

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ РАБОТЫ МАЛОРАЗМЕРНОГО ТВЕРДОТОПЛИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Л. К. Гусаченко¹, А. Д. Рычков², А. Б. Кискин¹

¹Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск
kiskin@kinetics.nsc.ru, gusachen@kinetics.nsc.ru

²Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, rychn@ict.nsc.ru

Обсуждается возможность существования стационарного режима работы малых двигателей. Более подробное исследование известного частотного уравнения позволило для рассмотренной физической постановки дать и более полную «карту устойчивости» работы малых двигателей. При этом оказалось, что в некоторой области значений параметров ν , r (характеризующих зависимость скорости стационарного горения от давления и зависимость температуры поверхности от начальной температуры) горение в малом двигателе устойчиво, а в большом — нет.

Ключевые слова: анализ устойчивости, частотное уравнение, скорость горения, граница области устойчивости, твердотопливный ракетный двигатель, микродвигатель.

ВВЕДЕНИЕ

С уменьшением размеров твердотопливного ракетного двигателя (или газогенератора со сверхзвуковым истечением) механизм его работы претерпевает качественные изменения. Возникают новые трудноустраняемые виды неустойчивости стационарного режима и обостряется проблема запуска (выхода на этот режим). От микродвигателя, как правило, требуется только создание заданного импульса без особых ограничений на его форму. Поэтому в некоторых случаях для практики приемлемым может оказаться нестационарный режим выгорания заряда или даже его взрыв. Однако существует потребность и в микродвигателе (а тем более в малом двигателе) со стационарным режимом работы.

В модели уменьшению размера соответствует уменьшение параметра $\chi = t_c/t_b$, где $t_c = M/M^*$ — характерное время заполнения/опорожнения камеры, $t_b = \alpha/u^2$ — время перестройки прогретого слоя горящего топлива. Здесь α — температуропроводность состава, u — линейная скорость горения, $M = V\rho_g$ — масса газа в камере сгорания, V — ее объем, ρ_g — плотность газа в ней, M^* — массовый расход продуктов (за 1 с) через сопло камеры сгорания.

Если $t_c \gg t_b$, то можно при меняющем-

ся давлении использовать квазистационарный закон горения, а давление находить из нестационарного баланса массы газа в камере. При этом возможны различные виды акустической и гидродинамической неустойчивости. Я. Б. Зельдович показал [1], что при уменьшении параметра χ возможна неустойчивость другого типа, для которой впоследствии был введен термин « L^* -неустойчивость» [2, 3].

Если же $t_c \ll t_b$ (что характерно для микродвигателей), то из-за малости чисел Рейнольдса акустические и гидродинамические типы неустойчивости оказываются невозможными, баланс массы газа в камере, определяющий величину давления, будет уже квазиравновесным, но скорость горения придется находить из нестационарной модели (например, из феноменологической модели Зельдовича — Новожилова [4]).

Предполагается, что характерное время t_r всех «малоинерционных» процессов в волне горения много меньше времени пребывания продуктов газификации в камере двигателя, которое практически совпадает с t_c (если в конструкции не предусмотрены дополнительные «непроточные» стабилизирующие объемы). Разумеется, это предположение о соотношении времен накладывает ограничения на «малость» двигателя. Под «малоинерционными» имеются в виду все процессы после стадии инертного прогрева конденсированной фазы. Таким образом, газофазные реакции успевают завершиться в камере сгорания (в противном

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-08-01298-а).

случае возможна еще «химическая» неустойчивость, описанная в [5, 6]). Сделанное предположение означает, например, для двигателя с торцевым зарядом, что расстояние от горячей поверхности до выходного отверстия больше толщины той части волны горения, в которой упомянутые реакции должны завершиться. Поскольку эта толщина обычно составляет малые доли миллиметра, можно утверждать, что предположение справедливо и для некоторых микродвигателей. При $t_r \ll t_c$ можно также пренебречь исследованным в [7] влиянием теплотеря на устойчивость работы двигателя. Вероятность появления двух упомянутых выше «дополнительных» видов неустойчивости возрастает с уменьшением размера микродвигателя, хотя уменьшается с ростом давления в нем. Полученные далее результаты без дополнительных оценок неприменимы при $t_r \approx t_c$. Для описания процесса в этой области параметров известны теоретические уточнения феноменологической модели на основе дополнительных предположений о процессах в «маломинерционных» зонах волны горения [8]. Кроме того, при $t_r \approx t_c$ возможна синхронизация колебаний параметров зоны подповерхностных экзотермических реакций. Такие колебания имеют место при горении многих составов, они не могут быть описаны моделью Зельдовича — Новожилова, но «не портят» эту модель, пока разупорядочены вдоль горячей поверхности (что выполняется при $t_r \ll t_c$), см. [9, 10].

Для ситуации $t_r \ll t_c$ «неакустическая» неустойчивость работы твердотопливного ракетного двигателя (или газогенератора со сверхзвуковым истечением) исследовалась еще более 30 лет назад [1–4]. В этих работах методом малых возмущений получено и исследовано частотное уравнение, в линейном приближении определяющее границы устойчивости двигателя в пространстве входных параметров задачи. Позже были проведены некоторые расчеты и для нелинейной задачи [11]. К сожалению, упомянутые исследования не дают достаточно полной картины. Частотное уравнение проанализировано лишь для ограниченного набора параметров. В частности, не обращалось внимание на следующий из частотного уравнения парадоксальный вывод о возможности стационарного режима работы двигателей малых размеров при значении показателя ν в зависимости скорости горения u от

давления p ($\nu = \frac{d \ln u}{d \ln p}$), большем единицы. Громоздкие процедуры нахождения и анализа корней сложного частотного уравнения создавали опасность получения (при устранении иррациональности) дополнительных ложных корней, о чем предупреждал Б. В. Новожилов в [4]. Тем не менее, в более поздней работе [7] эта ошибка появилась (см. ниже). Мы проводим здесь, на наш взгляд, более подробный и наглядный анализ «карты устойчивости», начиная с допускающих упрощения частных случаев микро- и больших двигателей и заканчивая «малым двигателем» ($\chi \approx 1$), когда упрощения невозможны.

