

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ

В. А. Сарайкин

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: vsaraikin@gmail.com

Изучены свойства модели блочной среды, состоящей из абсолютно жестких блоков, разделенных деформируемыми прослойками. Модель предложена для описания низкочастотной части спектра в волне возмущений, распространяющихся в среде с такой структурой. В основе модели лежит предположение о том, что низкочастотная часть волнового пакета позволяет получить с наименьшими искажениями информацию об усредненных характеристиках структуры среды на пути следования волн. При расчете волн в одномерной сборке из блоков (стержней) и деформируемых прослоек установлено, что модель, не учитывающая деформирование блоков, применима только в случае, когда жесткость прослойки мала по сравнению с жесткостью стержня. Внесена поправка, устраняющая это ограничение в случае длинноволнового приближения.

Ключевые слова: блочная среда, условия на контактных прослойках, нестационарные волны, смятие, жесткость пружины.

Необходимость учета дискретности строения реального горного массива отмечена в работах [1, 2]. В [3, 4] при решении задач о динамическом распространении трещины учтена дискретность материала на разных масштабных уровнях. Двумерная модель динамики дискретной среды, состоящей из недеформируемых прямоугольных блоков, контактирующих через тонкие упругие прослойки, рассмотрена в работе [5]. Полагалось, что прослойки между блоками состоят из двух частей, каждая из которых является поверхностным слоем блока, ослабленным дефектами, а значит, в большей степени подвержена действию нагрузки, чем ядро блока. Поэтому в [5] полагалось, что ядро является абсолютно жестким. Вследствие пренебрежения инерцией приближенный учет деформирования тонких составных слоев фактически свелся к замене их на эквивалентные пружины, работающие как на растяжение-сжатие, так и на сдвиг. Позднее с использованием теории Герца была учтена возможность смятия шероховатостей, равномерно распределенных на поверхности контакта прослоек [6–8].

В рамках одномерной модели исследуем специфику распространения волн в блочной среде. Рассматривается сборка, состоящая из n прямоугольных блоков (далее стержней длиной $2H$), между которыми находятся тонкие слои длиной $2h$, состоящие из двух одинаковых частей. Последний стержень сборки упирается в абсолютно жесткую стенку. Для того чтобы при динамическом воздействии на левый торец сборки исключить появление растягивающих напряжений и как следствие возможность нарушения контактов, предва-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06-05-64738, 06-05-64596) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3803.2008.5).

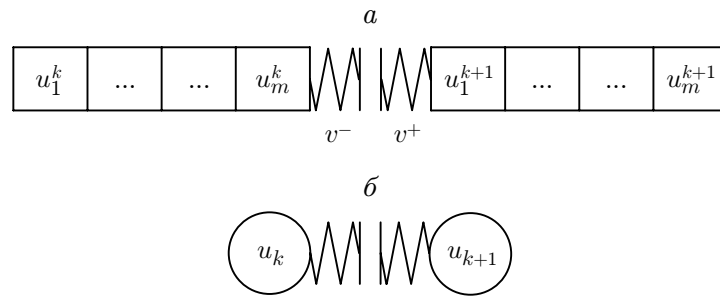


Рис. 1. Элемент блочной структуры с деформируемыми (а) и недеформируемыми (б) стержнями

рительно вся сборка была статически сжата. Поэтому далее все рассчитываемые величины следует понимать как отклонения от данного начального состояния; иными словами, в распространяющихся волнах допускается растягивающее напряжение, не превышающее величину начального сжатия.

Численное решение будем искать в предположении, что и стержни, и прослойки деформируются упруго. Характерный элемент такой цепочки показан на рис. 1, а, где прямоугольники соответствуют стержням, между которыми находится пружина-прослойка. В данном случае в точке соединения пружин перемещения их концов полагаем равными: $v^- = v^+$. Продольное перемещение $u^k(t, x)$ в k -м стержне описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} = \frac{1}{v_b^2} \ddot{u}^k, \quad v_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

$$(2H + 2h)(k - 1) \leq x \leq (2H + 2h)k - 2h \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь E , ρ — модуль Юнга и плотность материала стержня соответственно; точками отмечены производные по времени; ось x направлена слева направо.

