УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЯХ. ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматриваются плоские задачи об определении напряженно-деформированного состояния изотропной упругой области с жестким включением. Показано, что поле напряжений во включении определяется однозначно. Для плоскости с эллиптическим включением это поле является однородным, а напряжения на бесконечности и во включении связаны взаимно однозначными соотношениями.

Ключевые слова: плоская упругая область, жесткое включение, однородные поля напряжений и моментов.

Модель абсолютно жесткого тела является идеализацией поведения реального материала: среда начинает деформироваться только при достижении определенного уровня напряжений. Например, такой подход принят в теории жесткопластической среды [1], согласно которой при $s < \sigma_{\text{т}}$ деформации отсутствуют, при $s = \sigma_{\text{т}}$ материал начинает деформироваться пластически (s — некоторый инвариант тензора напряжений, например интенсивность касательных напряжений; $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести), а при дальнейшем нагружении может разрушиться. Таким образом, информация о напряженном состоянии в жестком включении (ЖВ) может оказаться полезной при оценке его прочности.

В [2, 3] рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой плоскости с эллиптическим физически нелинейным включением (ЭФНВ) в условиях плоской деформации или в обобщенном плоском напряженном состоянии. Установлены связи между однородными полями напряжений на бесконечности и во включении. Аналогичные результаты получены в [4] в задаче о чистом изгибе бесконечной упругой пластины с ЭФНВ. Полученные в [2–4] соотношения применимы также в случае жесткого включения. Более того, плоская задача об определении напряжений в конечной упругой области с ЖВ произвольной формы является корректной, если считать его упругим с бесконечно большим модулем сдвига.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную упругую область S с жестким включением S^* в условиях плоской деформации или в обобщенном плоском напряженном состоянии. Внешними границами области с ЖВ служат простые замкнутые контуры L и L^* (L^* — граница между областью S и ЖВ S^*). В области S справедлив закон Гука [2]

$$8\mu\varepsilon_{kl} = (\varkappa - 1)\sigma_{nn}\delta_{kl} + 4\sigma^0_{kl},$$
$$\sigma^0_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_{nn}\delta_{kl}/2 \qquad (k, l = 1, 2), \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00168) и Совета по грантам Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-3066.2008.1).

где σ^0_{kl}, δ_{kl} — компоненты плоских девиатора напряжений и единичного тензора; μ — модуль сдвига; $\varkappa = 3-4\nu$ при плоской деформации и $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Деформации ε_{kl} предполагаются малыми и выражаются через перемещения u_k $(k,l = 1,2)$ известными соотношениями Коши.

Для ЖВ, т. е. для области S^*, имеем

$$\varepsilon^*_{kl} = 0, \qquad u^*_{kl} = 0 \qquad (k,l = 1,2). \tag{1.2}$$

На границе L заданы перемещения u_k или нагрузки $p_k = \sigma_{kl} n_l$ (n_k — компоненты единичного вектора нормали к L). На границе L^* областей S^* и S перемещения и нагрузки непрерывны, поэтому $u_k = 0$ на L^* вследствие (1.2). Таким образом, для области S имеем задачу в перемещениях или смешанную задачу, из решения которой найдем поле напряжений σ_{kl}, а следовательно, и нагрузки $p^*_k = p_k \equiv \sigma_{kl} n^*_l$ на L^* (n^*_k — компоненты единичного вектора нормали к L^*).

Рассматривая далее ЖВ S^* как упругую среду с модулем сдвига μ^* ($\mu^* \to \infty$), для функции напряжений F^* получим бигармоническое уравнение с заданными на L^* величинами F^* и $\partial F^*/\partial n^*$. Эта задача хорошо изучена [5], ее решение (единственное) дает поле напряжений σ^*_{kl} в области S^*.

2. Упругая плоскость с эллиптическим ЖВ. Рассмотрим частный случай сформулированной выше задачи, когда областью S является упругая плоскость, поведение материала которой описывается законом Гука (1.1), а контуром L^* — эллипс, уравнение которого в системе координат Oxy имеет вид $x^2a^{-2} + y^2b^{-2} = 1$, $a \geqslant b$. Следовательно, S^* представляет собой эллиптическое жесткое включение (ЭЖВ). На бесконечности действуют равномерно распределенные напряжения σ^∞_{kl}, вращение отсутствует.

