

УДК 621.9.047; 532.528

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВОЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОДА ПРИ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЫХОДА ПО ТОКУ ОТ ЕГО ПЛОТНОСТИ

Л. М. Котляр, Н. М. Миназетдинов

Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, 423810 Набережные Челны, Россия
E-mails: leonid-kotlyar@mail.ru, nminazetdinov@yandex.ru

Получено аналитическое решение задачи об электрохимической обработке металлов катодом-инструментом криволинейной формы с учетом разрывной функции, описывающей зависимость выхода по току от его плотности. Согласно гидродинамической интерпретации исходная задача сводится к задаче теории течений идеальной жидкости со свободной поверхностью. Показано, что при использовании предлагаемой зависимости выхода по току от его плотности на неизвестной обрабатываемой поверхности существует три области с различными законами распределения доли заряда, затрачиваемой на растворение металла. Представлены результаты расчетов для различных частных случаев.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, потенциал, гидродинамическая аналогия, свободная поверхность.

DOI: 10.15372/PMTF20160114

Введение. Электрохимическая обработка металлов является перспективным методом, применяемым в машиностроении [1, 2]. Производительность и точность обработки металлов при электрохимическом формообразовании существенно зависят от доли заряда η (выхода по току для реакций анодного растворения металла), затраченной на растворение металла. Выход по току η зависит от различных параметров процесса, главным образом от анодной плотности тока j_a [1].

Модели зависимости выхода по току от плотности тока для нитратных и хлоратных электролитов. Наибольшая точность обработки металлов методом электрохимического формообразования достигается при использовании ступенчатой зависимости выхода по току η от анодной плотности тока j_a

$$\eta(j_a) = \begin{cases} 0, & j_a < j_{cr}, \\ \eta_0 = \text{const}, & j_a \geq j_{cr}, \end{cases} \quad (1)$$

где j_{cr} — критическая плотность тока, характерная для конкретного металла или сплава при электрохимической обработке в соответствующем электролите [1, 3]. Растворение металла происходит в основном на тех участках обрабатываемой заготовки (анода),

где расстояние до рабочей поверхности электрода-инструмента (катода) наименьшее. При увеличении этого расстояния плотность тока j_a уменьшается, а скорость растворения металла снижается вплоть до значения, при котором прекращается растворение. При использовании ступенчатой зависимости (1) можно получить четко выраженную границу между областью поверхности обрабатываемой заготовки, в которой происходит интенсивное растворение, и прилегающими к ней необрабатываемыми областями. Между указанными областями существует переходный участок, где выход по току η изменяется от нуля до значения η_0 при условии $j_a = j_{cr}$ [3].

В модели процесса, описанной в [4], использована зависимость

$$\eta(j_a) = \begin{cases} 0, & j_a \leq j_{cr}, \\ a_0 - a_1/j_a, & j_a > j_{cr}, \end{cases} \quad (2)$$

где $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ — постоянные, учитывающие свойства электролита и обрабатываемого материала. Зависимость (2) получена на основе известных экспериментальных данных [5], полученных при электрохимической обработке сталей в водных растворах нитрата натрия и хлората натрия.

В работе [6] для моделирования зависимости $\eta(j_a)$ предложено использовать скачкообразную функцию

$$\eta(j_a) = \begin{cases} 0, & j_a < j_{cr}, \\ a_0 - a_1/j_a, & j_a \geq j_{cr}. \end{cases} \quad (3)$$

Будем считать, что при $j_a = j_{max}$ достигается наибольшая производительность при обработке металлов $\eta = \eta_{max}$, при $j_a = j_{cr}$ выполняется равенство $\eta = \eta_{cr} \geq 0$ (рис. 1). Участок I на рис. 1 соответствует зоне, в которой происходит интенсивное растворение металла при больших значениях плотности тока. С течением времени за счет растворения металла на обрабатываемой поверхности образуются области, расстояние от которых до поверхности катода увеличивается, что приводит к уменьшению анодной плотности тока и скорости растворения металла в этих областях. В рассматриваемой модели увеличение межэлектродного расстояния приводит к уменьшению плотности тока от значения j_{max} до значения j_{cr} . При этом выход по току уменьшается от значения η_{max} до значения η_{cr} .

На участке II происходит резкое уменьшение η до нуля при постоянном значении плотности тока, равном j_{cr} . При наличии на анодной границе необрабатываемых зон им соответствует участок III, на котором плотность тока становится равной нулю.