В [1, 4] для исследования «неакустической» неустойчивости твердотопливного двигателя приведено частотное уравнение, которое удобно представить в виде

$$2\omega r - k(\zeta - 1) - \frac{\nu(\zeta + 1) + 2\omega\delta}{1 + \chi\omega} + (\zeta + 1) = 0, \quad (1)$$

$$\zeta = \sqrt{1 + 4\omega}, \quad \text{Re}(\zeta) > 0.$$

Предполагается, что малые возмущения зависят от безразмерного времени τ как $\exp(\omega\tau)$, так что в области устойчивости для всех корней (1) должно выполняться условие $\text{Re}(\omega) < 0$. В уравнении (1) использованы обозначения из [1, 4]:

$$\nu = \frac{\partial \ln u^0}{\partial \ln p}, \quad k = (T_s^0 - T_0) \frac{\partial \ln u^0}{\partial T_0}, \quad r = \frac{\partial T_s^0}{\partial T_0},$$

$$\delta = \nu r - \mu k, \quad \mu = \frac{1}{T_s^0 - T_0} \frac{\partial T_s^0}{\partial \ln p}.$$

Здесь $u^0(p, T_0)$, $T_s^0(p, T_0)$ — эмпирические зависимости скорости горения и температуры поверхности в стационарном режиме от давления и начальной температуры.

МИКРОДВИГАТЕЛИ ($\chi \ll 1$) С ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ГОРЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В данном параграфе $r = \delta = 0$ (следует из $T_s = \text{const}$) и уравнение (1) принимает вид

$$\nu(\zeta + 1) = (1 + \chi\omega)[\zeta + 1 - k(\zeta - 1)], \quad (2)$$

$$\zeta = \sqrt{1 + 4\omega}, \quad \text{Re}(\zeta) > 0.$$

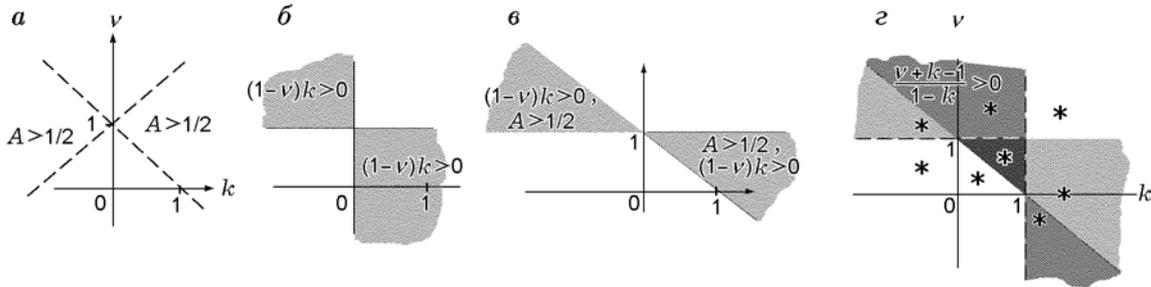


Рис. 1. Область устойчивости (светлая на части *г*) стационарного режима микродвигателя при $\chi = r = \delta = 0$:

в точках, помеченных звездочками, устойчивость/неустойчивость подтверждена выходом/невыходом на стационарный режим в двигателе при численном счете с использованием феноменологической модели [4]

В [4] отмечено, что при подстановке $\omega = 0$ в (2) «из него немедленно следует, что потеря устойчивости при $\omega = 0$ может реализоваться лишь в малоинтересном для практики случае $\nu = 1$ ». Это высказывание справедливо только частично, что становится ясно при взгляде на «карту устойчивости» (рис. 1).

Действительно малоинтересны только участки границы устойчивости $\nu = 1, k < 0$ и $k = 1, \nu < 0$ (неустойчивость при $\nu > 1$ и при $k > 1, r = 0$ давно известна для больших двигателей). Но показанная на рис. 1 и нигде не обсуждавшаяся ранее область устойчивости при $\nu > 1, k > 1$ заслуживает внимания.

Покажем, как вид рис. 1 следует из частотного уравнения (2). В микродвигателях $\chi \ll 1$, в этом случае уравнение (2) сводится к следующему:

$$\sqrt{1 + 4\omega} = 2A - 1, \quad A = \frac{k}{k + \nu - 1}. \quad (3)$$

Из вида (3) вытекает, что решение для ω — вещественное, существует только при $A > 1/2$ (см. рис. 1, *а*) и имеет вид

$$\omega = A(A - 1) = (1 - \nu) \frac{k}{(k + \nu - 1)^2}. \quad (4)$$

Согласно (4) в приближении Зельдовича ($T_s = \text{const}$) неустойчивость работы твердотопливного микродвигателя можно ожидать при $(1 - \nu)k > 0$ (светло-серая область на рис. 1, *б*). Ограничение $A > 1/2$ вносит уточнение: неустойчивость возможна только в зоне пересечения областей $A > 1/2, (1 - \nu)k > 0$ (светло-серая область на рис. 1, *в*). В остальной части плоскости рис. 1, *в* представленный выражением (4) корень частотного уравнения (3) соот-