В [2, 3] исследовалась подобная задача для случая ЭФНВ с определяющими уравнениями достаточно общего вида:

$$\varepsilon^*_{kl} = F_{kl}(\sigma^*_{mn}) \qquad (k,l,m,n = 1,2) \tag{2.1}$$

(F_{kl} — вообще говоря, нелинейные операторы, описывающие, например, упруговязкопластические свойства среды). Показано, что поле напряжений во включении является однородным, и установлены следующие связи между напряженно-деформированными состояниями в ЭФНВ и на бесконечности:

$$\begin{gathered}
F_i = \alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} x_j \quad (i = 1,2,3), \qquad F_1 = \varepsilon^*_{11}, \quad F_2 = \varepsilon^*_{22}, \quad F_3 = 2\varepsilon^*_{12},\\
y_1 = \sigma^*_{11}, \quad y_2 = \sigma^*_{22}, \quad y_3 = \sigma^*_{12}, \qquad x_1 = \sigma^\infty_{11}, \quad x_2 = \sigma^\infty_{22}, \quad x_3 = \sigma^\infty_{12},\\
\alpha_{11} = -\frac{(\varkappa+1)(1-m)}{4\mu(1+m)}, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\varkappa-1}{4\mu}, \qquad \alpha_{22} = -\frac{(\varkappa+1)(1+m)}{4\mu(1-m)},\\
\alpha_{33} = -\frac{\varkappa+m^2}{\mu(1-m^2)}, \qquad \beta_{11} = \frac{(\varkappa+1)(3-m)}{8\mu(1+m)}, \qquad \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\varkappa+1}{8\mu},\\
\beta_{22} = \frac{(\varkappa+1)(3+m)}{8\mu(1-m)}, \qquad \beta_{33} = \frac{\varkappa+1}{\mu(1-m^2)}, \qquad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (0 \leqslant m < 1),
\end{gathered} \tag{2.2}$$

остальные коэффициенты α_{ij} и β_{ij} равны нулю. В (2.2) суммирование проводится по j от 1 до 3.

Соотношения (2.1), (2.2) представляют собой замкнутую систему для определения σ^*_{kl} по заданным напряжениям σ^∞_{kl} на бесконечности. Эта система однозначно разрешима относительно σ^*_{kl} при указанных в [2, 3] условиях, и наоборот, из (2.1), (2.2) можно найти напряжения σ_{kl}^{∞}, обеспечивающие необходимые напряжения σ_{kl}^{*} в S^*, причем поле σ_{kl}^{∞} определяется единственным образом, поскольку матрица $\|\beta_{ij}\|$ в (2.2) является положительно-определенной.

В рассматриваемом случае жесткое включение можно считать ЭФНВ, материал которого описывается определяющими уравнениями вида (1.2). Тогда из (2.2) получаем систему

$$\alpha_{ij}y_j + \beta_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.3}$$

из которой однозначно находятся y_i (т. е. напряжения σ_{kl}^{*} во включении), так как матрица $\|\alpha_{ij}\|$ является отрицательно-определенной. Это решение имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{*} = \frac{\varkappa+1}{4\varkappa(1-m)}\,[(\varkappa+2-m)\sigma_{11}^{\infty} + (\varkappa-2-m)\sigma_{22}^{\infty}],\\ \sigma_{22}^{*} = \frac{\varkappa+1}{4\varkappa(1+m)}\,[(\varkappa-2+m)\sigma_{11}^{\infty} + (\varkappa+2+m)\sigma_{22}^{\infty}], \qquad \sigma_{12}^{*} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa+m^2}\,\sigma_{12}^{\infty}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Например, при одноосном растяжении или сжатии на бесконечности вдоль первой оси ($\sigma_{11}^{\infty} \neq 0$, $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$) из (2.4) получаем $\operatorname{sign}\sigma_{11}^{*} = \operatorname{sign}\sigma_{11}^{\infty}$, а $\operatorname{sign}\sigma_{22}^{*} = \pm\operatorname{sign}\sigma_{11}^{\infty}$ в зависимости от $\operatorname{sign}(\varkappa-2+m)$; при $\sigma_{22}^{\infty} \neq 0$, $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$ — $\operatorname{sign}\sigma_{11}^{*} = \pm\operatorname{sign}\sigma_{22}^{\infty}$ в зависимости от $\operatorname{sign}(\varkappa-2-m)$, $\operatorname{sign}\sigma_{22}^{*} = \operatorname{sign}\sigma_{22}^{\infty}$; при $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty}$ — $\operatorname{sign}\sigma_{11}^{*} = \operatorname{sign}\sigma_{22}^{*} = \operatorname{sign}\sigma_{11}^{\infty}$.