Используя равенство $\eta_{cr} = \eta(j_{cr})$, получаем

$$a_1 = j_{cr}(a_0 - \eta_{cr}). \quad (4)$$

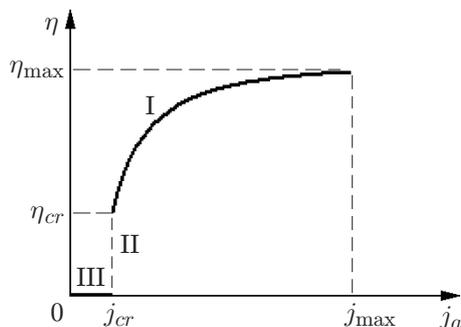


Рис. 1. Зависимость выхода по току от анодной плотности тока:

I — участок, на котором происходит интенсивное растворение металла; II — переходный участок; III — участок, на котором плотность тока равна нулю

Функция (3) является обобщением зависимостей (1), (2). При $a_0 = \eta_0$, $a_1 = 0$ она совпадает с зависимостью (1), а при $\eta_{cr} = 0$ — с непрерывной зависимостью (2). В отличие от зависимости (1) функция (3) учитывает переменность выхода по току в области интенсивного растворения металла и не противоречит известным экспериментальным зависимостям $\eta(j_a)$ [5], графики которых содержат участок резкого изменения выхода по току η при приближении плотности тока к значению j_{cr} .

Ниже в рамках модели идеального процесса [1] находится численно-аналитическое решение двумерной задачи определения установившейся формы поверхности детали при электрохимической обработке криволинейным катодом-инструментом симметричной формы.

Вводятся система декартовых координат (x_1, y_1) , связанная с катодом, который движется в направлении оси ординат, и комплексный потенциал электростатического поля $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$, $z_1 = x_1 + iy_1$ ($u(x_1, y_1)$ — потенциал поля; $v(x_1, y_1)$ — функция тока). Значения потенциалов u_a , u_c на поверхностях анода и катода постоянны.

В отличие от задачи, рассмотренной в [7], при постановке и решении данной задачи используется зависимость (3).

Постановка задачи. Схема сечения межэлектродного промежутка для рассматриваемой задачи представлена на рис. 2. Граница катода-инструмента представляет собой криволинейный контур с осью симметрии, совпадающей с осью ординат. Вектор \mathbf{V}_c определяет направление движения катода. В силу симметрии межэлектродного промежутка ограничимся рассмотрением его левой части. Линия DE является границей катода, CD и EF — линии симметрии. Углы, образованные касательной к дуге DE в точках D , E и осью абсцисс, равны нулю и π соответственно. Описанный электрод-инструмент можно применять для формирования глубоких пазов в деталях машин, при резке заготовок и в других технологических процессах.

В соответствии с зависимостью (3) искомую анодную границу разделим на три области. В области I (линия BC на рис. 2), соответствующей участку I на графике зависимости $\eta(j_a)$ (см. рис. 1), условие, определяющее установившуюся форму анодной границы, выражается равенством

$$\eta(j_a)j_a = j_0 \cos \theta, \quad j_a = \kappa \frac{\partial u}{\partial n_1}, \quad j_0 = \frac{\rho V_c}{\varepsilon}, \quad (5)$$

где κ — удельная электропроводность среды; ρ — плотность материала анода; θ — угол между вектором \mathbf{V}_c и внешней нормалью \mathbf{n}_1 к обрабатываемой поверхности [1]. Используя формулы (3), (5), получаем распределение нормальной производной потенциала на границе

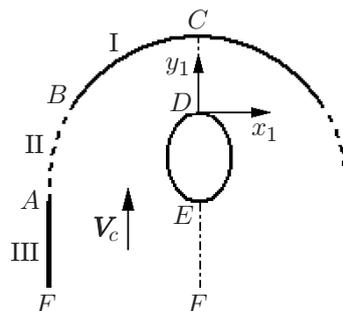


Рис. 2. Схема сечения межэлектродного промежутка:
I–III — участки, показанные на рис. 1

анода

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{a_1 + j_0 \cos \theta}{a_0 \varkappa}. \quad (6)$$

Переход с участка I на участок II на графике зависимости $\eta(j_a)$ (см. рис. 1) соответствует переходу на анодной границе из области I в область II (линия AB на рис. 2). На этом участке анодной границы выполняется условие

$$j_a = j_{cr}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{j_{cr}}{\varkappa}. \quad (7)$$

Участку III на графике зависимости $\eta(j_a)$ (см. рис. 1) соответствует область III анодной границы, которая моделируется вертикальным прямолинейным участком AF (см. рис. 2). В этой области выход по току практически равен нулю и растворения металла не происходит. Плотность тока на участке AF изменяется от значения j_{cr} в точке A до нуля в бесконечно удаленной точке F . Положения точек перехода A и B неизвестны и определяются при решении задачи.