Предположим, что пружины обладают вязкостью, поэтому с учетом линейной связи напряжения с деформацией и скоростью деформации в виде

$$\sigma = E_s(\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon})$$

закон деформирования пружин запишем следующим образом:

$$\sigma = c_s(u_r^{k+1} - u_l^k) + c_s \eta (\dot{u}_r^{k+1} - \dot{u}_l^k) \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (2)$$

Здесь $c_s = E_s/(2h)$ — приведенная суммарная жесткость пружин одной составной прослойки (жесткость, приходящаяся на единицу площади); E_s — модуль Юнга материала в прослойках; η — параметр вязкости; индексы l, r соответствуют значениям величины перемещения на левых и правых торцах стержней; верхний индекс — номер стержня.

Сформулируем граничные условия. К левому торцу первого стержня приложена заданная сжимающая динамическая нагрузка:

$$\sigma^1(t, 0) = E \frac{\partial u_l^1}{\partial x} = f(t) \leq 0, \quad (3)$$

в местах соединения стержней с пружиной должно быть выполнено условие равенства напряжений

$$\sigma_r^k = \sigma_l^{k+1} = c_s(u_l^{k+1} - u_r^k) + c_s \eta (\dot{u}_r^{k+1} - \dot{u}_l^k) \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (4)$$

а на правом конце сборки — условие равенства нулю перемещения:

$$u_r^n = 0.$$

Начальные условия задачи нулевые.

Задача решалась методом конечных разностей. Каждый стержень делился на m частей с шагом $2dx$. При расчете перемещений $u_l^k = u_1^k, u_2^k, \dots, u_{m-1}^k, u_m^k = u_r^k$ в k -м стержне и $u_l^{k+1} = u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{m-1}^{k+1}, u_m^{k+1} = u_r^{k+1}$ в $(k+1)$ -м стержне волновое уравнение (1) в концевой точке k -го стержня и в начальной точке $(k+1)$ -го стержня записывалось в дискретном виде с учетом условий сопряжения (4):

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m^k &= \frac{c_s}{2\rho dx} [u_1^{k+1} - u_m^k + \eta(\dot{u}_1^{k+1} - \dot{u}_m^k)] - \frac{c dx}{2\rho dx} (u_m^k - u_{m-1}^k), \\ \ddot{u}_1^{k+1} &= \frac{c dx}{2\rho dx} (u_2^{k+1} - u_1^{k+1}) - \frac{c_s}{2\rho dx} [u_1^{k+1} - u_m^k + \eta(\dot{u}_1^{k+1} - \dot{u}_m^k)] \\ (k &= 1, 2, \dots, n-1), \\ c dx &= E/(2 dx). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничное условие (3) записывается в конечных разностях стандартным способом. После дискретизации (5) по времени с шагом τ была получена расчетная явная схема типа “крест”.

Наряду с точными уравнениями (1)–(5) рассмотрена модель среды, в которой стержни полагались недеформируемыми и заменялись точечными массами (рис. 1, б). В этом случае имеем n масс, взаимодействующих через составную пружину ($v^- = v^+$). Тогда

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 &= c_s(u_2 - u_1) + c_s \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - f(t), \\ m_k \ddot{u}_k &= c_s(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + c_s \eta(\dot{u}_{k+1} - 2\dot{u}_k + \dot{u}_{k-1}), \\ m_k &= 2H\rho = \text{const} \quad (k = 2, 3, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (6)$$

Подобные задачи рассмотрены в [9, 10]. В данной работе приводятся более полные результаты расчетов с учетом необратимого смятия прослоек на контактной границе.

При расчете задач (1)–(6) выбранные характеристики материалов соответствовали кирпичу (в стержнях) и резине (в прослойках) [9]: $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, $v_b = 3100 \text{ м/с}$, $E = 1,922 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $E_s = 20 \text{ МПа}$. Линейные размеры элементов в сборке имели следующие значения: $2H = 0,085 \text{ м}$, $2h = 0,001 \text{ м}$. Полагалось, что воздействие имеет импульсный куполообразный характер с максимумом в точке t_0 :

$$f(t) = \begin{cases} p(t^2/t_0^2 - 2t/t_0)^2, & 0 \leq t \leq 2t_0, \\ 0, & t > 2t_0. \end{cases}$$

Значение нагрузки в точке максимума полагалось равным $p = -1 \text{ МПа}$.

