УДК 532.545

ПЕРЕНОС НАНОСОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ ПРИДОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ УКЛОНА ДНА

А. Г. Петров, И. И. Потапов*

Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, 119526 Москва, Россия
* Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск, Россия
E-mails: petrov@ipmnet.ru, potapovii@rambler.ru

Показано, что расход переносимых наносов однозначно определяется нормальными и касательными придонными напряжениями, а также уклоном донной поверхности. Аналитически получена зависимость удельного массового расхода переносимых наносов над неровным размываемым дном от трех указанных характеристик. В рамках двухскоростной модели выведена формула расхода переносимых наносов, обобщающая ряд известных формул переноса наносов.

Ключевые слова: русловые процессы, расход наносов, придонный слой, донные волны, устойчивость русел.

В работах [1, 2] предложена и развита теория движения наносов в придонном активном слое, не содержащая феноменологические параметры. Данная теория обобщена в работе [3], где учтено влияние возмущений свободной поверхности речного потока на процесс переноса наносов. Обобщение, выполненное в работе [3], было использовано в работах [4, 5], в которых, так же как и в [3], изменение донного рельефа в деформируемых руслах определялось наличием волн на свободной поверхности потока. Полученные в работах [3–5] асимптотические и аналитические решения обобщают результаты [6–8], полученные с использованием феноменологических моделей движения наносов. Однако обобщение формулы движения переносимых наносов, полученное в работе [3], не позволяет рассматривать весь спектр русловых задач о формировании донного рельефа, поскольку, как показано в [9, 10], возникновение и развитие донных волн возможно в закрытых напорных каналах, когда возмущение свободной поверхности потока отсутствует.

В данной работе установлено, что расход наносов однозначно определяется придонными касательными и нормальными напряжениями, а также уклоном донной поверхности. Аналитически получена зависимость удельного массового расхода переносимых наносов от трех указанных характеристик, определяемых из решения гидродинамической задачи. Из полученной зависимости следуют все известные частные результаты [1–3]. Однако с помощью этой зависимости можно объяснить некоторые русловые процессы (например, процессы, происходящие в напорных каналах), которые не могли быть описаны с использованием полученных ранее зависимостей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-98518-р восток(а)) и фонда ДВО РАН (код проекта 12-III-А-03-034).

При рассмотрении русловых процессов изменение отметки дна ζ потока можно найти из уравнения сохранения песчаной массы [8]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s(1-\varepsilon)}\,\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где ρ_s — плотность частиц песка; ε — коэффициент пористости песчаного дна. Для замыкания уравнения Эйснера (1) необходимо определить зависимость вектора расхода наносов $\boldsymbol{G}$ от векторов напряжения жидкости на дне (определяемых при решении внешней гидродинамической задачи) и локальных уклонов донной поверхности. Согласно [1] задача определения указанной зависимости состоит в математическом моделировании движения тонкого слоя двухфазной смеси, ограниченного снизу неподвижной сыпучей средой, а сверху — потоком жидкости. Определим удельный массовый расход твердых частиц, движущихся в придонном слое:

$$G = \rho_s \int\limits_0^a f w\, dm. \tag{2}$$

Здесь f, w, a — концентрация частиц, скорость их движения и толщина активного слоя смеси. Функции f, w, a определим из решения гидродинамических уравнений [1] для модели водогрунтовой смеси в тонком придонном слое. Математическая постановка задачи для получения удельного массового расхода твердых частиц, движущихся в придонном слое, включает следующие уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial m} + Q = 0, \qquad Q = \rho_w g(1+s)\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = \rho_w g(1+s)\cos\gamma; \tag{4}$$

$$\tau = -(\tau_s + \tau_w)\,\frac{\partial w}{\partial m} \Big/ \left|\frac{\partial w}{\partial m}\right| = \tau_s + \tau_w; \tag{5}$$

$$\tau_w = \rho_w \varkappa^2 (a-m)^2 \left|\frac{\partial w}{\partial m}\right|^2, \qquad \tau_s = p_s \operatorname{tg}\varphi. \tag{6}$$