Введем характерную длину H

$$H = \varkappa \frac{u_a - u_c}{j_0}$$

и безразмерные переменные

$$x = \frac{x_1}{H}, \quad y = \frac{y_1}{H}, \quad n = \frac{n_1}{H}$$

и представим комплексный потенциал в безразмерном виде

$$W(z) = \varphi(z) + i\psi(z), \quad z = x + iy, \quad W(z) = \frac{W_1(z) - iu_c}{u_a - u_c},$$

где $\psi(z)$ — его мнимая часть, являющаяся гармонической функцией в области межэлектродного промежутка и удовлетворяющая следующим условиям: $\psi = 0$ на границе DE катода; $\psi = 1$ на границе $FABC$ анода.

Скорость перемещения точек границы BC анода определяется законом (6), который в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = b(a + \cos \theta), \quad b = \frac{1}{a_0}, \quad a = \frac{a_1}{j_0}. \quad (8)$$

Согласно условию (7) на участке AB анода выполняется равенство

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = c, \quad c = \frac{j_{cr}}{j_0}. \quad (9)$$

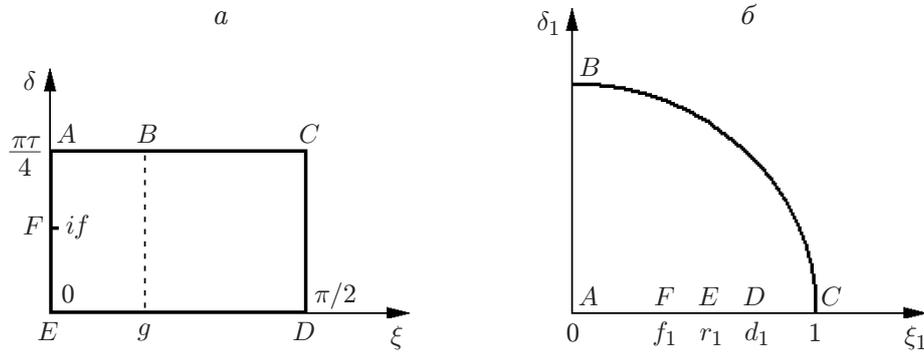
В гидродинамической интерпретации модели электрического поля условия (8), (9) определяют годограф скорости V фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости на неизвестных участках анодной границы [8]. На участке BC выполняется условие

$$V = b(a + \cos \theta), \quad (10)$$

где θ — аргумент вектора скорости. На участке AB модуль скорости является постоянной величиной:

$$V = c. \quad (11)$$

Гидродинамическим аналогом рассматриваемой задачи является задача теории струй идеальной жидкости [9, 10] об определении свободных границ BC и AB с заданными на них условиями (10) и (11) соответственно. Поток создается системой источников, непрерывно распределенных вдоль линии EF , и стоков на линии CD .

Рис. 3. Плоскости параметрических переменных t (а) и t_1 (б)

Численно-аналитическое решение задачи. Введем две параметрические комплексные переменные: переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t ($0 < \xi < \pi/2$, $0 < \delta < \pi|\tau|/4$, $\tau = i|\tau|$) (рис. 3,а), и переменную $t_1 = \xi_1 + i\delta_1$, изменяющуюся в области G_{t_1} ($|t_1| < 1$, $\xi_1 > 0$, $\delta_1 > 0$) (рис. 3,б). Соответствующие точки на рис. 2, 3 обозначены одними и теми же буквами.

