УДК 539.3

ЭФФЕКТЫ РАССЕЯНИЯ УПРУГИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ДАЛЬНЮЮ ЗОНУ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. В. Михаськив, Н. Д. Грилицкий*, И. О. Бутрак

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины, 79060 Львов, Украина
* Львовский факультет Днепропетровского национального университета
железнодорожного транспорта, 79052 Львов, Украина
E-mail: tex@iapmm.lviv.ua

Методом граничных интегральных уравнений исследовано трехмерное волновое поле, образующееся вследствие дифракции низкочастотных волн на искривленной трещине в бесконечном упругом теле на большом расстоянии от дефекта. Для различных направлений падения плоских продольных волн на пологую сфероидальную трещину получены диаграммы направленности рассеянного поля в зависимости от эксцентриситета поверхности трещины и волнового числа.

Ключевые слова: упругое тело, пространственная трещина, гармоническая волна, рассеянное поле, диаграмма направленности, метод граничных интегральных уравнений.

Введение. При решении задач сейсмики, диагностики и неразрушающего контроля большое внимание уделяется исследованию взаимодействия упругих волн с дефектами типа трещин, которые в реальных условиях имеют сложную геометрическую форму. Топология дефекта оказывает существенное влияние на волновую картину как в окрестности рассеивателя, так и вдали от него. Анализ ближней зоны, в частности динамических коэффициентов интенсивности напряжений в трехмерных телах с трещинами различной конфигурации, проведен в [1–7] методом граничных интегральных уравнений (ГИУ). В данной работе этот метод использован для изучения дальнего упругого волнового поля на основе зависимостей между его амплитудно-частотными характеристиками и граничными функциями раскрытия дефекта произвольной формы (решениями ГИУ). Следует отметить, что ранее аналогичный подход применялся при решении трехмерных задач дифракции акустических и электромагнитных волн на искривленных поверхностях [8, 9], а также упругих волн на плоских трещинах без учета [10, 11] и с учетом [12, 13] их взаимодействия.

Постановка задачи в форме интегральных уравнений и соотношений. Пусть в бесконечном упругом теле с трещиной, расположенной вдоль произвольной гладкой поверхности S, распространяется упругая гармоническая волна. Компоненты перемещений и соответствующих им напряжений имеют вид

$$
\begin{aligned}
u_j^{int}(\boldsymbol{x}, t) &= u_j^{int}(\boldsymbol{x}) \exp(-i\omega t), \qquad j = \overline{1,3},\\
\sigma_{jr}^{int}(\boldsymbol{x}, t) &= \sigma_{jr}^{int}(\boldsymbol{x}) \exp(-i\omega t), \qquad j, r = \overline{1,3},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки тела; t — время; $i = \sqrt{-1}$; $u_j^{int}(\boldsymbol{x})$, $\sigma_{jr}^{int}(\boldsymbol{x})$ $(j, r = \overline{1,3})$ — амплитуды перемещений и напряжений падающей волны соответственно; ω — циклическая частота. Поверхности трещины свободны от усилий (рис. 1).

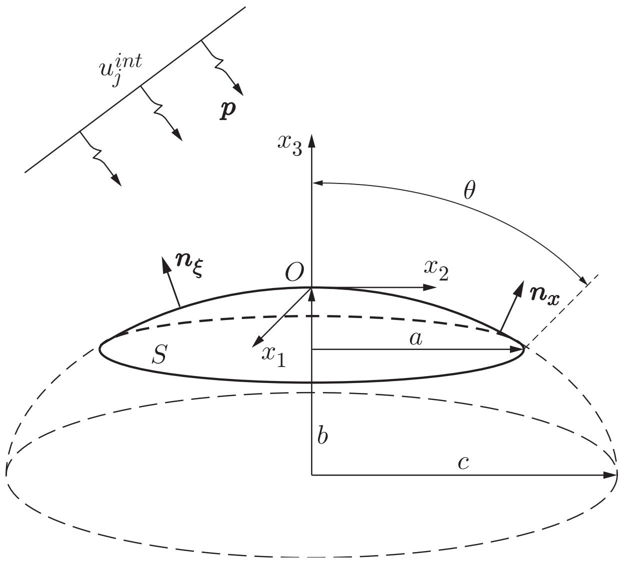

Рис. 1. Геометрия задачи

В случае установившегося процесса экспоненциальный временной множитель в (1) можно опустить. Тогда дифракционное поле перемещений u_j^* в теле вследствие взаимодействия волны с трещиной можно представить в виде суперпозиции [4]

