростей ионов и электронов (сплошные и соответствующие им штриховые кривые на рис. 1,б) весьма незначительное, поскольку в безразмерных переменных $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - (\xi/\rho)\mathbf{j}$ ($\xi \ll 1$). На выходе из ускорителя $z = 1$ кинетическая энергия, обусловленная вращением:

$\varepsilon_\varphi = \int_{r_k}^{r_a} \rho V_\varphi^2 \pi r dr$, составляет небольшую часть продольной кинетической энергии вытекающего потока $\varepsilon_z = \int_{r_k}^{r_a} \rho V_z^2 \pi r dr$. В данном случае $K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_z} \cdot 100 \% = 14 \%$. В то же время

в расчетах с использованием одножидкостной модели $K_\varepsilon = 7 \%$.

Изменение плотности $\rho(z, r)$ (сплошные кривые на рис. 1,в) в окрестности внешнего электрода обусловлено влиянием продольного магнитного поля. При наличии магнитного поля H_z вблизи внешнего электрода меняется угол наклона изолиний электрического тока (сплошные и штриховые кривые на рис. 1,а при $H_z^0 = 0,1; 0$ соответственно). Одновременно в этой области происходит изменение распределения плотности (сплошные и штриховые кривые на рис. 1,в). В окрестности внешнего электрода наблюдается увеличение плотности, обусловленное вращением плазмы. На рис. 2 представлены зависимости плотности $\rho(z, r)$ ($r = r_0$) от координаты z вдоль внешнего электрода при различных значениях H_z^0 . Сплошные кривые 1, 2 соответствуют результатам расчетов при $H_z^0 = 0; 0,1$. На выходе из ускорителя ($z = 1, r = r_0$) плотность увеличивается от значения ρ_1 в отсутствие продольного поля до значения ρ_2 при его наличии. Коэффициент увеличения плотности в присутствии продольного поля, определяемый как отношение $K_\rho = \rho_2/\rho_1$, при $H_z^0 = 0,1$ равен 2,16, что несколько больше по сравнению с результатом $K_\rho = 1,63$, полученным при тех же параметрах в расчетах с использованием одножидкостной модели. Согласно экспериментам в отсутствие поля ($H_z^0 = 0$) в окрестности внешнего электрода (анода) ближе к выходу за счет влияния эффекта Холла возникает недостаток ионов. Как правило, это приводит к кризису тока и препятствует ускорению. Очевидно, решение данной проблемы (полное или частичное) возможно путем введения в систему небольшого по величине продольного поля, что приведет к вращению и “отжатию” плазмы к внешнему электроду.

Дальнейшие исследования на основе полной двухжидкостной МГД-модели подтверждают также другие закономерности, выявленные в рамках одножидкостной модели. Увеличение продольного магнитного поля приводит к росту плотности в окрестности внешнего электрода. Кривая 3 на рис. 2 соответствует значению $H_z^0 = 0,15$. По мере увеличения напряженности продольного поля увеличиваются доля энергии вращения и значение коэффициента роста плотности. В данном случае $K_\varepsilon = 28 \%$, $K_\rho = 3,8$, $H_z^{\max} = 0,8$, $V_\varphi^{\max} = 0,86$. Значения K_ε и K_ρ , полученные в режиме ионного токопереноса, больше значений $K_\varepsilon = 18 \%$, $K_\rho = 2,3$, вычисленных в рамках одножидкостной модели при $H_z^0 = 0,15$.

Проведем сравнение аналитического решения и результатов расчетов установившихся течений, полученных с использованием одножидкостной и рассматриваемой двухжидкостной моделей. Эти решения не должны совпадать. Тем не менее существенных качественных и количественных различий не наблюдается (см. рис. 1,в). Штриховые линии 1', 2'