Здесь τ — напряжение на площадках, касательных к поверхности смеси; P — напряжение (давление) на площадках, ориентированных по нормали к поверхности смеси; τ_w, τ_s — абсолютные значения касательного напряжения жидкой и твердой несвязной фаз, для которых выполняются соответственно закон Прандтля и закон трения Кулона [1]; $s = f\rho_b$; $\rho_b = (\rho_w - \rho_s)/\rho_w$; ρ_s, ρ_w — плотности частиц и воды; f — объемная концентрация твердых частиц в придонном слое; m — координата вдоль оси, направленной вертикально вниз, отсчитываемая от верхней границы активного слоя ($m = 0$ на верхней границе $z = \zeta(x,t)$ и $m = a$ на нижней границе); x — координата вдоль оси, направленной по касательной к донной поверхности; γ — острый угол между нормалью к поверхности смеси и вертикальной линией; $p_s = ms\rho_w g\cos\gamma$ — давление взвешенных в воде твердых частиц; φ — угол внутреннего трения донных частиц; $\varkappa$ — постоянная Кармана.

Краевые условия можно получить из условия непрерывности скорости и напряжения с помощью следующих рассуждений [1, 2].

На верхней границе слоя твердые частицы находятся во взвешенном состоянии, при этом $\tau_s = 0$. Толщина слоя a мала, поэтому ею можно пренебречь. Следовательно, величина $T = \tau(0)$ такая же, как для чистой жидкости на дне, и вычисляется из решения гидродинамической задачи (в отсутствие твердых частиц) $T = \lambda\rho_w V^2$. Отсюда при $m = 0$ получаем граничные условия

$$\tau(0) = T = \lambda\rho_w V^2; \tag{7}$$

$$P(0) = \rho_w g p, \tag{8}$$

где $P(0)$, p — давление и соответствующий ему напор на поверхности $z = \zeta$ активного слоя.

При $m \geqslant a$ среда покоится: $w(a) = 0$. Касательное напряжение в покоящейся среде не превышает кулоновского трения: $\tau \leqslant p_s \operatorname{tg} \varphi$. В движущейся среде ($m < a$) согласно реологическому закону (5) $\tau = p_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_w$, причем $\tau_w \geqslant 0$. Непрерывность τ в точке $z = a$ возможна только при $\tau_w = 0$. Таким образом, получаем условие

$$\tau(a) = \tau_s(a) = p_s \operatorname{tg} \varphi \tag{9}$$

и условие прилипания

$$w(a) = 0. \tag{10}$$

Условие (10) рассматривалось в работе [11] в качестве критерия начала движения частиц на нижней границе активного слоя.

Следует отметить существенное различие распределений скорости в рассматриваемой задаче и в задаче в отсутствие частиц, несмотря на идентичность законов турбулентного трения. В случае чистой жидкости вблизи стенки $\tau_w \approx \mathrm{const}$, откуда следует логарифмический закон распределения скорости. В случае смеси τ_w возрастает пропорционально расстоянию от стенки, поэтому при $z \approx 0$ закон распределения скорости является линейным.

В отличие от работ [1, 3] при определении удельного массового расхода наносов не будем вводить дополнительные предположения о функции давления, чтобы исключить ее из уравнения движения (3). Преобразуем уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial \tau}{\partial m} + A\Gamma = 0, \tag{11}$$

где

$$A = F_a f, \qquad F_a = \cos\gamma \operatorname{tg}\varphi\,(\rho_s - \rho_w) g, \qquad p = P(0)/(\rho_w g); \tag{12}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\cos\gamma \operatorname{tg}\varphi}\Big[\Big(1 + \frac{1}{s}\Big)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big]. \tag{13}$$

Интегрируя по m уравнение (11) с учетом граничных условий (9), (10), получаем распределение касательного напряжения по толщине активного слоя

$$\tau(m) = T - mA\Gamma. \tag{14}$$

С учетом (14) из (5), (6) следует, что зависимости $\tau(m)$, $\tau_s(m)$, $\tau_w(m)$ являются линейными. Так как $\tau_w(0) = T$, $\tau_w(a) = 0$, то

$$\tau_w(m) = T(1 - m/a). \tag{15}$$

Используя (14) и граничное условие (9), определим толщину активного слоя

$$a = \frac{T}{A(1 + \Gamma)}. \tag{16}$$

С помощью формул (6), (15), (16) найдем распределение $\partial w/\partial m$ по толщине активного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial m} = \sqrt{\frac{A(1 + \Gamma)}{\varkappa^2 \rho_w}}\,\frac{1}{\sqrt{a - m}}. \tag{17}$$