$$u_j^*(\boldsymbol{x}) = u_j^{int}(\boldsymbol{x}) + u_j(\boldsymbol{x}), \qquad j = \overline{1,3}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$ — неизвестные перемещения отраженной от дефекта волны, удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности и дифракционным уравнениям движения в случае стационарных колебаний:

$$\omega_1^{-2}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \omega_2^{-2}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = 0, \tag{3}$$

$\omega_j = \omega/c_j$ $(j = 1, 2)$ — волновые числа; c_1, c_2 — скорости распространения в теле продольных и поперечных волн соответственно; ∇ — трехмерный набла-оператор.

С использованием теории потенциала решение задачи (1)–(3) сводится к решению следующей системы трех ГИУ относительно скачков перемещений противоположных поверхностей трещины Δu_j $(j = \overline{1,3}\,)$ в направлении координатных осей [14]:

$$\sum_{r=1}^{3} \iint\limits_S \Delta u_r(\boldsymbol{\xi}, \omega)\Omega_{jr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)\, dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{1}{4G} \sum_{r=1}^{3} \sigma_{jr}^{int}(\boldsymbol{x}, \omega) n_{r\boldsymbol{x}}, \qquad j = \overline{1,3}, \quad \boldsymbol{x} \in S. \tag{4}$$

Здесь правые части описывают усилия (с противоположным знаком), вызванные падающей волной в области дефекта, ядра Ω_{jr} имеют особенность потенциала Гельмгольца

$$\Omega_{jr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \Big(\frac{1 - 2\gamma^2}{2} \sum_{m=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} (\delta_{jm} n_{p\boldsymbol{x}} n_{r\boldsymbol{\xi}} + \delta_{rm} n_{j\boldsymbol{x}} n_{p\boldsymbol{\xi}})\, \frac{\partial^2}{\partial x_m\, \partial x_p} -$$

$$- \frac{(1 - 2\gamma^2)^2}{4}\, \omega_2^2 n_{j\boldsymbol{x}} n_{r\boldsymbol{\xi}}\Big) \frac{\exp{(i\omega_1|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|)}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} \big[\delta_{jr} n_{p\boldsymbol{x}} n_{m\boldsymbol{\xi}} + \delta_{jp} n_{r\boldsymbol{x}} n_{m\boldsymbol{\xi}} +$$

$$+ \delta_{rm} n_{p\boldsymbol{x}} n_{j\boldsymbol{\xi}} + \delta_{mj}\delta_{pr}(\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\xi}})\big]\, \frac{\partial^2}{\partial x_m\, \partial x_p}\Big(\frac{\exp{(i\omega_2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|)}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}\Big) +$$

$$+\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_r}\sum_{m=1}^{3}\sum_{p=1}^{3} n_{m\boldsymbol{x}}n_{p\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial^2}{\partial x_m\,\partial x_p}\Big(\frac{\exp\left(i\omega_2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\right)-\exp\left(i\omega_1|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\Big),$$

G — модуль сдвига; $\gamma = c_2/c_1 = \sqrt{(1-2\nu)/(2(1-\nu))}$; ν — коэффициент Пуассона; δ_{jr} — символ Кронекера; $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$ — расстояние между точкой поля $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$ и точкой интегрирования $\boldsymbol{\xi}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$; $n_{p\boldsymbol{x}}$, $n_{p\boldsymbol{\xi}}$ $(p=\overline{1,3}\,)$ — проекции нормали к поверхности S в этих точках.