Каждый стержень делился на 25 частей. Для того чтобы сохранить высокие частоты, обусловленные изменением решения из-за многократных отражений волн внутри стержней, во всех расчетах шаг по времени имел фиксированное малое значение $\tau = 10^{-9} \text{ с}$ (период отражений волн в стержне равен $5,48 \cdot 10^{-5} \text{ с}$). Значение параметра вязкости пружин полагалось равным $\eta = 10^{-5} \text{ с}$.

На рис. 2, а, 3, а представлены осциллограммы ускорений на отрезке $0 \leq t \leq 0,005 \text{ с}$, а на рис. 2, б, 3, б — соответствующие им осциллограммы скоростей.

Рис. 2 соответствует случаю $n = 10$, $t_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. На рис. 2, а, б показано развитие волнового процесса в центре второго стержня (в точной задаче) и на второй массе, на рис. 2, в, г — изменение величин в центре восьмого стержня и на восьмой массе. Высоко-частотные осцилляции не являются погрешностью расчетов по используемой разностной

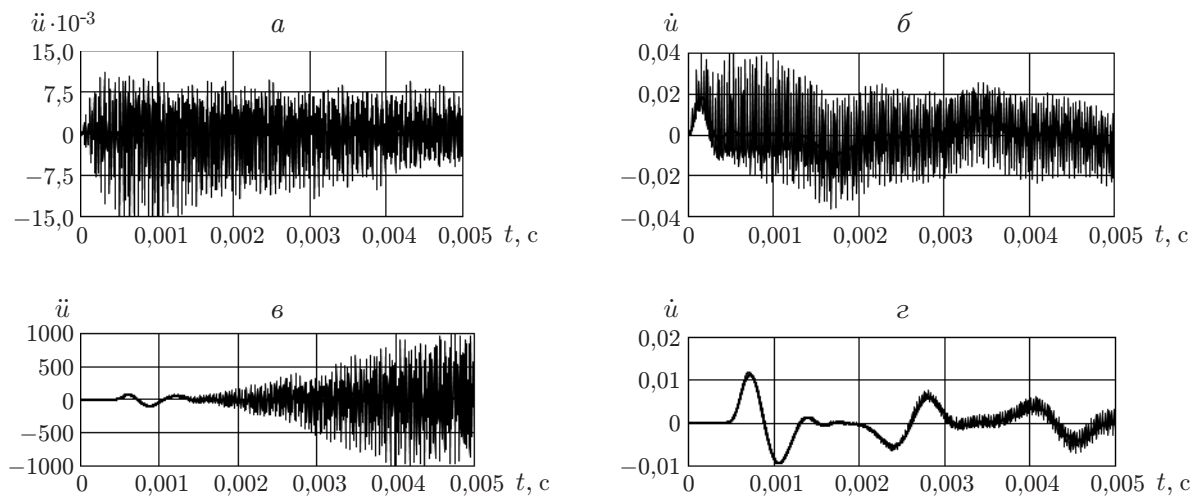


Рис. 2. Осциллограммы ускорений (*а*, *в*) и скоростей (*б*, *г*) при $E = 1,922 \times 10^4$ МПа, $2H = 0,085$ м, $E_s = 20$ МПа, $2h = 0,001$ м, $t_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ с, $\eta = 0,00001$ с: *а*, *б* — второй стержень сборки, *в*, *г* — восьмой стержень сборки; тонкие линии — численное решение задачи в точной постановке, жирные линии — решение в длинноволновом приближении (6)