ветствует экспоненциально убывающей со временем части возмущения $\exp(\omega\tau)$, $-1/4 < \omega < 0$, или вообще не существует (в области $A < 1/2$). Как показано в [12] для случая $p = \text{const}$, отсутствие корня частотного уравнения означает всего лишь, что процесс устойчив, только возмущение убывает не строго по экспоненте, а как $\tau^{-b} \exp(-\tau/4)$, $b = \text{const}$ (см. также приложение). Заметим теперь, что при получении (3) из (1) использовано условие $|\omega\chi| \ll 1$, так что для полноты исследования нужно проверить, не дает ли уравнение (1) другой неустойчивый корень при таких $|\omega| \gg 1$, когда условие $|\omega\chi| \ll 1$ не выполняется, несмотря на $|\chi| \ll 1$. Если $|\omega| \gg 1$ и $|\chi| \ll 1$, то (2) принимает вид

$$-(k - 1)(1 + \chi\omega) - \nu = 0, \quad \omega = \frac{\nu + k - 1}{1 - k} \cdot \frac{1}{\chi}. \quad (5)$$

Область неустойчивости $\omega > 0$ для этого корня показана темно-серым цветом на рис. 1, *г*.

Приведенный на рис. 1, *г* результат, полученный с использованием метода малых возмущений, был проверен также численным решением нелинейной нестационарной задачи в постановке [4] при $u^0(p, T_0) \sim p^\nu \exp(\beta T_0)$, $\beta = (T_s - T_0) \partial \ln(u) / \partial T_0 = \text{const}, T_s = \text{const}$. Расчет проводился с «достаточной» точностью (увеличение которой уже не улавливалось визуально на выдаваемых рисунках). Значениям входных параметров k, ν соответствуют звездочки на рис. 1, *г*. Во всех случаях расчеты показали неограниченное возрастание отклонения от режима или стремление его к нулю в соответствии с линейной теорией. При этом в случае неустойчивости характерное время развития возмущения имело порядок $1/\omega$ (ω по (3) или по (5) в зависимости от того, в светло-

серую или темно-серую область попала звездочка на рис. 1).

Для сравнения на рис. 1, *г* штриховой линией показана область устойчивости (внутренность прямого угла) для большого двигателя ($\chi \gg 1$) с топливом, имеющим постоянную температуру поверхности. При этом следует иметь в виду (см. [9, 10]), что в большом двигателе неустойчивость «справа вертикальной границы» сводится к появлению малых (относительно размера заряда) неоднородностей на горячей поверхности и не создает колебаний давления, так что для практики важно в этом случае соблюсти только условие $\nu < 1$. Это замечание справедливо и при учете переменности температуры поверхности (см. следующий параграф).

МИКРОДВИГАТЕЛИ ($\chi \ll 1$) С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Частотное уравнение (1) для этого случая можно представить в виде

$$2\omega b + 2 - (a + 1)(1 + \sqrt{1 + 4i\omega}) = 0, \quad (6)$$

$$a = \frac{\nu - 1}{k}, \quad b = \frac{r - \delta}{k},$$

который, в отличие от общего случая ($\chi \approx 1$), позволяет показать всю «карту устойчивости» на одной плоскости. Для поиска границы колебательной неустойчивости полагаем в (6) $\omega = iw$, $0 < w < \infty$, при этом $\sqrt{1 + 4i\omega} = D(w) + 2iw/D(w)$, $D(w) = \sqrt{0.5(1 + \sqrt{1 + 16w^2})}$, и уравнение (6) распадается на два уравнения (для вещественной и мнимой частей):

$$2 = (a + 1)(D(w) + 1), \quad (7)$$

$$2\omega b = (a + 1)2w/D(w). \quad (8)$$

Эти соотношения дают параметрическую (с параметром w) связь величин a , b . Исключая w из (7), (8), можно получить ее и в явном виде:

$$b = \frac{(a + 1)^2}{1 - a} \quad \text{или} \quad r - \delta = \frac{(1 - \nu - k)^2}{1 - \nu + k}, \quad (9)$$

(последнее с учетом обозначений (6)), соответственно для частоты колебаний на границе устойчивости

$$w = \text{Im}(\omega) = \frac{\sqrt{k(1 - \nu)}}{r - \delta}. \quad (10)$$

Соотношения (9), (10) были получены ранее в [7] для частного случая (который мы здесь только и рассматриваем), когда можно пренебречь влиянием теплопотерь и зависимостью температуры пламени от давления. Следует, однако, отметить опасность ошибочных выводов из (9). В [7] это условие устойчивости (со знаком $>$) приведено с единственным ограничением $\nu < 1$. Это означает, например, что согласно (9) можно ожидать устойчивости при $k = 0.5$, $r - \delta > 0.01$, если $0.395 < \nu < 0.595$, в частности, значение $\nu = 0$ в эту область не попадает и дает неустойчивость. Однако по определению $1 < D(w) < \infty$ и из (7) следует, что граница колебательной неустойчивости существует (и описывающее ее соотношение (9) справедливо) только при условии $-1 < a = (\nu - 1)/k < 0$, которое и устраняет ложный корень. Область «колебательной» неустойчивости соответствует светло-серому цвету на рис. 2.