На больших расстояниях от трещины $|\boldsymbol{x}| \gg |\boldsymbol{\xi}|$ $(\boldsymbol{\xi}\in S)$ имеют место асимптотические представления перемещений рассеянных волн [7], которые в сферической системе координат $x_1 = R\sin\varphi\cos\psi$, $x_2 = R\sin\varphi\sin\psi$, $x_3 = R\cos\varphi$ записываются в виде

$$\begin{aligned} u_R(R,\varphi,\psi) &= \frac{\exp\left(i\omega_1 R\right)}{R}\,F_P(\varphi,\psi), \qquad R\to\infty,\\ u_\varphi(R,\varphi,\psi) &= \frac{\exp\left(i\omega_2 R\right)}{R}\,F_{SV}(\varphi,\psi), \qquad R\to\infty,\\ u_\psi(R,\varphi,\psi) &= \frac{\exp\left(i\omega_2 R\right)}{R}\,F_{SH}(\varphi,\psi), \qquad R\to\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

В формулах (5) амплитуды плоской продольной волны F_P, а также плоских поперечных вертикально (F_{SV}) и горизонтально (F_{SH}) поляризованных волн интегрально зависят от функций Δu_j $(j=\overline{1,3}\,)$:

$$\begin{aligned} F_P(\varphi,\psi) &= i\omega_1\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\left[2\gamma^2\tilde{x}_j\tilde{x}_s + (1-2\gamma^2)\delta_{js}\right]\iint\limits_S \exp\left(-i\omega_1(\tilde{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\xi})\right)\Delta u_j(\boldsymbol{\xi})n_{s\boldsymbol{\xi}}\,dS_{\boldsymbol{\xi}},\\ F_{SV}(\varphi,\psi) &= i\omega_2\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\left[\tilde{v}_j\tilde{x}_s + \tilde{v}_s\tilde{x}_j\right]\iint\limits_S \exp\left(-i\omega_2(\tilde{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\xi})\right)\Delta u_j(\boldsymbol{\xi})n_{s\boldsymbol{\xi}}\,dS_{\boldsymbol{\xi}},\\ F_{SH}(\varphi,\psi) &= i\omega_2\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\left[\tilde{h}_j\tilde{x}_s + \tilde{h}_s\tilde{x}_j\right]\iint\limits_S \exp\left(-i\omega_2(\tilde{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\xi})\right)\Delta u_j(\boldsymbol{\xi})n_{s\boldsymbol{\xi}}\,dS_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\tilde{\boldsymbol{h}}$ — единичные векторы:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\psi\\ \sin\varphi\sin\psi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi\\ \cos\varphi\sin\psi\\ -\sin\varphi\end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{h}} = \begin{bmatrix}-\sin\psi\\ \cos\psi\\ 0\end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение задачи рассеяния волн в дальнюю зону пространственной трещиной сводится к определению функций динамического раскрытия дефекта в ГИУ (4) с последующей их подстановкой в интегральные соотношения (6).

Построение решения в длинноволновом приближении для пологой трещины. С целью получения конкретного решения задачи рассмотрим случай, когда в упругом теле имеется сфероидальная трещина с поверхностью $x_3 = F(x_1,x_2) = b\Big(\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)/c^2}-1\Big)$ в системе координат, центр которой находится в вершине дефекта (b, c — полуоси сфероида, $b\leqslant c$). Контур трещины образуется линией пересечения сфероида с плоскостью, параллельной координатной плоскости x_1Ox_2, и представляет собой круг радиусом a (см. рис. 1). Геометрические параметры трещины выбираются из условия ее пологости, т. е. угол между нормалями в произвольных точках поверхности S

не должен превышать значения $\pi/4$. На трещину набегает низкочастотная плоская продольная волна в направлении орта $\boldsymbol{p}(p_1, p_2, p_3)$. Компоненты напряжений волны имеют вид

$$\sigma_{jr}^{int}(\boldsymbol{x}, \omega) = P_0[2\gamma^2 p_r p_j + (1 - 2\gamma^2)\delta_{jr}] \exp(i\omega_1(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})), \qquad j, r = \overline{1, 3},$$

где P_0 — постоянная, соответствующая амплитуде нормальных усилий в плоскостях, параллельных фронту волны.