схеме. При построении каждой кривой на рис. 2 из $5 \cdot 10^6$ расчетных значений были выбраны 1000 точек, т. е. между каждыми двумя точками находится 5000 точек. При значительном увеличении масштаба рис. 2 по времени будет видно, что колебания возникают при многократных отражениях внутри стержней. Представленные на рис. 2 кривые качественно описывают изменение высоких частот точного решения. Видно, что согласно приближению (6) волны с такой частотой практически не распространяются по сборке, амплитуда ускорений низкочастотной части незначительна (на два порядка меньше, чем в высокочастотной части спектра возмущения), т. е. в модели с массами высокие частоты отфильтровываются. Отметим, что если ускорения волн низкой частоты представить на осциллограмме в большем масштабе, то можно заметить, что максимумы и минимумы на ней соответствуют колебаниям в высокочастотной части спектра (см. рис. 2, *в*, *г*). После того как волна нагрузки проходит второй стержень, который находится вблизи освободившейся от нагрузки границы сборки, он начинает вибрировать (см. рис. 2, *а*). В восьмом стержне осцилляции скорости при разгрузке развиваются позднее, в этом стержне при увеличении расстояния, пройденного волной, проявляется эффект вязкости прослоек.

Рис. 3 соответствует случаю $n = 10$, $t_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, т. е. по сравнению со случаем, рассмотренным выше, изменена только длительность нагружения — время действия нагрузки в 10 раз больше, а длительность приближенно равна периоду колебаний стержня. При такой длительности воздействия значения скорости в точном и приближенном решениях практически не различаются, т. е. низкочастотное приближение хорошо согласуется с точным решением. По-видимому, это обусловлено тем, что основной вклад в распространяющиеся возмущения вносят низкие частоты. Согласно точному решению во втором стержне наблюдаются осцилляции ускорения, возникающие в тот момент, когда с освобожденного торца приходит волна.

Во всех рассмотренных случаях графики перемещений почти не различаются, напряжения меняются так же, как скорости на рис. 2, *б*, *г*, 3, *б*, *г*.

Дальнейшее увеличение длительности воздействия нагрузки t_0 улучшает соответствие решений.

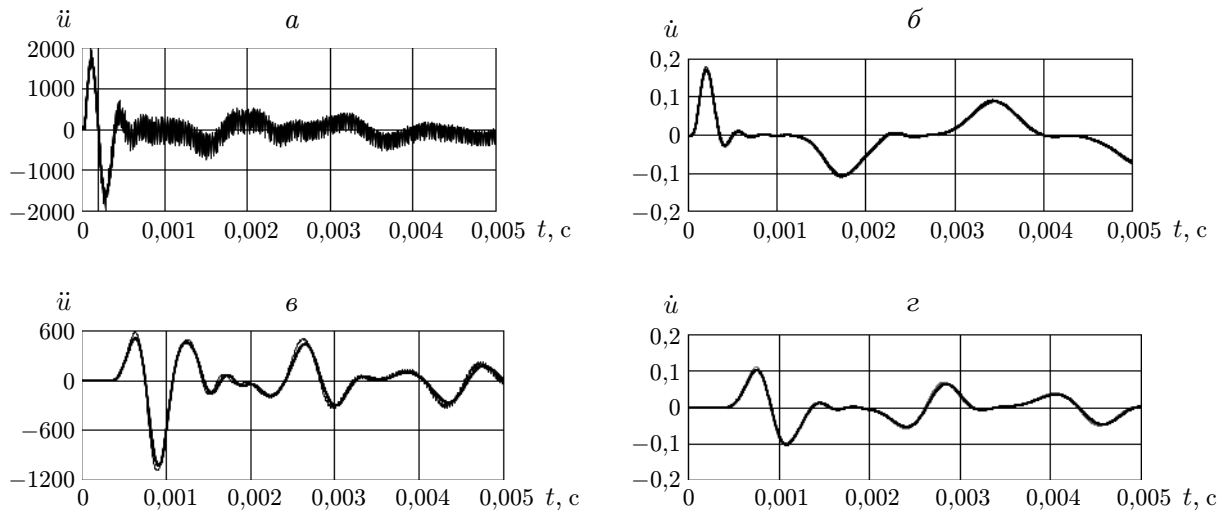


Рис. 3. Осциллограммы ускорений (*а, в*) и скоростей (*б, г*) при $E = 1,922 \times 10^4$ МПа, $2H = 0,085$ м, $E_s = 20$ МПа, $2h = 0,001$ м, $t_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $\eta = 0,00001$ с (обозначения те же, что на рис. 2)

Проведен расчет сборки с более жесткими прослойками. При всех неизменных прочих параметрах модуль Юнга был увеличен в 100 раз: $E_s = 2 \cdot 10^3$ МПа. Расчеты показали, что в этом случае решение, определяемое уравнениями (6), отличается от точного: при использовании приближенной модели скорость распространения возмущений оказалась значительно выше, а амплитуды существенно различались. С увеличением жесткости прослоек различия увеличивались.