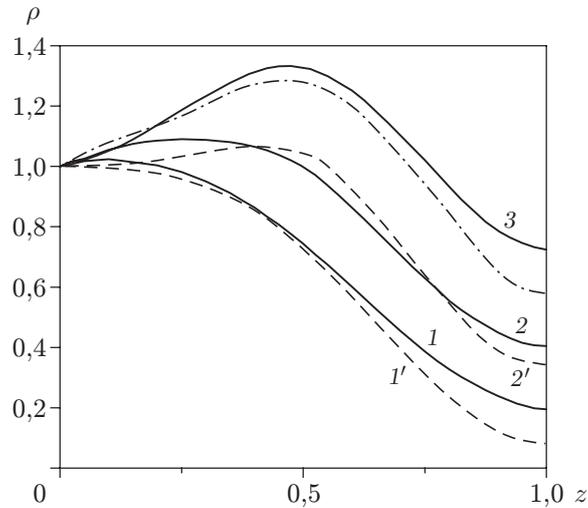


Рис. 2. Распределение плотности плазмы вдоль внешнего электрода:
 1–3 — расчет по двухжидкостной МГД-модели (1 — $H_z^0 = 0$; 2 — $H_z^0 = 0,1$; 3 — $H_z^0 = 0,15$); 1', 2' — расчет по аналитической модели (1' — $H_z^0 = 0$; 2' — $H_z^0 = 0,1$);
 штрихпунктирная линия — расчет по одножидкостной модели ($H_z^0 = 0,15$)

на рис. 2 соответствуют результатам расчетов с использованием аналитической модели при $H_z^0 = 0; 0,1$, штрихпунктирная кривая — результатам расчетов с использованием одножидкостной модели при $H_z^0 = 0,15$.

Двухжидкостная МГД-модель позволяет более детально исследовать поведение плазмы в окрестности электродов, в частности в рассматриваемом режиме ионного токопереноса. Напомним, что в одножидкостной модели эффект Холла не учитывается ($\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i$) и граничное условие $V_n = 0$ означает, что плазма скользит вдоль непроницаемых электродов. При увеличении напряженности продольного поля в системе одновременно с увеличением плотности в окрестности анода наблюдается незначительное уменьшение продольной составляющей скорости ионов V_z^i . На рис. 3,а кривые 2, 3 соответствуют распределениям V_z^i вдоль анода при $H_z^0 = 0,10; 0,15$, кривая 2' — результаты расчета по аналитической модели при $H_z^0 = 0,1$. В рамках двухжидкостной модели можно вычислить значение продольной компоненты скорости электронов $V_z^e = V_z^i - (\xi/\rho)j_z$. Штрихпунктирная кривая на рис. 3,а соответствует распределению V_z^e вдоль анода при $H_z^0 = 0,1$.

Более существенным является следующее обстоятельство. При введении в систему продольного поля в окрестности анода одновременно с увеличением плотности наблюдается уменьшение нормальной или радиальной составляющей V_r скорости втекания плазмы (рис. 3,б). При этом в режиме ионного токопереноса при наличии продольного поля интегральный поток плазмы через анод