Сделанные предположения о пологости трещины и характере установившегося возбуждения позволяют решить ГИУ (4) методом малого параметра на основе представлений

$$\exp(i\omega_j r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega_j r)^k}{k!}, \qquad j = 1, 2, \quad r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| \quad \text{или} \quad r = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x},$$
$$F(x_1, x_2) = -\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2q-3)!!}{2q!!} \Big(\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2}\Big)^q \varepsilon^{2q}, \qquad (x_1, x_2) \in S_0, \tag{7}$$

где $\varepsilon = a/c < 1$ — геометрический параметр; S_0 — круговая область радиусом a, являющаяся проекцией области S на координатную плоскость x_1Ox_2.

Представления (7) позволяют разложить ядра и правые части ГИУ (4) в сходящиеся двойные ряды по частотному и геометрическому параметрам. Используя аналогичные разложения для искомых функций в виде

$$\Delta u_j(\boldsymbol{x}, \omega) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_j^{(k,q)}(x_1, x_2)(i\omega_2)^k \varepsilon^q, \qquad j = \overline{1, 3} \tag{8}$$

и приравнивая в правых и левых частях уравнений (4) выражения с одинаковыми степенями малых параметров, получим рекуррентные относительно индексов k, q интегральные уравнения по плоской области S_0 со статистическим (ньютоновским) ядром для определения функций $\Delta u_j^{(k,q)}$ ($j = \overline{1, 3}$, $k, q = \overline{0, \infty}$). Эти уравнения допускают аналитическое решение на основе теоремы об их полиномиальной консервативности [15]. В частности, если направление генерирующей волны совпадает с направлением орта $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(0, 0, -1)$ (направление I) или с направлением орта $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(0, 0, 1)$ (направление II), то приближенные решения ГИУ (4) с сохранением членов порядка $(i\omega_2)^3\varepsilon$, $(i\omega_2)\varepsilon^2$ получаются при следующих значениях коэффициентов в формуле (8):

$$\Delta u_j^{(0,0)}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2), \qquad \Delta u_3^{(0,0)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{P_0}{2G(1 - \gamma^2)\pi^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2},$$
$$\Delta u_j^{(0,1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{P_0}{12G\pi^2} \frac{3 - 9\gamma^2 + 8\gamma^4}{(1 - \gamma^2)^2} \frac{b}{c} \frac{x_j}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \qquad (j = 1, 2),$$
$$\Delta u_3^{(0,1)}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \Delta u_j^{(0,2)}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (j = 1, 2),$$
$$\Delta u_3^{(0,2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{P_0}{144G\pi^2} \frac{1}{(1 - \gamma^2)^3} \Big(\frac{b}{c}\Big)^2 \frac{1}{a^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \times$$
$$\times \big[2(9 - 30\gamma^2 + 41\gamma^4 - 24\gamma^6)a^2 - (9 - 42\gamma^2 + 73\gamma^4 - 48\gamma^6)(x_1^2 + x_2^2)\big],$$
$$\Delta u_j^{(1,q)}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = \overline{1, 3},\ q = 0, 1), \qquad \Delta u_j^{(1,2)}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2),$$
$$\Delta u_3^{(1,2)}(\boldsymbol{x}) = \mp \frac{P_0 b}{18G\pi^2} \frac{\gamma}{1 - \gamma^2} \frac{1}{a^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}\,(a^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)), \tag{9}$$

$$\Delta u_j^{(2,0)}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (j=1,2),$$

$$\Delta u_3^{(2,0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{P_0}{72G\pi^2}\,\frac{3-4\gamma^2+3\gamma^4}{(1-\gamma^2)^2}\,(4a^2-x_1^2-x_2^2)\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2},$$

$$\Delta u_j^{(2,1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{P_0}{720G\pi^2}\,\frac{1}{(1-\gamma^2)^3}\,\frac{b}{c}\,\frac{x_j}{a}\,\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\big[(27-86\gamma^2+105\gamma^4-28\gamma^6+16\gamma^8)a^2 - {}$$