Найдем теперь область «апериодической» неустойчивости $\omega > 0$ (ω — вещественная) аналогично тому, как это сделано выше для случая $r = 0$. Для этого представим (6) в виде

$$0.5b(\zeta^2 - 1) + 2 - (\zeta + 1)(a + 1) = 0, \quad (11)$$

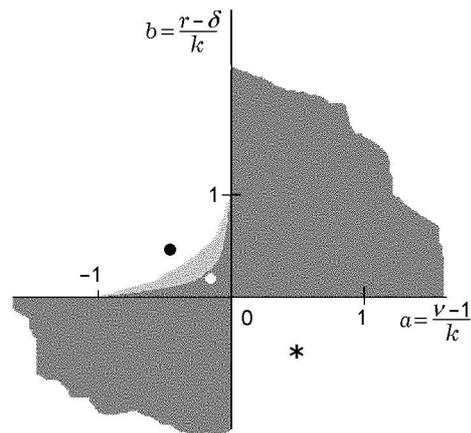


Рис. 2. Область устойчивости (светлая) стационарного режима работы микродвигателя ($\chi = 0$) при $\delta/r < 1$:

черная точка — численный счет (с выходом на стационарный режим) при $\chi = 0.01$, $\delta = 0$, $k = 0.5$, $\nu = 0.75$, $r = 0.25$ и при $\chi = 0.01$, $\delta = 0$, $k = 1$, $\nu = 0.5$, $r = 0.5$; белая точка — численный счет (с неустойчивостью) при $\chi = 0.01$, $\delta = 0$, $k = 0.5$, $\nu = 0.875$, $r = 0.125$ и при $\chi = 0.01$, $\delta = 0$, $k = 1$, $\nu = 0.75$, $r = 0.25$; звездочка — численный счет (с выходом на стационарный режим) при $\chi = 0.001$, $\delta = 0$, $k = 1$, $\nu = 1.5$, $r = -0.5$

$$\zeta = \sqrt{1 + 4\omega}.$$

В координатах a , b — это семейство прямых линий, заполняющих при изменении ζ от 1 до ∞ область «апериодической» неустойчивости. Границу области устойчивости найдем как огибающую семейства прямых, для чего следует к соотношению (11) добавить результат его дифференцирования по параметру ζ :

$$b\zeta - (a + 1) = 0. \quad (12)$$

Исключив ζ из (11), (12), получим огибающую в виде

$$b = (1 - \sqrt{-a})^2, \quad -1 < a < 0. \quad (13)$$

Область «апериодической» неустойчивости соответствует темно-серому цвету на рис. 2.

Аналогично тому, как это сделано выше для случая $r - \delta = 0$, была получена дополнительная информация (опущенная здесь для краткости) об асимптотическом поведении возмущений процесса в ситуации, соответствующей различным областям плоскости a , b на рис. 2. Как и на рис. 1, имеется область (не показанная на рисунке), где процесс устойчив, хотя частотное уравнение (6), полученное в предположении чисто экспоненциальной зависимости возмущений от времени, не имеет решений (см. приложение).

Найдем теперь аналогичную (4) оценку «высокочастотного» корня, потерянного нами при простой подстановке $\chi = 0$ в (1). Полагая $\chi \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, $\chi\omega \rightarrow \text{const}$, получим

$$-r + \delta/(1 + \chi\omega) = 0, \quad \omega = [(\delta/r) - 1]/\chi. \quad (14)$$

Согласно (14) «высокочастотная» неустойчивость имеет место при $\delta/r > 1$, а при $\delta/r < 1$ границы устойчивости задает рис. 2. Заметим, что последний вариант ($\delta/r < 1$) реализуется для многих составов, имеющих (согласно термодинамическим измерениям А. А. Зенина [13, 14]) «универсальную зависимость скорости горения от температуры поверхности», когда $|\delta| \ll 1$.

БОЛЬШИЕ ДВИГАТЕЛИ ($\chi \gg 1$)

Простая подстановка $\chi \rightarrow \infty$ в частотное уравнение (1) сводит его к описанию ситуации при постоянном давлении и позволяет найти «чисто топливную» границу устойчивости, описанную для такого случая в [4]. Что

касается границы «двигательной» устойчивости, то характерное время возникающих вблизи нее возмущений имеет порядок t_c (а используемое нами безразмерное время $\tau = t/t_b$ — порядок $t_c/t_b = \chi$), так что $\omega \sim 1/\chi \ll 1$. В этом случае из (1) следует $\omega = (\nu - 1)/\chi$ и для устойчивости ($\omega < 0$) требуется выполнение известного условия $\nu < 1$. Заметим, что пересечение «топливной» границы для больших двигателей не влечет катастрофических последствий: согласно [9, 10] возникающая за этой границей неустойчивость без поддержки колебаниями давления (отсутствующими при $\chi \gg 1$, $\nu < 1$) сводится всего лишь к появлению на горячей поверхности беспорядочно движущихся неоднородностей размером в несколько толщин прогретого слоя. Возможно, заслуживает внимания возникающая при этом специфическая турбулентность потока, отходящего от горячей поверхности. Но если бы даже произошла синхронизация (совпадение по фазе) колебаний по всей горячей поверхности, они не смогли бы вызвать сколько-нибудь заметных колебаний давления: условие $\chi \gg 1$ означает, что даже при мгновенной газификации всего прогретого слоя (толщиной x/u) относительное увеличение массы газа в камере (а значит, и давления) много меньше единицы.

МАЛЫЕ ДВИГАТЕЛИ ($\chi \approx 1$)

При условии $\chi \approx 1$ никакие упрощения в частотном уравнении (1) невозможны и приходится выбирать, плоскость какой пары из имеющихся параметров k , r , ν , χ , δ удобнее для построения «карты устойчивости». Обычно с хорошей точностью известны все параметры, кроме r , δ . Для r , δ с какой-то долей уверенности можно указать только интервал возможных значений. Соответственно и устойчивость или неустойчивость желательно предсказывать сразу для целого интервала значений r , δ , поэтому варианты с участием координат r , δ представляются более пригодными для обсуждения. Тем не менее, примеры расчета положения области устойчивости в координатах k , ν далее также приводятся (для приближения Зельдовича, когда $r = 0$). Координаты k , χ и r , χ здесь не рассматриваем только потому, что (из-за нелинейности частотного уравнения относительно χ) в них не удастся использовать максимально наглядную интерпретацию области «апериодической» неустойчивости как гео-

метрического места соответствующего семейства прямых линий.