Несоответствие решений возникает вследствие неучета жесткости стержней при замене их на точечные массы. Оказалось, что, полагая массу стержня сосредоточенной в точке, нельзя пренебрегать упругой работой, совершаемой в стержне. Для того чтобы замена была в среднем эквивалентной, точечная масса должна совершать работу так же, как последовательно присоединенная к прослойке пружина с приведенной жесткостью стержня $c_b = E/(2H)$. В этом случае при одной и той же площади контакта поперечного сечения стержня и прослойки должны быть выполнены равенства для суммарного удлинения блока и прослойки, а также для усилий, возникающих в них при этом:

$$x_b + x_s = x,$$

$$c_b x_b = c_s (x_s + \eta \dot{x}_s) = c_{sb} (x + \eta_{sb} * \dot{x}).$$

Здесь знак “*” обозначает свертку по времени; x — расстояние между центрами соседних масс.

Функция $\eta_{sb}(t)$ и свертка необходимы для описания развития во времени влияния деформации в стержне на “вязкий” процесс в прослойке. Применив преобразование Лапласа по времени с параметром s , получаем систему для изображений

$$x_b^L + x_s^L = x^L,$$

$$c_b x_b^L = c_s (1 + \eta s) x_s^L = c_{sb} (1 + \eta_{sb} s) x^L,$$

разрешив которую относительно изображения искомого усилия находим

$$\sigma^L = c_{sb} (1 + \eta_{sb} s) x^L = \frac{c_s c_b}{c_b + c_s} \left(1 + \frac{c_b}{c_s} \frac{s}{s + a/\eta} \right) x^L.$$

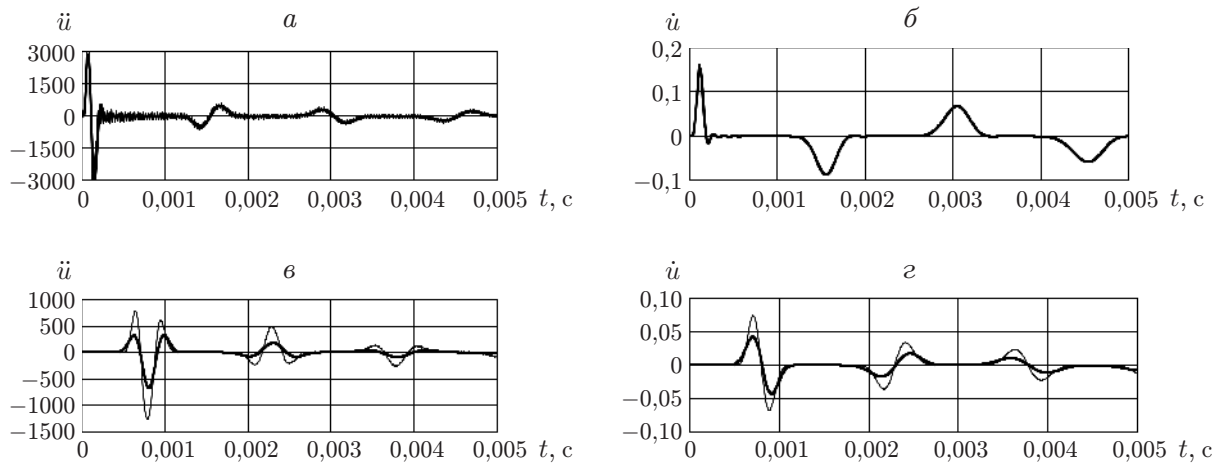


Рис. 4. Осциллограммы ускорений (*а, в*) и скоростей (*б, г*) при $E_s = 2 \cdot 10^3$ МПа, $2h = 0,01$ м, $t_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $n = 20$:

а, б — второй стержень (вторая масса) сборки, *в, г* — восемнадцатый стержень (восемнадцатая масса) сборки; тонкие линии — численное решение задачи в точной постановке, жирные линии — решение в длинноволновом приближении (6)

Отсюда, переходя к оригиналам, получаем

$$\sigma = c_{sb}(x + \eta_{sb} * \dot{x}), \quad \eta_{sb} = (c_b/c_s) e^{-at/\eta}, \quad a = 1 + c_b/c_s,$$

где множитель перед скобками означает, что приведенная жесткость характерной ячейки в цепочке масс и пружин равна

$$c_{sb} = \frac{c_s}{1 + c_s/c_b} = \frac{c_s}{1 + E_s H / (Eh)}. \quad (7)$$

Следовательно, в соотношениях (2)–(6) жесткость пружины c_s нужно заменить на жесткость c_{sb} (7), равную эффективной жесткости ячейки в конструкции стержень — прослойка, и в случае наличия вязкости соответствующие слагаемые заменить на свертки.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $E_s = 2 \cdot 10^3$ МПа, $2h = 0,01$ м, $t_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $n = 20$. Остальные параметры не менялись.

Зависимость ускорений и скоростей от времени показана на рис. 4. Видно, что точное и приближенное решения различаются незначительно. Наибольшее различие наблюдается в точках экстремумов. В расчетах, проведенных для еще более жестких пружин, точное и приближенное решения также удовлетворительно согласуются.

Из (7) следует, что модель, состоящую из жестких блоков, можно использовать в том случае, если жесткости элементов структуры удовлетворяют условию

$$E_s/h \ll E/H.$$

В случае абсолютно жестких масс ($c_b \rightarrow \infty$) вязкая составляющая в свертке в пределе становится сосредоточенной дельта-функцией:

$$\eta_{sb} = (c_b/c_s) e^{-at/\eta} \rightarrow \eta \delta(t).$$

После соответствующей замены в (2)–(6) получим систему (6).

Выше полагалось, что две пружины, представляющие собой прослойку, работают как единое целое, т. е. в месте их соединения выполняется равенство $v^- = v^+$. Предположим, что между пружинами вставлен дополнительный элемент (между вертикальными линиями на рис. 1), тогда $v^- \neq v^+$. Положим, что таким элементом являются шероховатости на

контактной границе прослоек, имеющие среднюю высоту $R \ll h$. Шероховатости могут сминаться, что учитывается в соответствии с теорией Герца. Вычислим жесткость таких последовательно соединенных пружин. Пусть C — суммарная жесткость, которой соответствует уменьшение длины y , складывающееся из уменьшения длин трех элементов:

$$y_1 = v^- - u_k, \quad y_2 = v^+ - v^-, \quad y_3 = u_{k+1} - v^+.$$

Отсюда следует, что

$$y = u_{k+1} - u_k = 2h\varepsilon$$

(ε — представление деформации в дискретной форме).

Силы, действующие на каждую пружину, одинаковы, поэтому

$$\sigma = Cy = 2c_s y_1 = c_c(y_2)y_2 = 2c_s y_3 \quad (8)$$

($c_c(y_2)$ — нелинейная жесткость, зависящая от величины смятия; $c_c(y_2)y_2$ — контактное напряжение).

Полагая, что шероховатости представляют собой полушары радиусом R , согласно теории Герца имеем [8]

$$c_c = c_s r \sqrt{-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{u_{k+1} - u_k}{2h} \leq 0, \quad r = \left(\frac{h}{aR}\right)^{3/2}, \quad y_2 \approx 2\varepsilon,$$

где a — безразмерная постоянная.

Из (8) следует выражение

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2c_s} + \frac{1}{c_c} + \frac{1}{2c_s},$$

соответствующее трем последовательно соединенным пружинам, поэтому жесткость составной прослойки равна

$$C = \frac{c_c}{1 + c_c/c_s} = \frac{c_s r \sqrt{-\varepsilon}}{1 + r \sqrt{-\varepsilon}}. \quad (9)$$

Из зависимости (9) следует, что при значительном увеличении деформации составная пружина при сжатии в пределе начинает работать как линейная пружина с жесткостью c_s .