$$- (21-53\gamma^2+55\gamma^4-19\gamma^6+8\gamma^8)(x_1^2+x_2^2)\big] \qquad (j=1,2),$$

$$\Delta u_3^{(2,1)}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \Delta u_j^{(3,0)}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (j=1,2),$$

$$\Delta u_3^{(3,0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{P_0a^3}{90G\pi^3}\,\frac{8+15\gamma-40\gamma^3+32\gamma^5}{(1-\gamma^2)^2}\,\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}, \qquad \Delta u_3^{(3,1)}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

$$\Delta u_j^{(3,1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{P_0a^2}{270G\pi^3}\,\frac{b}{c}\,x_j\,\frac{48\gamma^7-24\gamma^5+25\gamma^3+32\gamma^2+15\gamma-16}{(1-\gamma^2)^3}\,\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2} \quad (j=1,2).$$

Здесь и ниже при использовании знаков “$\mp$” и “$\pm$” верхний знак соответствует направлению I, нижний знак — направлению II.

Для дальнейшего исследования динамических перемещений в дальней зоне необходимо вычислить интегралы (6) с учетом функций раскрытия дефекта (8), (9). Принимая асимптотические формулы (7) при $r = \tilde{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}$ и используя методику редукции поверхностных интегралов к двойным интегралам вида

$$\iint\limits_{S_0} \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{2}{3}\,\pi a^3, \qquad \iint\limits_{S_0} \xi_j\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = 0 \qquad (j=1,2),$$

$$\iint\limits_{S_0} \xi_1\xi_2\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = 0, \qquad \iint\limits_{S_0} \xi_j^2\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{2}{15}\,\pi a^5 \qquad (j=1,2),$$

$$\iint\limits_{S_0} \xi_i^2\xi_j\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = 0 \qquad (i,j=1,2),$$

$$\iint\limits_{S_0} \xi_j^4\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{2}{35}\,\pi a^7 \quad (j=1,2), \qquad \iint\limits_{S_0} \xi_1^2\xi_2^2\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{2}{105}\,\pi a^7,$$

$$\iint\limits_{S_0} \xi_i^3\xi_j\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,dS_{\boldsymbol{\xi}} = 0 \qquad (i,j=1,2, \quad i\neq j),$$

для рассмотренных двух способов вовлечения трещины в волновое поле получим следующие приближения амплитуд рассеяния волн различных мод:

$$F_P(\varphi) = i\chi F_*\Big\langle g_1 + g_2\cos^2\varphi + (g_3 + g_4\sin^2\varphi + g_5\cos^2\varphi)\Big(\frac{b}{c}\Big)^2\frac{\sin^2\theta}{1-k^2\cos^2\theta} + {}$$

$$+ i[g_6\sin^2\varphi\cos\varphi + (g_7+g_8\cos^2\varphi)(\cos\varphi\pm 1)]\,\frac{b}{c}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}}\,\chi - {}$$

$$- (g_9 + g_{10}\sin^2\varphi + g_{11}\sin^2 2\varphi + g_{12}\cos^2\varphi)\chi^2 - {}$$

$$- i\Big(g_{13} + g_{14}\cos^2\varphi + (g_{15}+g_{16}\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos\varphi\,\frac{b}{c}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}}\Big)\chi^3\Big\rangle, \qquad (10)$$

$$F_{SV}(\varphi) = i\chi\,\frac{F_*}{\gamma}\Big\langle \sin 2\varphi + h_1 \sin 2\varphi\Big(\frac{b}{c}\Big)^2 \frac{\sin^2\theta}{1-k^2\cos^2\theta} +$$
$$+ i(h_2 \sin\varphi\cos 2\varphi + h_3\cos\varphi\sin 2\varphi \pm h_4 \sin 2\varphi)\frac{b}{c}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}}\,\chi -$$
$$- (h_5 + h_6\sin^2\varphi)\sin 2\varphi\chi^2 -$$
$$- i\Big(h_7\sin 2\varphi + (h_8 + h_9\sin^2\varphi)\cos 2\varphi\sin\varphi\,\frac{b}{c}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}}\Big)\chi^3\Big\rangle;$$
$$F_{SH}(\varphi) = 0 \qquad (11)$$