Удобно представить результат в нескольких разных системах координат. Начнем с k, r , чтобы можно было видеть совпадение предельного случая при $\chi \rightarrow \infty$ с известным результатом Б. В. Новожилова [4] в этих координатах. Для поиска границы колебательной неустойчивости полагаем в (1) $\omega = iw$, $0 < w < \infty$, при этом $\sqrt{1 + 4iw} = D(w) + 2iw/D(w)$, $D(w) = \sqrt{0.5(1 + \sqrt{1 + 16w^2})}$, и уравнение (1) распадается на два уравнения (для вещественной и мнимой частей), которые после преобразований (с использованием обозначения $d = 1/D$) принимают вид

$$k(d) = \frac{1 + d}{1 - d} \times \left(1 - 2d \frac{2\nu d^3 + \chi(1 - d)(\nu d + \delta)}{4d^4 + \chi^2(1 - d^2)} \right), \quad (15)$$

$$r(d) = d \left[\left(k(d) - 1 \right) \left(1 - \frac{2d^2}{\chi(1 + d)} \right) + 2d^2 \frac{2d - \nu(1 + d)}{\chi(1 - d^2)} \right]. \quad (16)$$

Эти соотношения дают параметрическую (с параметром $0 < d < 1$) связь величин k, r . На рис. 3 представлена граница устойчивости при вариации параметра χ ($\nu = 0.7, \delta = 0$).

Для поиска области «апериодической» неустойчивости полагаем ω вещественным и положительным, $0 < \omega < \infty$. Далее принимаем во внимание, что в координатах k, r уравнение (1) задает семейство прямых линий, заполняющих при изменении ζ от 1 до ∞ область «апериодической» неустойчивости. Границу области устойчивости найдем как огибающую семейства этих прямых, для чего к соотношению (1) следует добавить результат его дифференцирования по параметру ω с последующей заменой ω на параметр ζ в соответствии с выражением $\omega = (\zeta^2 - 1)/4$. После преобразований получим соотношения, задающие огибающую $r(k)$ параметрически с параметром ζ :

$$r(\zeta) = \frac{2k}{\zeta + 1} - \frac{2}{\zeta - 1} + A(\zeta), \quad (17)$$

$$A(\zeta) = 4 \frac{2\nu + \delta(\zeta - 1)}{(\zeta - 1)(4 + \chi(\zeta^2 - 1))},$$

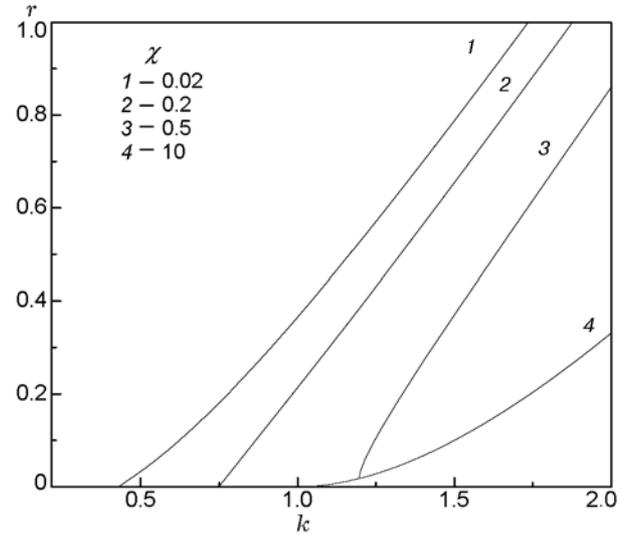


Рис. 3. Область устойчивости (левее и выше соответствующих линий) на плоскости k, r при $\nu = 0.7, \delta = 0$ и различных значениях χ : «апериодическая» неустойчивость сразу за границей — только на горизонтальном ее участке