Связь между областями G_t и G_{t_1} устанавливается с помощью конформных отображений [11]. Зависимость $t(t_1)$ определяется из соотношения

$$\frac{dt}{dt_1} = \frac{\pi i}{2I_1} \frac{F(t_1)}{\sqrt{(t_1^2 - r_1^2)(t_1^2 - d_1^2)}}, \quad (12)$$

где

$$I_1 = \int_{r_1}^{d_1} \frac{F(x)}{\sqrt{(x^2 - r_1^2)(d_1^2 - x^2)}} dx, \quad F(x) = \frac{1 + x^2}{\sqrt{(1 - x^2 r_1^2)(1 - x^2 d_1^2)}}.$$

Используя формулу (12), найдем параметры

$$f = \frac{\pi}{2I_1} \int_{f_1}^{r_1} \frac{F(x)}{\sqrt{(r_1^2 - x^2)(d_1^2 - x^2)}} dx, \quad |\tau| = \frac{4}{\pi} \left(f + \frac{\pi}{2I_1} \int_0^{f_1} \frac{F(x)}{\sqrt{(r_1^2 - x^2)(d_1^2 - x^2)}} dx \right),$$

$$g = \frac{\pi}{2I_1} \int_0^1 \frac{1 - x^2}{\sqrt{(x^2 + r_1^2)(1 + x^2 r_1^2)(x^2 + d_1^2)(1 + x^2 d_1^2)}} dx.$$

Конформное отображение области G_{t_1} на область G_t выполняется с помощью функций [11]

$$t_1(t) = \sqrt{-\omega(t) - \sqrt{\omega^2(t) - 1}}, \quad \omega(t) = \frac{\sqrt{k}(3 + kl)\vartheta_2(2t) + (3kl + 1)\vartheta_3(2t)}{(1 - kl)(\vartheta_3(2t) - \sqrt{k}\vartheta_2(2t))}, \quad (13)$$

$$k = \left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \right)^2, \quad l = -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_3(2g)}{\vartheta_2(2g)},$$

где $\vartheta_i(u)$ ($i = \overline{1, 4}$) — тета-функции с периодами π , $\pi\tau$ [12].

Комплексный потенциал $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = 0, \quad \psi(\xi + \pi\tau/4) = 1, \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad \psi(i\delta) = 1, \quad \delta \in [f, \pi|\tau|/4], \\ \varphi(i\delta) = 0, \quad \delta \in [0, f], \quad \varphi(\pi/2 + i\delta) = \varphi_0, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4]. \end{aligned}$$

Постоянная величина φ_0 определяет величину электрического тока, протекающего через анодную границу. Областью изменения комплексного потенциала является прямоугольник, длины сторон которого равны единице и φ_0 . Используя метод конформных отображений, найдем производную комплексного потенциала и параметр φ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = NF_1(t), \quad N = \left(\int_0^f F_1(ix) dx \right)^{-1}, \quad \varphi_0 = N \int_0^{\pi/2} F_1(x) dx, \\ F_2(t) = \left(\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_3(2t) - \vartheta_2(0)\vartheta_2(2t)}{\vartheta_2(2fi)\vartheta_3(2t) - \vartheta_3(2fi)\vartheta_2(2t)} \right)^{0,5}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию Жуковского

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right) = r - i\theta, \quad r = \ln \frac{V}{V_0}, \quad V_0 = c.$$

На прямолинейных участках границы области течения ее мнимая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \chi(i\delta) = -\pi, \quad \delta \in [0, f], \quad \operatorname{Im} \chi(i\delta) = -\pi/2, \quad \delta \in (f, \pi|\tau|/4], \\ \operatorname{Im} \chi(\pi/2 + i\delta) = 0, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4]. \end{aligned}$$

Пусть на дуге DE задана непрерывная функция $\theta(s)$, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки E (см. рис. 2). Вводя кривизну $K(\theta)$ дуги DE , получаем граничное условие

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{K(\xi)}{V_0} \left| \frac{dW}{d\xi} \right| \exp(-r(\xi)), \quad \xi \in [0, \pi/2]. \quad (14)$$

Из условий (10), (11) следует

$$b(a + \cos \theta(\xi + \pi\tau/4)) = V_0 \exp(r(\xi + \pi\tau/4)), \quad \xi \in [g, \pi/2]; \quad (15)$$

$$\operatorname{Re} \chi(\xi + \pi\tau/4) = 0, \quad \xi \in [0, g]; \quad (16)$$

$$\theta_B = \theta(g + \pi\tau/4) = \arccos(V_0/b - a). \quad (17)$$

В точке A выполняется условие гладкого отрыва [9, 10]