(соотношение (11) справедливо и для направления I, и для направления II). В (10), (11) $\chi = \omega_2 a$ — нормализованное волновое число; θ — угол между нормалью к поверхности трещины на ее контуре и осью Ox_3, характеризующий степень искривления трещины (см. рис. 1), причем $\cos^2\theta = (1-(a/c)^2)/(1-k^2(a/c)^2)$; $k^2 = 1-(b/c)^2$; $F_* = P_0a^2\gamma/(3G\pi(1-\gamma^2))$ — нормирующая величина, пропорциональная площади основания трещины,

$$g_1 = 2\gamma^2 - 1, \qquad g_2 = -2\gamma^2, \qquad g_3 = \frac{\gamma^2(1-2\gamma^2)(3-6\gamma^2+2\gamma^4)}{15(1-\gamma^2)^2},$$
$$g_4 = -\frac{\gamma^2(3-9\gamma^2+8\gamma^4)}{15(1-\gamma^2)}, \qquad g_5 = \frac{2\gamma^2(3-9\gamma^2+11\gamma^4-6\gamma^6)}{15(1-\gamma^2)^2}, \qquad g_6 = \frac{\gamma^3(9-15\gamma^2+8\gamma^4)}{60(1-\gamma^2)},$$
$$g_7 = -\frac{\gamma(1-2\gamma^2)}{5}, \qquad g_8 = -\frac{2\gamma^3}{5}, \qquad g_9 = \frac{(1-2\gamma^2)(3-4\gamma^2+3\gamma^4)}{10(1-\gamma^2)}, \qquad g_{10} = \frac{\gamma}{2}\,g_7,$$
$$g_{11} = \frac{\gamma}{8}\,g_8, \qquad g_{12} = \frac{\gamma^2(3-4\gamma^2+3\gamma^4)}{5(1-\gamma^2)}, \qquad g_{13} = \frac{(1-2\gamma^2)(8+15\gamma-40\gamma^3+32\gamma^5)}{45(1-\gamma^2)\pi},$$
$$g_{14} = \frac{2\gamma^2(8+15\gamma-40\gamma^3+32\gamma^5)}{45(1-\gamma^2)\pi}, \qquad g_{15} = -\frac{\gamma^3(165-414\gamma^2+439\gamma^4-168\gamma^6+16\gamma^8)}{1260(1-\gamma^2)^2},$$
$$g_{16} = \frac{\gamma^5(9-15\gamma^2+8\gamma^4)}{210(1-\gamma^2)},$$
$$h_1 = -\frac{9-30\gamma^2+39\gamma^4-20\gamma^6}{30(1-\gamma^2)^2}, \qquad h_2 = \frac{2}{\gamma^3}\,g_6, \qquad h_3 = \frac{1}{5}, \qquad h_4 = \gamma h_3,$$
$$h_5 = -\frac{g_9}{1-2\gamma^2}, \qquad h_6 = \frac{h_3}{2}, \qquad h_7 = -\frac{8+15\gamma-40\gamma^3+32\gamma^5}{45(1-\gamma^2)\pi},$$
$$h_8 = -\frac{165-270\gamma^2+247\gamma^4-24\gamma^6+16\gamma^8}{2520(1-\gamma^2)^2}, \qquad h_9 = \frac{9-15\gamma^2+8\gamma^4}{420(1-\gamma^2)}.$$

Следует отметить, что одинаковое распределение амплитуд рассеяния продольных и поперечных вертикально поляризованных волн в меридиональных плоскостях $\psi = \text{const}$, а также равенство нулю амплитуд рассеяния поперечных горизонтально поляризованных волн обусловлено симметрией поверхности трещины и генерирующей установившейся волны растяжения-сжатия относительно оси Ox_3.