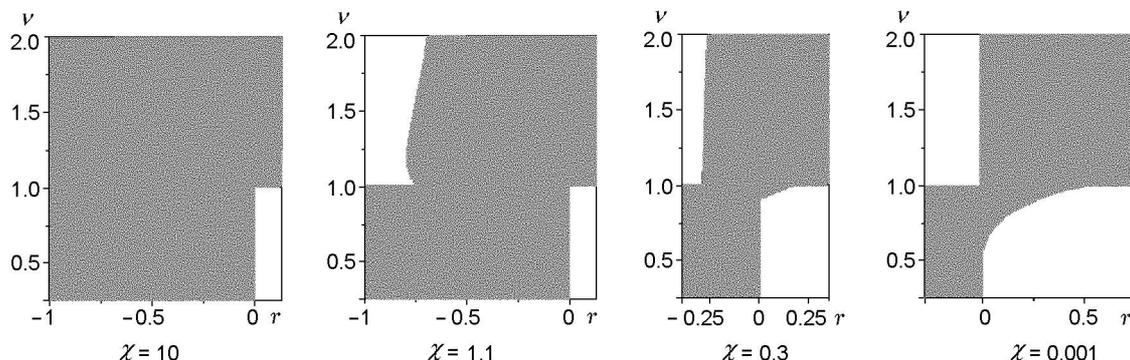
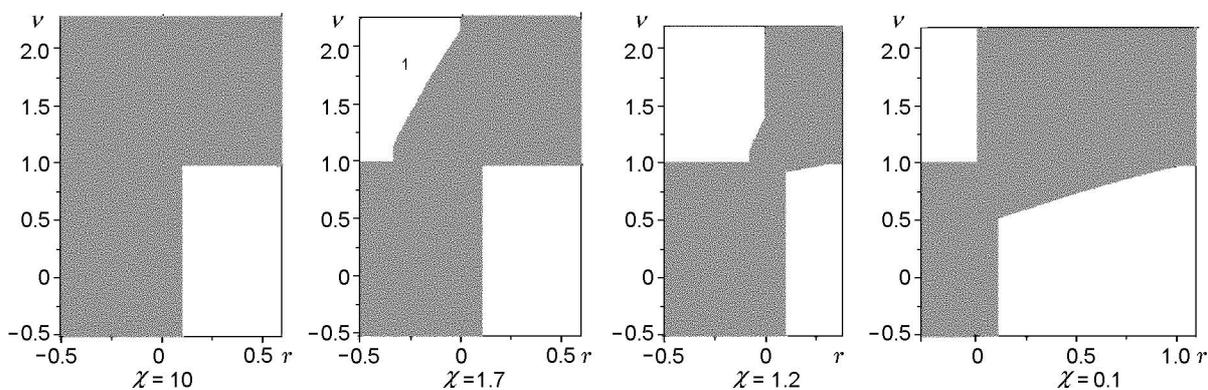
$$k(\zeta) = \left(\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)^2 \left[1 - \frac{4\nu}{4 + \chi(\zeta^2 - 1)} \right] - \frac{\chi\zeta(\zeta + 1)^2 A(\zeta)}{4 + \chi(\zeta^2 - 1)}. \quad (18)$$

Для больших двигателей ($\chi \rightarrow \infty$) область устойчивости совпадает с таковой, полученной в [4] для случая постоянного давления. При любом χ граница устойчивости состоит из двух участков: отрезка оси r и бесконечной ветви «колебательной» границы.

Аналогичная процедура в координатах r, ν (при фиксированных χ, k, δ) позволяет получить «колебательную» границу устойчивости (в параметрическом виде с параметром $d, 0 < d < 1$)

$$\nu(d) = \left\{ \left[1 - \frac{k(1 - d)}{(1 + d)} \right] [d^4 + 0.25\chi^2(1 - d^2)] - 0.5\chi\delta d(1 - d) \right\} / \{d^2[d^2 + 0.5\chi(1 - d)]\}, \quad (19)$$

$$r(d) = d \left[k - 1 + 2d^2 \frac{2d(\delta + \nu(d)d) - \chi\nu(d)(1 + d)}{4d^4 + \chi^2(1 - d^2)} \right] \quad (20)$$

Рис. 4. Область устойчивости (светлая) стационарного режима при $\delta = 0$, $k = 0.5$ Рис. 5. Область устойчивости (светлая) стационарного режима при $\delta = 0$, $k = 1.5$

и «аперриодическую» границу устойчивости (в параметрическом виде с параметром ζ , $1 < \zeta < \infty$)

$$\nu(\zeta) = \left\{ \left[1 - k \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right)^2 \right] [1 + 0.25\chi(\zeta^2 - 1)]^2 - \delta\chi\zeta(\zeta - 1)^2 \right\} / [4 + \chi(\zeta - 1)(3\zeta + 1)], \quad (21)$$

$$r(\zeta) = \frac{2k}{\zeta + 1} - \frac{2}{\zeta - 1} + \frac{4(2\nu(\zeta) + \delta(\zeta - 1))}{(\zeta - 1)(4 + \chi(\zeta^2 - 1))}. \quad (22)$$

«Карта устойчивости» выглядит по-разному при $k > 1$ и $k < 1$, поэтому на рис. 4, 5 показаны примеры для обоих случаев.

Два обстоятельства заслуживают внимания при анализе рис. 4, 5.

(а) С уменьшением параметра χ (габаритов двигателя) «классическая» область устойчивости при $\nu < 1$ начинает сужаться. В квадранте $r > 0$, $\nu < 1$ «колебательная» граница

с уменьшением ν пересекается с «почти вертикальной» границей. Последняя при $k < 1$ (см. рис. 4) на самом деле представляет собой вертикальную линию $r = 0$, а при $k > 1$ (см. рис. 5) — «промежуточную асимптоту», на которой при $\nu = 0$ выполняется $r = (k-1)^2/(k+1)$ и лишь при $\nu \rightarrow \infty$ имеем $r \rightarrow 0$. «Промежуточная асимптота» — это та самая «топливная» часть границы устойчивости, на которую в больших двигателях можно не обращать внимания, если размер заряда хотя бы на порядок больше толщины прогретого слоя.

(б) Как и для микродвигателей (см. рис. 2), для малых двигателей имеет место «экзотическая» область устойчивости в квадранте $r < 0$, $\nu > 1$, которая расширяется с уменьшением размера (и практически отсутствует для больших двигателей). Следует отметить, что разработанных составов с $r < 0$, $\nu > 1$ нет только потому, что для больших двигателей они непригодны. Известны отдельные компоненты с $\nu > 1$ (например, перхлорат аммония при давлении $300 \div 1000$ атм). Что касается параметра r , то существует принципиаль-

ная возможность достижения $r < 0$ при определенном соотношении параметров реакций в конденсированной и газовой фазах [15].