В работе [2] показано, что величина расхода G слабо зависит (а в ряде случаев не зависит) [12] от распределения концентрации твердых частиц f по глубине активного слоя, поэтому значение параметра f можно принять постоянным. В этом случае удельный массовый расход наносов можно рассчитать с помощью интегрирования по частям, аналогично тому как это выполнено в работе [1]:

$$G = \rho_s f \int_0^a w\,dm = -\rho_s f \int_0^a m\,\frac{\partial w}{\partial m}\,dm. \tag{18}$$

Подставляя в выражение (17) формулу (18) и интегрируя по толщине активного слоя, с учетом того, что

$$\int_0^a m\,\frac{1}{\sqrt{a-m}}\,dm = \frac{4}{3}\,a^{3/2},$$

получаем выражение для удельного массового расхода наносов

$$G = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{A(1+\Gamma)}{\varkappa^2\rho_w}}\;\rho_s f a^{3/2}. \tag{19}$$

С учетом (16) уравнение (19) принимает следующий вид:

$$G = \frac{4}{3}\,\frac{\rho_s T^{3/2}}{F_a\sqrt{\rho_w}\,\varkappa(1+\Gamma)}. \tag{20}$$

Формула (2), использованная для определения удельного массового расхода твердых частиц, получена в предположении, что скорости расхода твердых частиц и жидкости одинаковы. Это не позволяет определить значения скорости начала движения частиц. Для вывода более точной двухскоростной зависимости, определяющей удельный массовый расход твердых частиц, используем формулу [2]

$$G = \rho_s \int_0^a f(w-v)\,dm, \tag{21}$$

для которой критерием начала движения твердых частиц является неравенство $v < |w|$. Здесь v — скорость отставания частиц от гидродинамического потока. Следуя [2], определим скорость из уравнения баланса сил, действующих на частицы, находящиеся в единице объема:

$$F_w + F_s + F_g = 0, \tag{22}$$

при этом ускорением частиц в активном слое $0 \leqslant m \leqslant a$ будем пренебрегать. В (22) F_w — сила сопротивления, действующая на частицы со стороны воды:

$$F_w = f\,\frac{c_x\rho_w v^2}{2d}, \tag{23}$$

d — диаметр частиц; c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц; F_s — сила трения частиц, определяемая из реологического соотношения (4) для напряжения твердой фазы:

$$F_s = \frac{\partial\tau_s}{\partial m} = -fF_a; \tag{24}$$

F_g — проекция силы тяжести на касательную к поверхности дна плоскость:

$$F_g = -fF_aK, \qquad K = \frac{1}{\cos\gamma\,\operatorname{tg}\varphi}\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}. \tag{25}$$

Подставляя выражения (23)–(25) в уравнение (22), получаем выражение

$$c_x\rho_w v^2/(2d) - F_a(1+K) = 0,$$

которое позволяет определить относительную скорость v:

$$v = \sqrt{2dF_a(1+K)/(c_x\rho_w)}.$$

Зная скорость v, можно найти поправку расхода

$$\Delta G = \rho_s f \int\limits_0^a v\,dm = \rho_s \sqrt{\frac{2dF_a}{c_x\rho_w}}\,\frac{\sqrt{1+K}}{1+\Gamma}\,T. \tag{26}$$

Используя уравнение (20) с учетом поправки (26), получаем формулу для двухскоростной модели удельного массового расхода твердых частиц в активном слое

$$G = \frac{4}{3}\,\frac{\rho_s T^{3/2}}{F_a\sqrt{\rho_w}\,\varkappa(1+\Gamma)}\Big(1 - \sqrt{\frac{9}{8}\,\frac{\varkappa^2 dF_a(1+K)}{c_x T}}\Big). \tag{27}$$

Из уравнения (27) и условия $0 \leqslant q$ при $T_c \leqslant T$ можно получить условие начала движения наносов

$$1 - \sqrt{\frac{9}{8}\,\frac{\varkappa^2 dF_a(1+K)}{c_x T}} = 0,$$

позволяющее определить критическое напряжение T_c, при котором начинается движение донных частиц:

$$T_c = T_{c0}(1+K), \qquad T_{c0} = \frac{9}{8}\,\frac{\varkappa^2 dF_a(1+K)}{c_x} \tag{28}$$