Анализ диаграмм направленности рассеянного поля. Расчет представленных на рис. 2, 3 относительных амплитуд $\bar F_A(\varphi) = |F_A(\varphi)|/F_*$ ($A \equiv P, SV$) как функций угловой координаты φ проводился для сфероидальной трещины с радиусом контура $a = 0{,}5c$ при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}3$. Эксцентриситет поверхности трещины

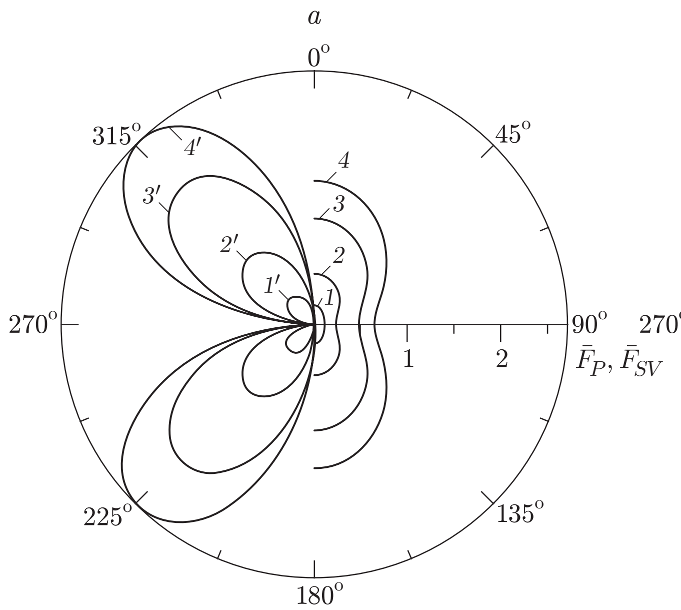

Рис. 2. Диаграммы направленности рассеянного поля плоской трещиной при $\theta = 0°$ (*а*) и искривленной сфероидальной трещиной при $\theta = 40°$ (*б*):

1–4 — характеристики продольных отраженных волн; *1′–4′* — характеристики поперечных отраженных волн; *1, 1′* — $\chi = 0{,}2$; *2, 2′* — $\chi = 0{,}5$; *3, 3′* — $\chi = 0{,}9$; *4, 4′* — $\chi = 1{,}1$; сплошные линии — распространение генерирующей волны в направлении I, штриховые линии — то же в направлении II

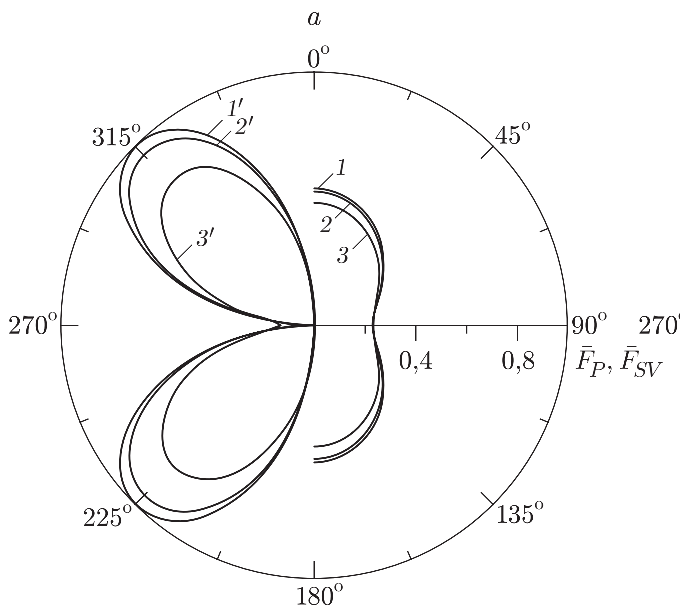

Рис. 3. Диаграммы направленности рассеянного поля трещиной при падении волны в направлении I:

а — $\chi = 0{,}5$; *б* — $\chi = 1{,}1$; *1–3* — характеристики продольных отраженных волн; *1′–3′* — характеристики поперечных отраженных волн; *1, 1′* — плоская трещина ($\theta = 0°$); *2, 2′* — сферическая трещина ($\theta = 30°$); *3, 3′* — сфероидальная трещина ($\theta = 40°$)