Учитывая дополнительно жесткость стержня, в результате получаем представление жесткости $c(\varepsilon)$ характерного элемента сборки, состоящего из стержня, двух пружин и материала в зоне нелинейного смятия:

$$c(\varepsilon) = \frac{c_s r \sqrt{-\varepsilon}}{1 + r(1 + E_s H / (E h)) \sqrt{-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \leq 0.$$

Для учета влияния шероховатостей на контактной границе внутри составной прослойки это значение жесткости необходимо подставить вместо c_s в выражения (4)–(6).

Полагая, что смятие на контактной границе необратимо, напряжения, действующие на массы (в точной постановке — на стержни) со стороны прослоек, следует рассчитывать по формуле

$$\sigma = \begin{cases} c(\varepsilon)\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 0, \\ c_{sb}(\varepsilon - \varepsilon_0) + c(\varepsilon_0)\varepsilon_0, & \varepsilon_0 < \varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\varepsilon_0 < 0$ — величина деформации, достигнутой при сжатии. Если сжатие нарастает, то движение на диаграмме $\sigma - \varepsilon$ происходит вдоль нелинейной ветви (рис. 5), если сжатие убывает, то разгрузка и повторное нагружение происходят вдоль линейного участка

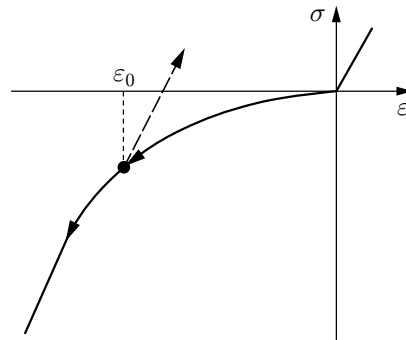


Рис. 5. Диаграмма σ - ε элемента структуры при необратимом смятии шероховатостей на контактной границе внутри составной прослойки:
штриховая линия — участок разгрузки