$$\theta'(t) = 0, \quad t = \pi\tau/4. \quad (18)$$

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы $\chi(t) = \chi_*(t) + \Omega(t)$, где $\Omega(t) = \nu(t) + i\varepsilon(t)$ — аналитическая в области G_t и непрерывная в области $G_t \cup \partial G_t$ функция. Функция Жуковского $\chi_*(t) = r_*(t) - i\theta_*(t)$, $r_* = \ln(V_*/V_0)$ соответствует течению в случае, когда дуга DE заменена отрезком, касающимся дуги DE в точке E . На данном отрезке выполняется условие $\theta_*(\xi) = \theta(0) = \pi$, $\xi \in [0, \pi/2]$, при этом граница DC поворачивается на угол, равный π [13]. На границе BC выполняется равенство $V_* = V_0$, т. е. $\operatorname{Re} \chi_*(\xi + \pi\tau/4) = 0$, $\xi \in [g, \pi/2]$.

Используя метод особых точек Чаплыгина [10], получаем

$$\chi_*(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(t - if)\vartheta_1(t + if)}{\vartheta_4(t - if)\vartheta_4(t + if)} - \pi i.$$

Для решения задачи необходимо найти выражение производной комплексного потенциала и функции Жуковского относительно параметрической переменной t_1 . С помощью метода конформных отображений получаем

$$\frac{dW}{dt_1} = N_1 F_2(t_1), \quad N_1 = i \left(\int_{d_1}^1 F_2(x) dx \right)^{-1},$$

$$F_3(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{(x^2 - f_1^2)(1 - x^2 f_1^2)(x^2 - r_1^2)(1 - x^2 r_1^2)(x^2 - d_1^2)(1 - x^2 d_1^2)}}. \quad (19)$$

На границе области G_{t_1} функция $\chi_*(t_1)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \chi_*(\xi_1) &= -\pi/2, \quad \xi_1 \in [0, f_1), & \operatorname{Im} \chi_*(\xi_1) &= -\pi, \quad \xi_1 \in (f_1, 1], \\ \operatorname{Re} \chi_*(i\delta_1) &= 0, \quad \delta_1 \in [0, 1], & \operatorname{Re} \chi_*(t_1) &= 0, \quad t_1 = \exp(i\sigma_1), \quad \sigma_1 \in [0, \pi/2], \end{aligned}$$

где σ_1 — полярный угол в плоскости переменной t_1 .

Используя метод особых точек Чаплыгина, найдем функцию $\chi_*(t_1)$:

$$\chi_*(t_1) = \frac{1}{2} \ln \frac{(t_1 - f_1)(1 + t_1 f_1)}{(t_1 + f_1)(1 - t_1 f_1)} - \pi i.$$

Так же как и в работе [14], функцию $\Omega(t)$ представим в виде суммы $\Omega(t) = \Omega_1(t) + \Omega_2(t_1(t))$, где $\Omega_1(t) = \nu_1(t) + i\varepsilon_1(t)$; $\Omega_2(t_1) = \nu_2(t_1) + i\varepsilon_2(t_1)$. Потребуем выполнения следующих граничных условий для неизвестных функций $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t_1)$:

$$\varepsilon_1(i\delta) = 0, \quad \varepsilon_1(\pi/2 + i\delta) = \pi, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4], \quad \nu_1(\xi + \pi\tau/4) = 0, \quad \xi \in [0, \pi/2]; \quad (20)$$

$$\varepsilon_2(\xi) = 0, \quad \xi \in [0, \pi/2]; \quad (21)$$

$$\nu_1(i\delta_1) = \nu_2(i\delta_1) = 0, \quad \delta_1 \in [0, 1], \quad \varepsilon_2(\xi_1) = 0, \quad \xi_1 \in [0, 1]; \quad (22)$$

$$\nu_1(\exp(i\sigma_1)) = 0, \quad \sigma_1 \in [0, \pi/2]. \quad (23)$$

С учетом условия (21) из уравнения (14) получаем

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\xi} = \frac{K(\theta(\xi))}{V_0} \rho(\xi) \exp(-(\nu_1(\xi) + \nu_2(\xi))), \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad (24)$$

$$\theta(\xi) = \pi - \varepsilon_1(\xi), \quad \rho(\xi) = \left| \frac{dW}{d\xi} \right| \exp(-r_*(\xi)) = N F_1(\xi) \left(\frac{\vartheta_4(\xi - if)\vartheta_4(\xi + if)}{\vartheta_1(\xi - if)\vartheta_1(\xi + if)} \right)^{0,5}.$$