Из (2.4) следует, что касательные и нормальные напряжения на бесконечности оказывают влияние только на соответствующие напряжения в ЭЖВ: σ_{12}^{∞} — на σ_{12}^{*}; σ_{11}^{∞}, σ_{22}^{∞} — на σ_{11}^{*}, σ_{22}^{*}. Отметим также, что при $m \to 1$ (жесткое тонкое включение) для любых напряжений σ_{11}^{∞} и σ_{22}^{∞}, если хотя бы одно из них отлично от нуля, согласно (2.4) имеем $|\sigma_{11}^{\infty}| \to \infty$, при этом величина σ_{22}^{*} конечна.

Как отмечено выше, система (2.3) однозначно разрешима относительно σ_{kl}^{∞}, т. е., для того чтобы получить в ЭЖВ заданное напряженное состояние, необходимо создать на бесконечности определенное поле напряжений.

3. Чистый изгиб пластины с ЭЖВ. Рассмотрим бесконечную изотропную упругую пластину постоянной толщины h, содержащую ЭЖВ (той же толщины h) и находящуюся в условиях чистого изгиба под действием равномерно распределенных моментов M_{kl}^{∞} на бесконечности. Поверхностные нагрузки отсутствуют. Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, в частности поле моментов в ЭЖВ.

В [4] решена аналогичная задача для случая ЭФНВ с определяющими уравнениями вида (2.1), разрешенными относительно σ_{kl}^{*}. Показано, что поле моментов M_{kl} и соответствующих кривизн $\varkappa_{kl}$ во включении является однородным, кроме того, получены следующие соотношения:

$$\begin{gathered}D(1-\nu)\varkappa_{11} = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{22} + b_{11}M_{11}^{\infty} + b_{12}M_{22}^{\infty},\\ D(1-\nu)\varkappa_{22} = a_{12}M_{11} + a_{22}M_{22} + b_{12}M_{11}^{\infty} + b_{22}M_{22}^{\infty},\\ D(1-\nu)\varkappa_{12} = a_0M_{12} + b_0M_{12}^{\infty}, \qquad a_{11} = f_1(m), \qquad a_{22} = f_1(-m),\\ a_{12} = -(1+\nu)/(3+\nu), \qquad a_0 = -(1-\nu)(1-m^2)/[4-(1-\nu)(1-m^2)],\\ b_{11} = f_2(m), \qquad b_{22} = f_2(-m), \qquad b_{12} = (1-\nu)/[(3+\nu)(1+\nu)], \qquad b_0 = 1-a_0,\\ f_1(x) = -2(1-x)/[(3+\nu)(1+x)], \quad f_2(x) = [3\nu+5+x(1-\nu)]/[(3+\nu)(1+\nu)(1+x)],\\ D = Eh^3/[12(1-\nu^2)].\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона упругой пластины; величина m определена в (2.2).

Для случая жесткого включения, полагая $\varkappa_{kl} = 0$ и разрешая систему (3.1) относительно M_{kl}, найдем выражения для моментов в ЭЖВ:

$$(1-\nu^2)M_{11} = [\nu + \alpha(m)]M_{11}^\infty - [\nu\alpha(m) + 1]M_{22}^\infty,$$

$$(1-\nu^2)M_{22} = -[\nu\alpha(-m) + 1]M_{11}^\infty + [\nu + \alpha(-m)]M_{22}^\infty,$$

$$(1-\nu^2)M_{12} = 4(1+\nu)M_{12}^\infty/(1-m^2), \qquad \alpha(x) = (3+x)/(1-x).$$

Заметим, что система (3.1) однозначно разрешима и относительно M_{kl}^∞, т. е. для получения однородного моментного поля M_{kl} в ЭЖВ необходимо равномерно распределить на бесконечности указанные моменты M_{kl}^∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
2. **Цвелодуб И. Ю.** К определению прочностных характеристик физически нелинейного включения в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 178–184.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 72–84.
4. **Цвелодуб И. Ю.** Об изгибе упругих пластин с физически нелинейным включением // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 152–157.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 23/IV 2008 г.