(T_{c0} — критическое напряжение, при котором начинается движение донных частиц в случае ровного дна). С учетом (28) полный массовый удельный расход наносов можно определить по формуле

$$G = G_0\,\frac{1-\Xi\sqrt{1+K}}{1+\Gamma}, \tag{29}$$

где

$$G_0 = \frac{4}{3}\,\frac{\rho_s T^{3/2}}{F_a\sqrt{\rho_w}\,\varkappa}, \qquad \Xi = \sqrt{\frac{T_{c0}}{T}}.$$

Раскладывая (29) по малым параметрам $\partial\zeta/\partial x$, $\partial p/\partial x$ и отбрасывая члены, имеющие порядок выше первого, получаем выражение

$$G = G_0\Big(A - B\,\frac{\partial\zeta}{\partial x} - C\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{30}$$

где

$$A = 1 - \Xi, \qquad B = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\cos\gamma}\Big(\frac{\Xi}{2} + (1-\Xi)\,\frac{1+s}{s}\Big), \qquad C = \frac{1-\Xi}{s\operatorname{tg}\varphi\cos\gamma}.$$

В работе проведено обобщение известной формулы расхода наносов, что позволяет учесть влияние нормальных и касательных придонных напряжений на перенос наносов.

Полученная зависимость (30) обобщает известные результаты. В частности, для невозмущенной свободной поверхности в гидростатическом приближении, полагая $p = -\zeta$, из (30) находим зависимость [1, 2]

$$G = G_0\Big(A - B_0\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big), \qquad B_0 = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\cos\gamma}\Big(1 - \frac{\Xi}{2}\Big).$$

При наличии возмущений свободной поверхности гидродинамического потока η, когда $p = \eta - \zeta$, получаем зависимость, использованную в работах [3–5]:

$$G = G_0\Big(A - B_0\,\frac{\partial\zeta}{\partial x} - C\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\Big).$$

Формула (30) позволяет рассматривать процессы образования донных волн при фиксированной свободной поверхности потока $\eta = 0$, например в напорных потоках или глубоких каналах. С учетом реологии, использованной в [12], изложенный подход позволяет обобщить известные феноменологические формулы [10, 11, 13, 14]

$$G = \alpha T^\beta\Big(D - \Lambda\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big), \qquad \alpha = \mathrm{const}, \quad D = \mathrm{const}, \quad \Lambda = \mathrm{const}$$

при $\beta \simeq 3/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–75.
2. **Петров А. Г., Петров П. Г.** Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 102–112.
3. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 62–74.
4. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О развитии возмущений песчаного дна канала // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 2. С. 191–195.
5. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Об устойчивости песчаного дна канала постоянной ширины // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 5. С. 631–634.
6. **Tanaka J.** Study on the flow over sand waves // Rep. DPRJ. 1968. N 1113. P. 281–289.
7. **Kennedy J. F.** The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels // J. Fluid Mech. 1963. V. 16, N 4. P. 521–544.
8. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
9. **Сидорчук А. Ю., Михинов А. Е.** Морфология и динамика руслового рельефа // Гидрология суши. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–160. (Итоги науки и техники; Т. 5).
10. **Coleman S. E., Fedele J. J., Garcia M. H.** Closed-conduit bed-form initiation and development // J. Hydraul. Engng. 2003. V. 129, N 12. P. 956–965.
11. **Bagnold R. A.** An approach to the sediment transport problem from general physics: US geolog. survey prof. paper. Washington, 1966.
12. **Потапов И. И.** Двумерная модель транспорта донных наносов для рек с песчаным дном // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 131–139.
13. **Komarova N. L., Hulscher S. J. M. H.** Linear instability mechanisms for sand wave formation // J. Fluid Mech. 2000. V. 413. P. 219–246.
14. **Komarova N. L., Newell A. C.** Nonlinear dynamics of sand banks and sand waves // J. Fluid Mech. 2000. V. 415. P. 285–321.

Поступила в редакцию 18/VII 2013 г.,
в окончательном варианте — 30/IX 2013 г.