В координатах r, δ (при фиксированных χ, k, ν) полученные аналогичным способом уравнения для «колебательной» границы устойчивости (в параметрическом виде с параметром $d, 0 < d < 1$) имеют вид

$$\delta(d) = \frac{1}{d} \times \left[\frac{\left(1 - k \frac{1-d}{1+d}\right)(2d^4 + 0.5\chi^2(1-d^2)) - 2\nu d^4}{\chi(1-d)} - \nu d^2 \right],$$

$$r(d) = d \left[k - 1 + \frac{2d^2(2d - \nu(1+d) - (k-1)(1-d))}{\chi(1-d^2)} \right],$$

для «аперiodической» границы устойчивости (в параметрическом виде с параметром $\zeta, 1 < \zeta < \infty$) —

$$\delta(\zeta) = \frac{2\nu}{1-\zeta} + \frac{B(\zeta)}{4\chi\zeta} \left(B(\zeta) \left(1 - k \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^2 \right) - \frac{4\nu}{\zeta-1} \right),$$

$$B(\zeta) = \frac{4}{\zeta-1} + \chi(\zeta+1),$$

значение $r(\zeta)$ определяется из соотношения (22).

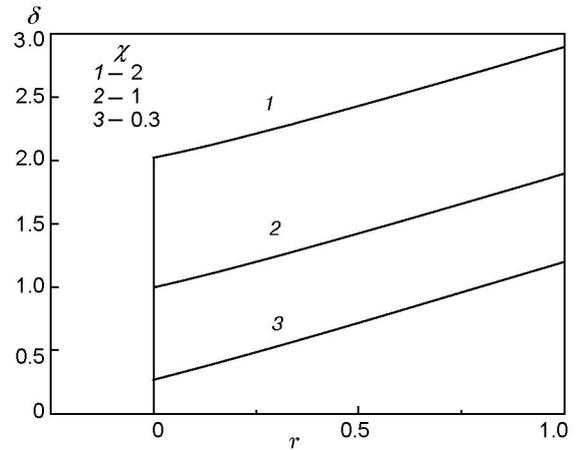


Рис. 6. «Карта устойчивости» в координатах r, δ при $k = 0.5, \nu = 0.7$ и различных значениях χ : устойчивость правее и ниже соответствующей границы

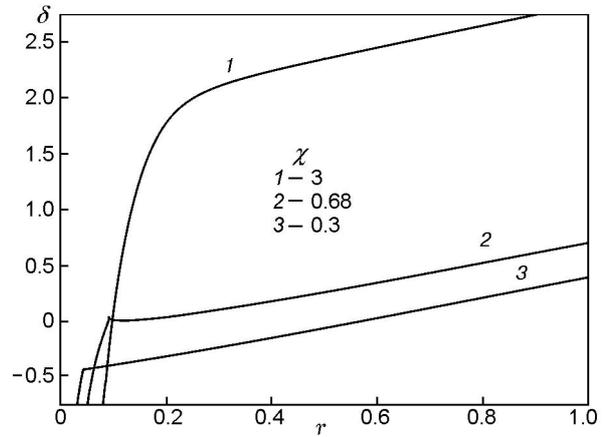


Рис. 7. «Карта устойчивости» в координатах r, δ при $k = 1.5, \nu = 0.7$ и различных значениях χ : область устойчивости правее и ниже соответствующих линий

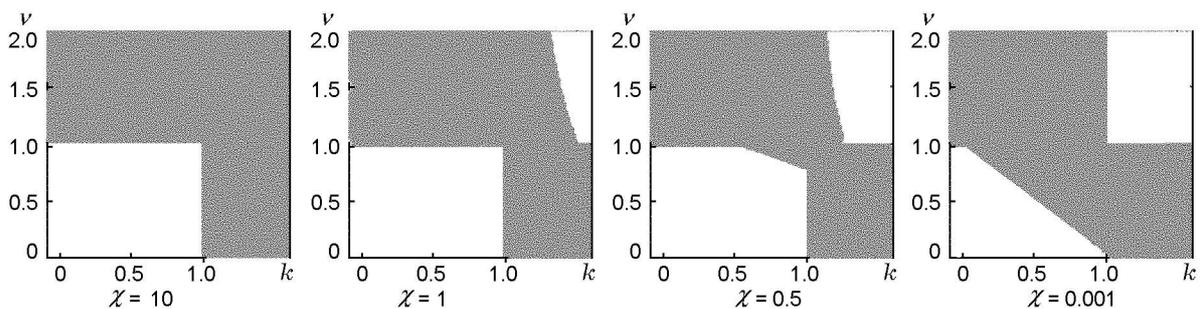


Рис. 8. Область устойчивости (светлая) стационарного режима при $r = \delta = 0$

Область устойчивости на рис. 6 ограничена «колебательной» границей (на наклонных участках) и «апериодической» вертикальной линией $r = 0$; на рис. 7 за всеми границами — только колебательная неустойчивость.

Рассчитанная таким же способом «карта устойчивости» в координатах ν , k для приближения Зельдовича $r = \delta = 0$ приведена на рис. 8. Вариант при $\chi = 0.001$ практически совпадает с рис. 1.

ВЫВОДЫ

В рамках феноменологической модели нестационарного горения проведен анализ устойчивости стационарных режимов работы твердотопливных реактивных двигателей в широком диапазоне параметров топлив и габаритов двигателей. Установлено, что для малоразмерных двигателей с уменьшением параметра χ (габаритов двигателя) «классическая» область устойчивости при $\nu < 1$ начинает сужаться; с другой стороны, в области значений показателя в законе горения $\nu > 1$ стационарные режимы могут быть устойчивыми для составов с $r < 0$ (с отрицательной зависимостью температуры поверхности от начальной температуры). На данный момент разработанных составов с $r < 0$, $\nu > 1$ нет только потому, что для больших двигателей они непригодны. Однако известны отдельные компоненты с $\nu > 1$ (например, перхлорат аммония при давлении $300 \div 1000$ атм). Что касается параметра r , то из-за трудностей измерения информация о нем гораздо менее надежна, чем для параметра ν . Но известно, что существует принципиальная возможность достижения значений $r < 0$ при определенном соотношении параметров реакций в конденсированной и газовой фазах [15]. Таким образом, изложенные результаты «о новых областях устойчивости» не могут быть немедленно использованы на практике, но дают разработчикам сигнал о возможной пригодности области $\nu > 1$, $r < 0$ для малых двигателей.