Интегрируя выражение (24) по переменной ξ на отрезке $[0, \pi/2]$, находим

$$\frac{I}{V_0} = \pi, \quad I = \int_0^{\pi/2} K(x)\rho(x) \exp(-(\nu_1(x) + \nu_2(x))) dx. \quad (25)$$

Используя равенство (25), представим уравнение (24) в виде

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\xi} = \frac{\pi}{I} K(\xi)\rho(\xi) \exp(-(\nu_1(\xi) + \nu_2(\xi))), \quad \xi \in [0, \pi/2]. \quad (26)$$

С учетом условия (23) соотношение (15) запишем в виде

$$\begin{aligned} b(a + \cos \theta(t_1)) &= V_0 \exp(\nu_2(t_1)), \\ \theta(t_1) &= \theta_*(t_1) - \varepsilon_1(t(t_1)) - \varepsilon_2(t_1), \quad t_1 = \exp(i\sigma_1), \quad \sigma_1 \in [0, \pi/2]. \end{aligned} \quad (27)$$

В плоскости переменной t_1 равенствам (17), (18) соответствуют условия

$$\theta_B = \theta(i) = \arccos(V_0/b - a); \quad (28)$$

$$\theta'(\delta_1) = 0, \quad \delta_1 = 0. \quad (29)$$

Используя граничные условия (20), функцию $\Omega_1(t)$ представим в виде ряда с вещественными коэффициентами [13]

$$\Omega_1(t) = 2ti + \frac{\pi|\tau|}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sh}((2ti + \pi|\tau|/2)n). \quad (30)$$

В плоскости комплексной переменной t_1 функцию $\Omega_2(t_1)$ можно аналитически продолжить на весь круг $|t_1| \leq 1$ и представить в виде степенного ряда с вещественными коэффициентами

$$\Omega_2(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} t_1^{2k-1}. \quad (31)$$

Выбранная в таком виде функция $\Omega_2(t_1)$ удовлетворяет граничным условиям (22).

Коэффициенты разложений (30), (31) определяются методом коллокаций из уравнений (26), (27). Система уравнений для вычисления коэффициентов разложений (30), (31) решается методом Ньютона совместно с уравнениями (25), (28), (29), из которых определяются параметры f_1 , r_1 , d_1 и соответствующие им параметры $|\tau|$, f , g . Затем с помощью параметрической зависимости

$$\frac{dz}{dt_1} = \frac{\exp(-\chi(t_1))}{V_0} \frac{dW}{dt_1}$$

определяется геометрия анодной границы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда криволинейный участок границы катода представляет собой дугу эллипса, фокусы которого расположены на оси ординат. Кривизна эллипса вычисляется по формуле

$$K(\theta) = \frac{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}{p}, \quad p = \frac{a_2^2}{b_2}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}{b_2},$$

где a_2 , b_2 — длины полуосей эллипса.

При численном решении задачи были выбраны следующие значения параметров: $a_2 = 0,1$, $b_2 = 0,15$, $j_0 = 100$ А/см². На рис. 4 представлены результаты расчета положения анодных границ. При $a_0 = 0,9$, $\eta_{cr} = 0,7$ выполнены расчеты при значениях критической плотности тока $j_{cr} = 40, 50, 60$ А/см² (кривые 2–4). Соответствующие значения параметра a_1 , вычисленные с помощью формулы (4), равны 8, 10, 12. Безразмерное расстояние между линиями AF и EF (см. рис. 2) для указанных случаев равно $h = 1,007; 0,931; 0,861$, безразмерная ширина межэлектродного зазора DC (см. рис. 2) равна $L = 0,461; 0,453; 0,445$ соответственно.

Проведены также расчеты при $a_0 = 0,9$, $j_{cr} = 60$ А/см², $\eta_{cr} = 0,5$ и указанных выше значениях a_2 , b_2 , j_0 (кривая 5). В этом случае $h = 0,831$, $L = 0,408$.

Кривые 6, 7 получены при тех же значениях a_2 , b_2 , j_0 , j_{cr} , η_{cr} , что и в предыдущем случае, и различных значениях параметра a_0 . При $a_0 = 0,7$ получены значения $h = 0,809$, $L = 0,365$, при $a_0 = 0,5$ — $h = 0,764$, $L = 0,304$.