$$\dot{m}_a = 2\pi r_0 \int_0^1 \rho V_r dz,$$

поток через катод

$$\dot{m}_k = 2\pi \int_0^1 r_k(z) \rho V_n dz$$

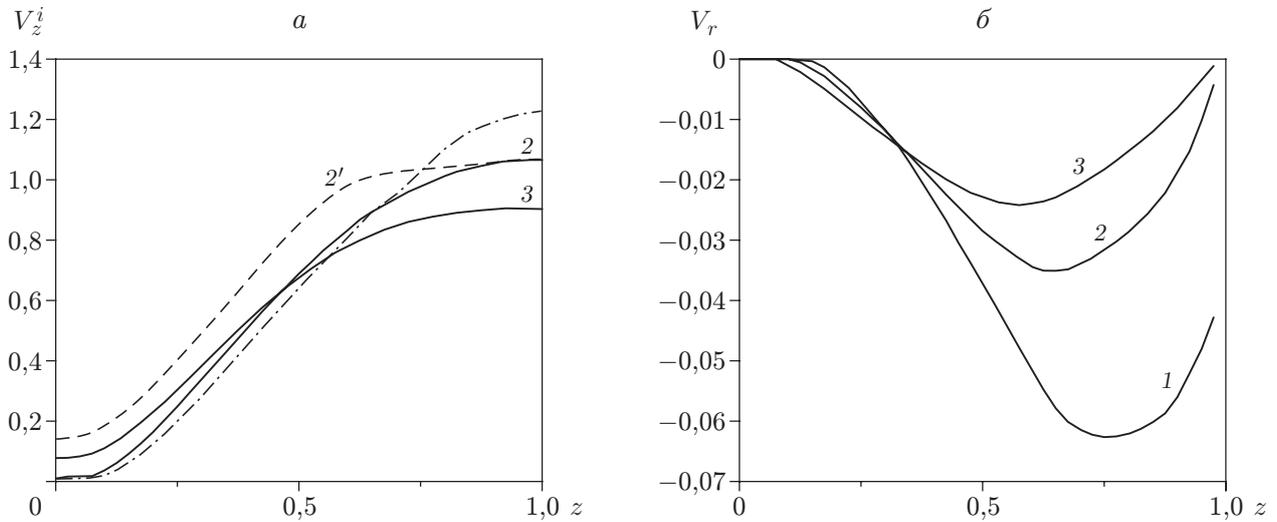


Рис. 3. Распределение продольной (а) и радиальной (б) компонент скорости плазмы вдоль внешнего электрода:
 штрихпунктирная линия — скорость электронов, вычисленная по двухжидкостной МГД-модели; остальные обозначения те же, что на рис. 2

и интегральный параметр обмена $\xi_0 = |\dot{m}_a|/\dot{m}$ практически не меняются. Здесь расход

$$\dot{m} = 2\pi \int_{r_k}^{r_a} r \rho V_z dr$$

можно определить по входному сечению канала $z = 0$. В результате расчетов получены интегральные параметры ускорителя \dot{m}_a , \dot{m}_k , ξ_0 . В безразмерных переменных $\dot{m}_a = -0,041$, $\dot{m}_k = -0,05$, $\xi_0 = 0,27$ при $H_z^0 = 0$ и $\dot{m}_a = -0,039$, $\dot{m}_k = -0,051$, $\xi_0 = 0,26$ при $H_z^0 = 0,1$. Таким образом, наличие продольного поля не приводит к существенному изменению интегральных параметров ускорителя, что также указывает на целесообразность модификации коаксиальных ускорителей с помощью слабого продольного магнитного поля, позволяющего изменить динамику плазмы в окрестности электродов, не оказывая значительного влияния на основной поток.

Еще одной целью разработки двухжидкостной модели являлось подтверждение обнаруженного в расчетах по одножидкостной модели эффекта качественной перестройки течения при достаточно больших значениях продольного поля. Действительно, в рамках двухжидкостной модели начиная с некоторого критического значения продольного поля картина течения меняется. Критическое значение напряженности поля зависит от параметров задачи и условий подачи плазмы на входе. Более того, это значение приближенно равно критическому значению напряженности поля, полученному в расчетах по одножидкостной модели. В рассмотренном в данной работе примере при $H_z^0 > 0,2$ вблизи внешнего электрода, где продольное поле имеет максимальные значения, в движущейся плазме формируются узкий токовый слой и область практически равномерного течения с постоянной скоростью. Снаружи эта область ограничена эквипотенциальным электродом, внутри канала область отделена от основного потока токовым слоем (рис. 4). Такое замыкание электрического тока на внешнем электроде указывает на возможное образование привязок тока (сосредоточение тока в узкой зоне на границе плазма — проводник) в случае достаточно больших значений H_z^0 . По сравнению с одножидкостной моделью наблюдается незначительное увеличение угла между анодом и токовым слоем. В расчетах по аналитической

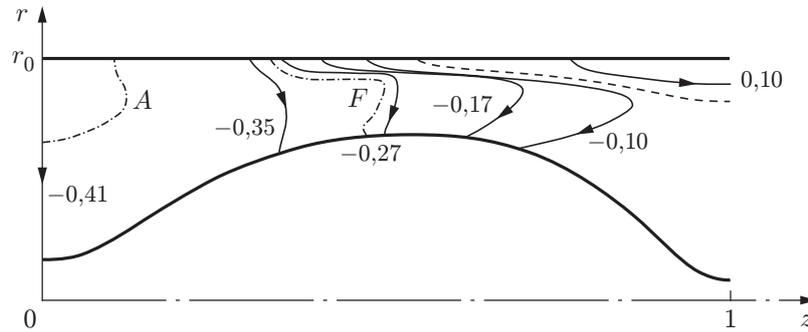


Рис. 4. Изолинии электрического тока в плазме при $H_z^0 = 0,25$:
 штриховая линия — $H_\varphi = 0$; штрихпунктирные линии A, F — границы перехода через
 скорость альфвеновской и быстрой магнитозвуковой волны соответственно

модели [9] также получено критическое значение напряженности продольного поля. При значениях $H_z^0 > 0,15$ аналитическое решение, соответствующее трансзвуковому течению плазмы, не найдено.