Следует иметь в виду, что для достаточно малых значений параметра χ приведенные границы областей устойчивости могут быть искажены появлением других видов колебаний (например, связанных с избыточным подповерхностным тепловыделением или с незавершенностью газофазных реакций).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме // ПМТФ. — 1963. — № 1. — С. 67–76.
2. Сегал Р., Стрэнд Л. Д. Теория низкочастотной неустойчивости горения в ракетных двигателях твердого топлива // Ракетная техника и космонавтика. — 1964. — Т. 2, № 4. — С. 140–148.
3. Тьен Дж. С., Сириньяно М. А., Саммерфилд М. Теория L^* -неустойчивого горения заряда с внутренним каналом звездообразного сечения при наличии колебаний температуры // Ракетная техника и космонавтика. — 1970. — Т. 8, № 1. — С. 146–154.
4. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. — М.: Наука, 1973.
5. Шойер Х. Ф. Р. Неполное сгорание как возможная причина неустойчивости горения // Аэрокосмическая техника. — 1984. — Т. 2, № 4. — С. 64–73.
6. Schoyer H. F. R., de Bont R. T. M. Experimental verification of temperature fluctuations during combustion instability // AIAA Journal. — 1986. — V. 24, N 2. — P. 340–341.
7. Гостинцев Ю. А., Суханов Л. А. К теории устойчивости горения пороха в полузамкнутом объеме // Физика горения и взрыва. — 1974. — Т. 10, № 6. — С. 818–826.
8. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Анализ феноменологических моделей нестационарного горения гомогенных твердых топлив // Горение и плазмохимия. — 2005. — Т. 3, № 3. — С. 175–184.
9. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Анализ моделей горения энергетических веществ с полнотью газообразными продуктами реакции // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 24–40.
10. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эрозионное горение. Проблемы моделирования // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 47–58.
11. Земских В. И., Новожилов Б. В., Тимченко А. В. Переходные режимы горения конденсированных систем в полузамкнутом объеме // Хим. физика. — 1988. — Т. 7, № 10. — С. 1392–1399.
12. Кискин А. Б., Новожилов Б. В. Асимптотическое поведение скорости горения конденсированных систем при малых возмущениях // Физика горения и взрыва. — 1989. — Т. 25, № 5. — С. 132–137.
13. Зенин А. А. Процессы в зонах горения баллистических порохов // Физические процессы при горении и взрыве / Под ред. Л. Н. Степика. — М.: Атомиздат, 1980. — С. 68–105.

14. **Зенин А. А., Финяков С. В.** Характеристики волн горения гексогена при различных давлениях и начальных температурах // Физика горения и взрыва. — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 32–45.
15. **Гусаченко Л. К., Зарко В. Е.** Возможность отрицательной зависимости температуры поверхности горения энергетического материала от начальной температуры // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Докл. конф. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1998. — С. 53–54.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим случай, когда частотное уравнение не имеет решений. Такая ситуация возможна (в некоторой области входящих в частотное уравнение параметров) при исследовании методом малых возмущений устойчивости любого процесса. Поскольку реальный процесс устойчив или неустойчив, отсутствие результата свидетельствует о невыполнении какого-то (кроме малости возмущений) предположения, сделанного при выводе частотного уравнения. Как правило, это допущение о том, что возмущения всех параметров процесса асимптотически ведут себя как $\exp(\omega\tau)$. Заметим, что точное (без упомянутого предположения) решение линеаризованной системы для возмущения каждой переменной всегда можно преобразованием Лапласа привести к виду (например, для какой-то ΔV)

$$L(\Delta V) \equiv \int_0^\infty \Delta V(\tau) \exp(-\omega\tau) d\tau = \frac{F(\omega)}{G(\omega)}.$$

Здесь $G(\omega)$ совпадает с левой (приравниваемой к нулю) частью частотного уравнения (в нашем случае (1)), а $F(\omega)$ не имеет других (сверх созданных комплексом $1/G(\omega)$) особенностей. В принципе $\Delta V(\tau)$ можно получить обратным преобразованием Лапласа, но для исследования устойчивости при известном виде $G(\omega)$ достаточно гораздо более простой процедуры. Асимптотическое поведение решения определяется особой точкой (выражения $L(\Delta V)$) с наибольшей вещественной частью. Особая точка — это нуль знаменателя (т. е. корень частотного уравнения) или иная его особенность, например точка ветвления, в которой знаменатель может быть и не равным нулю. В частности, если главный член разложения $L(\Delta V)$ около точки ветвления имеет вид

$$L(\Delta V)_{\omega \rightarrow \omega^*} \rightarrow C(\omega - \omega^*)^{n-1/2},$$

то $\Delta V_{\tau \rightarrow \infty} \sim \tau^{-n-1/2} \exp(\omega^*\tau)$, где n — целое число. В нашем случае $G(\omega)$, согласно (1), имеет как нули (соответствующие решениям $G(\omega) = 0$), так и точку ветвления $\omega^* = -1/4$. Поэтому можно утверждать: там, где частотное уравнение (1) не имеет решений для ω , стационарный режим устойчив и $d \ln \Delta V / d\tau_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow -1/4$.

*Поступила в редакцию 14/V 2008 г.,
в окончательном варианте — 31/III 2009 г.*