варьировался изменением угла θ в диапазоне от $\theta = 0^\circ$, когда в теле имеется плоская круговая трещина, до значения $\theta = 40^\circ$. Поверхность сферической трещины ($b = c$) определялась значением $\theta = 30^\circ$. Вследствие симметрии задачи на каждой диаграмме представлены характеристики как продольных, так и поперечных отраженных волн. Из рис. 2 следует, что с увеличением волнового числа амплитуды рассеяния волн обеих мод увеличиваются. В случае плоской трещины волновое поле симметрично относительно экваториальной плоскости, причем амплитуды как F_P, так и F_{SV} для направлений I и II генерирующей волны равны между собой. Минимальные значения амплитуд рассеяния наблюдаются в экваториальной плоскости, а для величины F_{SV} также при $\varphi = 0, \pi$ в точках, где $F_{SV} = 0$. Для продольных волн максимумы амплитуд рассеяния расположены на оси, определяющей направление распространения генерирующей волны, для поперечных волн — на осях, образующих с этим направлением угол, близкий к 45°, зависящий от волнового числа. Абсолютные максимумы этих параметров достигаются со стороны выпуклости дефекта (см. рис. 1), причем в случае дифракции внешней волны с той же стороны они больше. Различие реакции трещины в зависимости от двух рассмотренных направлений волны более существенно в области больших волновых чисел.

Данные на рис. 3 показывают, что при увеличении кривизны трещины амплитуда рассеянных волн уменьшается. Это объясняется уменьшением удельной упругой энергии, израсходованной генерирующей волной на раскрытие дефекта. Данные результаты могут быть использованы в качестве тестовых при решении обратных задач определения геометрических параметров трещины по данным рассеянного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболь Б. В.** Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993.
2. **Михаськив В. В., Бутрак И. О.** Трехмерные динамические задачи для упругого тела с пологой трещиной // Физ.-хим. механика материалов. 2003. Т. 39, № 1. С. 69–78.
3. **Dominguez J., Ariza M. P.** General BE approach for three-dimensional dynamic fracture analysis // Engng Anal. Bound Elements. 2002. V. 26, N 8. P. 639–651.
4. **Parton V. Z., Boriskovsky V. G.** Dynamic fracture mechanics. N. Y.: Hemisphere Publ. Co., 1989.
5. **Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z.** Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3-D dynamic crack problems // Engng Anal. Bound Elements. 2003. V. 27, N 3. P. 203–213.
6. **Tada T., Fukuyama E., Madariaga R.** Non-hypersingular boundary integral equations for 3-D non-planar crack dynamics // Comput. Mech. 2000. V. 25, N 6. P. 613–626.
7. **Zhang Ch., Gross D.** On wave propagation in elastic solids with cracks. Southampton: Comput. Mech. Publ., 1998.
8. **Галишникова Т. Н., Ильинский А. С.** Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
9. **Захаров Е. В., Халеева И. В.** Гиперсингулярные интегральные уравнения I рода задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 2. С. 313–318.
10. **Капцов А. В., Шифрин Е. И.** О рассеянии плоской трещиной нормально падающей продольной гармонической волны // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 6. С. 106–112.

11. **Hirose S., Achenbach J. D.** Higher harmonics in the far field due to dynamic crack-face contacting // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 93, N 1. P. 142–147.
12. **Achenbach J. D.** Quantitative nondestructive evaluation // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 1. P. 13–27.
13. **Yang L., Turner J. A.** Scattering of elastic waves in damaged media // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 113, N 6. P. 2992–3000.
14. **Mykhas'kiv V. V.** Boundary integral formulation of three-dimensional problems of steady vibrations of an infinite body with a crack located on an open Lyapunov surface // J. Math. Sci. 1998. V. 90, N 2. P. 1956–1960.
15. **Хай М. В.** Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. Киев: Наук. думка, 1993.

Поступила в редакцию 4/V 2005 г.