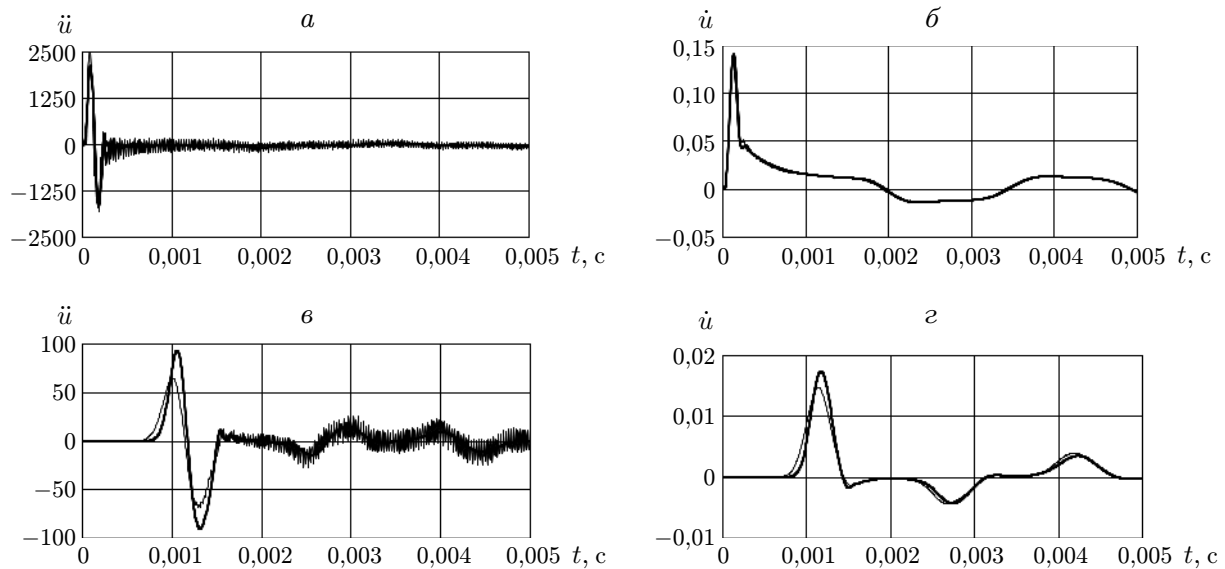


Рис. 6. Осциллограммы ускорений (*а, в*) и скоростей (*б, г*) при $E_s = 2 \cdot 10^3$ МПа, $2h = 0,01$ м, $t_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $n = 20$, $R = 0,2h$, $a = 1$ (обозначения те же, что на рис. 4)

(штриховая линия), до тех пор пока при повторном сжатии не будет превышено значение деформации ε_0 , достигнутой перед разгрузкой.

Зависимость коэффициентов в уравнении состояния от характеристик конструкции аналогична зависимости, имеющей место в композиционных материалах, если их эффективные модули вычисляются по правилу смесей через соответствующие характеристики компонентов и размеры характерной ячейки.

Расчеты, результаты которых представлены на рис. 4, были проведены также с учетом наличия зоны контакта с необратимым смятием шероховатостей (см. (10)) при следующих значениях параметров: $E_s = 2 \cdot 10^3$ МПа, $R = 0,2h$, $2h = 0,01$ м, $t_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $a = 1$, $n = 20$.

Зависимости ускорений и скоростей от времени приведены на рис. 6 для тех же элементов сборки, что и на рис. 4. Характер изменения ускорений и скоростей, определенный по точному и приближенному решениям, такой же, как и на рис. 4. Наибольшие различия также наблюдаются в точках локальных экстремумов. При наличии смятия элемент

прослойки становится менее жестким, что приводит к увеличению осциллирующей стержней в волне разгрузки. Кроме того, необратимое смятие приводит к уменьшению максимумов амплитуд рассчитываемых величин по сравнению с максимумами амплитуд на рис. 4, причем по мере увеличения расстояния, пройденного волной, это различие увеличивается.

Учет смятия шероховатостей на контактной границе имеет смысл для прослоек достаточно большой толщины. Так, расчеты, выполненные с учетом и без учета шероховатостей для сборки, толщина прослоек которой в 10 раз меньше ($2h = 0,001$ м), не выявили существенных различий между решениями.

Проведенное исследование позволяет сделать следующий вывод: для блочной среды со сложной формой блоков можно построить трехмерную модель распространения низкочастотных колебаний. При этом, по-видимому, точная форма блоков будет не столь важна, если на контактных границах блоков верно заданы продольная и сдвиговая жесткости блоков по нормали и в касательном направлении, т. е. основные характеристики упругих свойств и линейные размеры, определяющие жесткость блоков в этих направлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 4. С. 829–831.
2. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа V_μ // Докл. АН СССР. 1993. Т. 333, № 4. С. 515–521.
3. Слепян Л. И., Кулахметова Ш. А. Распространение трещины в массиве, состоящем из жестких блоков с упругими прослойками // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 12. С. 17–23.
4. Sleyuan L. I. Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
5. Сарайкин В. А., Степаненко М. В., Царева О. В. Упругие волны в среде с блочной структурой // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1988. № 1. С. 14–21.
6. Сарайкин В. А. Двумерные уравнения движения блочной среды // Тр. науч. конф. “Геодинамика и напряженное состояние недр Земли”, Новосибирск, 4–7 окт. 2005 г. Новосибирск: Ин-т горн. дела СО РАН, 2006. С. 200–207.
7. Сарайкин В. А. Уравнения движения блочной среды // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина / Под ред. Д. Д. Ивлева, Н. Ф. Морозова. М.: Физматлит, 2006. С. 652–658.
8. Сарайкин В. А. Расчет волн, распространяющихся в двумерной сборке из прямоугольных блоков // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2008. № 4. С. 32–42.
9. Александрова Н. И. О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2003. № 6. С. 38–47.
10. Александрова Н. И., Шер Е. Н. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2004. № 6. С. 49–57.

Поступила в редакцию 19/XII 2008 г.