Кроме того, в рамках двухжидкостной модели проведены численные эксперименты в случае равномерной подачи плазмы на входе ($\rho = 1, T = 1$ при $z = 0$). Результаты расчетов подтвердили основные закономерности, выявленные при неравномерной подаче, и согласуются с результатами расчетов по одножидкостной модели [10]. Варьирование таких параметров задачи, как T_0 и J_p , не приводит к существенному изменению описанных выше процессов. С увеличением значений T_0 и J_p критическое значение напряженности поля немного уменьшается. Для более плотной плазмы (например, $n_0 = 3,6 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$) диапазон значений продольного поля $H_z^0 < 0,4$, соответствующих ламинарному течению, наоборот, расширяется. Однако большие значения продольного поля не представляют интереса. В этом случае велика доля энергии, обусловленной вращением.

Заключение. Численные эксперименты, проведенные в рамках двумерной двухжидкостной МГД-модели, показали, что небольшое по величине продольное магнитное поле позволяет реализовать трансзвуковые течения плазмы в канале коаксиального ускорителя при различных условиях подачи плазмы на входе. При этом на выходе из ускорителя доля энергии, обусловленной вращением, существенно меньше кинетической энергии продольного потока плазмы.

Установлено, что слабое продольное магнитное поле, действующее на всей длине канала, приводит к постепенному увеличению скорости вращения плазмы. В результате в окрестности внешнего электрода наблюдается рост концентрации плазмы. Увеличение плотности вблизи анода свидетельствует о возможности преодоления или ослабления кризиса тока в плазменных ускорителях. В то же время при достаточно больших значениях продольного поля наблюдается формирование токовых слоев в движущейся плазме и привязок тока на внешнем электроде в соответствии с ранее разработанной одножидкостной моделью.

Выявлены характерные особенности динамики потоков в окрестности анода при условии оптимальной подачи и самосогласованного протекания плазмы через пронизываемые эквипотенциальные электроды в режиме ионного токопереноса. Максимальные значения в распределении потока плазмы через анод достигаются в средней, наиболее узкой части канала. Интегральные потоки плазмы через поверхности электродов и интегральный параметр обмена практически не зависят от величины продольного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Морозов А. И.** Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
2. **Энциклопедия** низкотемпературной плазмы / Под ред. В. Е. Фортова. М.: Наука, 2000. Т. 3. С. 407.
3. **Морозов А. И.** Принципы коаксиальных (квази)стационарных плазменных ускорителей (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 131–146.
4. **Белан В. Г., Золотарев С. П., Левашов В. Ф. и др.** Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 176–185.
5. **Tereshin V. I., Bandura A. N., Vyrka O. V., et al.** Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49. P. A231–A239.
6. **Брушлинский К. В., Заборов А. М., Козлов А. Н. и др.** Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147–157.
7. **Козлов А. Н.** Особенности динамики плазмы в КСПУ в процессе установления течения // Физика плазмы. 1992. Т. 18, № 6. С. 714–723.
8. **Козлов А. Н.** Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 5. С. 181–188.
9. **Козлов А. Н.** Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 4. С. 165–175.
10. **Козлов А. Н.** Динамика вращающихся потоков в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 5. С. 413–422.
11. **Kozlov A. N.** Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field // J. Plasma. Phys. 2008. V. 74, N 2. P. 261–286.
12. **Козлов А. Н.** Численная модель вращающихся осесимметричных потоков плазмы. Сравнение с аналитической моделью. М., 2004. (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН; № 48).
13. **Брагинский С. И.** Явление переноса в плазме // Вопросы теории плазмы: Сб. / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183–272.
14. **Брушлинский К. В., Козлов А. Н., Морозов А. И.** Численное исследование двумерных течений плазмы и ионизирующегося газа методом пробных частиц // Физика плазмы. 1985. Т. 11, № 11. С. 1358–1367.
15. **Астрелин В. Т., Бурдаков А. В., Поступаев В. В.** Подавление теплопроводности и генерация ионно-звуковых волн при нагреве плазмы электронным пучком // Физика плазмы. 1998. Т. 24, № 5. С. 450–462.
16. **Бармин А. А., Успенский В. С.** Исследование нестационарного процесса распространения ионизирующей ударной волны в магнитном поле // ПМТФ. 1989. № 3. С. 20–26.

*Поступила в редакцию 9/XI 2007 г.,
в окончательном варианте — 27/II 2008 г.*