Заключение. Из представленных результатов моделирования электрохимического формообразования следует, что при увеличении критической плотности тока j_{cr} расстояние h уменьшается. При больших значениях j_{cr} достигается бóльшая степень локализации процесса растворения металла. Результаты сравнения значений L , полученных при

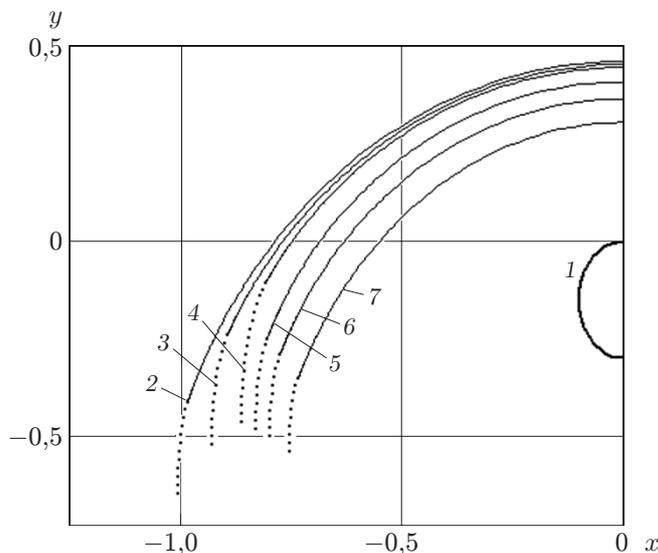


Рис. 4. Положения границ катода (1) и анода (2–7) при $a_2 = 0,1$, $b_2 = 0,15$, $j_0 = 100 \text{ A/cm}^2$:

2–4 — $a_0 = 0,9$, $\eta_{cr} = 0,7$ (2 — $j_{cr} = 40 \text{ A/cm}^2$, 3 — $j_{cr} = 50 \text{ A/cm}^2$, 4 — $j_{cr} = 60 \text{ A/cm}^2$);
5–7 — $j_{cr} = 60 \text{ A/cm}^2$, $\eta_{cr} = 0,5$ (5 — $a_0 = 0,9$, 6 — $a_0 = 0,7$, 7 — $a_0 = 0,5$); сплошные
линии — участок BC анодной границы, на котором выполняется условие (10), штрих-
ховые — переходный участок AB, на котором выполняется условие (11)

$\eta_{cr} = 0,7$ и $\eta_{cr} = 0,5$, а также положений анодных границ (кривые 4, 5 на рис. 4) показывают, что уменьшение η_{cr} приводит к снижению производительности при обработке металлов. Согласно [4] параметр a_0 зависит от концентрации C электролита: большим значениям C соответствуют большие значения параметра a_0 . Из полученных расчетных данных следует, что уменьшение параметра a_0 приводит к уменьшению производительности при обработке металлов (кривые 5–7 на рис. 4), но при этом можно достичь большей точности обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. Д. Высокоскоростное электрохимическое формообразование / А. Д. Давыдов, Е. Козак. М.: Наука, 1990.
2. Житников В. П. Импульсная электрохимическая размерная обработка / В. П. Житников, А. Н. Зайцев. М.: Машиностроение, 2008.
3. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 77–81.
4. Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 179–184.
5. Седыкин Ф. В., Орлов Б. П., Матасов В. Ф. Исследование анодного выхода по току с применением постоянного и импульсного напряжения // Технология машиностроения. 1975. № 39. С. 3–7.
6. Миназетдинов Н. М. Об одной задаче электрохимической обработки металлов с учетом переменности выхода по току для реакций анодного формообразования // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2012. Т. 16, № 5. С. 154–159.

7. **Миназетдинов Н. М.** Об одной схеме электрохимической обработки металлов криволинейным электродом-инструментом // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 2. С. 170–175.
8. **Клоков В. В.** Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.
9. **Биркгоф Г.** Струи, следы и каверны / Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло. М.: Мир, 1964.
10. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
11. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1987.
12. **Уитекер Э. Т.** Курс современного анализа. Т. 2. Трансцендентные функции / Э. Т. Уитекер, Дж. Н. Ватсон. М.: Физматгиз, 1963.
13. **Котляр Л. М.** Об одном случае струйного течения идеальной жидкости // Изв. вузов. Математика. 1976. № 2. С. 101–104.
14. **Котляр Л. М.** Плоские стационарные задачи жидкости с начальным градиентом / Л. М. Котляр, Э. В. Скворцов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979.

Поступила в редакцию 21/VII 2014 г.
